



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



HYDROMECHANIK

ODER

DIE TECHNISCHE MECHANIK FLÜSSIGER KÖRPER

VON

DR. MORITZ RÜHLMANN,

KÖNIGLICH PREUSSISCHER GEHEIMER REGIERUNGSRATH UND PROFESSOR
AN DER K. POLYTECHNISCHEN SCHULE IN HANNOVER.

ERSTES HEFT.

HYDROSTATIK UND HYDRODYNAMIK BIS ZUM AUSFLUSSE DES WASSERS DURCH SOGENANNTE PONCELET-MÜNDUNGEN.

ZWEITE VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUSGABE.

HANNOVER.
HAHN'SCHE BUCHHANDLUNG.
1879.

Hannover. Schrift und Druck von Fr. Culemann.

Vorbemerkungen.

Bei der Herausgabe des ersten Heftes der zweiten Auflage meiner technischen Mechanik flüssiger Körper, halte ich es für angemessen, folgende Bemerkungen zu machen.

Zunächst war ich bemüht, alle möglichen Verbesserungen und Erweiterungen anzubringen, welche der gegenwärtige Standpunkt dieser Erfahrungswissenschaft zu fordern berechtigt ist.

Sodann wurden „die geschichtlichen Notizen“ in hervorragender, umfänglicher Weise abgefaßt, nachdem ich in meiner Lehrthätigkeit mich von dem großen Nutzen und von der äußerst wirksamen Anregung überzeugt hatte, welche das Einflechten des geschichtlichen Elementes auch hier (wie in meiner Allgemeinen Maschinenlehre), namentlich für die Studirenden Polytechnischer Hochschulen, mit sich führt.

Wenn irgend möglich, soll die zweite Hälfte (der Schluß) des Buches etwa Mitte August dieses Jahres erscheinen.

Endlich habe ich der neuen Verlagsbuchhandlung noch meinen besonderen Dank für die Ausstattung des Werkes auszusprechen und zwar sowohl hinsichtlich des schönen Druckes und Papieres, als auch für die Erneuerung sämmtlicher Holzschnitte.

Hannover, im Monat Februar 1879.

Rühlmann.



Hydromechanik.

Allgemeine Einleitung.

§. 1.

Flüssig heißt jeder Körper, dessen Theile derartig äußerst leicht verschiebbar sind, daß er jede selbstständige Gestalt entbehrt, diese vielmehr von dem Gefäße bestimmt wird, in welchem er eingeschlossen ist und von den Kräften, welche auf ihn einwirken.

Da es bis jetzt, streng genommen, nicht möglich gewesen ist, die Grenze anzugeben, wo die feste Körperform aufhört und die flüssige anfängt, so nimmt man in der Mechanik die flüssigen Körper als absolut flüssig, d. h. als solche an, welche die Eigenschaft der leichten Verschiebbarkeit im höchsten Grade besitzen. Letzterer Annahme folgen wir stets, wenn das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird.

§. 2.

Hinsichtlich bestimmt hervortretender physikalischer Eigenschaften hat man zwei Arten von Flüssigkeiten zu unterscheiden. Bei der einen Art hängen die Theilchen mit einer äußerst geringen, meist Null zu setzenden Attractionskraft (Cohäsion) zusammen, während bei der anderen Art diese Kraft nicht nur gänzlich fehlt, sondern den Theilchen eine Repulsivkraft (Expansivkraft) innewohnt, die ihnen ein stetes Ausdehnungsbestreben ertheilt.

Vermöge dieser Eigenschaft kann ein bestimmtes Volumen auch nur erhalten werden, wenn dasselbe von allen Seiten durch Gefäßwände begrenzt oder überall von äußeren Kräften gedrückt wird.

Eine minder physikalisch scharfe, jedoch technisch völlig zulässige Eintheilung der flüssigen Körper ist die in unelastische und in elastische Flüssigkeiten. Unter ersteren versteht man solche, deren Volumen durch Einwirkung äußerer Kräfte oder der Wärme verhältnißmäßig höchst wenig verändert werden kann[1]), während letztere die flüssigen Körper begreift, welche diese Veränderung unter denselben Verhältnissen im höchsten Grade zeigen.

---

[1]) Unter dem Drucke von 1,0333 Kilogramm auf ein Quadrat-Centimeter

Zu den Flüssigkeiten der ersteren Art gehören Wasser, Quecksilber, Alkohol etc. und man nennt diese auch **tropfbare** Flüssigkeiten, weil sie unter gewissen Umständen als Tropfen erscheinen können. Flüssigkeiten der zweiten Gattung sind die atmosphärische Luft und alle luftförmigen Körper oder Gase, wie Sauerstoff-, Stickstoff-, Wasserstoff-Gas etc.[1]).

Eine besondere Art elastischer Flüssigkeiten sind die, welche man **Dämpfe** nennt, deren Unterschied von den Gasen jedoch nur durch gewisse Grenzen der Temperatur und des äußeren Drucks bedingt wird.

In der Folge wählen wir als Repräsentant der tropfbaren Flüssigkeiten das Wasser und ebenso für die luftförmigen Flüssigkeiten die atmosphärische Luft.

---

oder von 14,7 Pfund auf ein Quadratzoll engl. (einer Atmosphäre) wird um Millionentheile des ursprünglichen Volumens zusammengedrückt:

·	Nach **Oerstedt** bei 3,75° C.	Nach **Colladon und Sturm** bei 10° C.	Nach **Aimé** bei 12,6° C.	Nach **Regnault und Grassi**	
				bei 0° C.	bei 53° C.
Quecksilber	2,65	5,03	4,0	3,0	
Wasser	46,77	50,50	50,2	50,0	44,0

Man sehe hierüber: Oerstedt in Poggend. Annalen Bd. 9, S. 603; Bd. 12, S. 158; Bd. 31, S. 362. Colladon und Sturm a. a. O. Bd. 12, S. 39. Aimé: Ebendaselbst. Zweiter Ergänzungsband S. 228. Regnault: Mémoires de l'Academie des Sciences. Tome XXI, Pg. 429. Paris, 1847. Grassi: Annal de chim. es et de phys. III. Sér. T. XXXI.

1) Die gasförmigen Körper lassen sich auch als solche bezeichnen, die weder eine selbstständige Gestalt, noch ein selbstständiges Volumen besitzen und sich durch jeden ihnen dargebotenen Raum verbreiten, bis sich ihnen ein äußeres Hinderniß entgegenstellt. In Folge ihres Expansionsvermögens können die Gase auch keine freie Oberfläche haben wie die tropfbar flüssigen Körper.

Nachdem man von Anfang dieses Jahrhunderts an gefunden hatte, verschiedene Gase tropfbar zu machen, z. B. kohlensaures Gas unter einem Drucke von 36 Atmosphären, salzsaures Gas unter dem Drucke von 50 Atmosphären u. s. w., gelang es doch erst am Schlusse des Jahres 1877, sowohl Cailletet in Paris als Pietet in Genf, auch die bis dahin noch als **permanent** betrachteten Gase, wie Sauerstoff und Wasserstoff, durch die combinirte Anwendung von **Druck** und **Kälte** tropfbar zu machen und zwar beispielsweise durch Pietet das Sauerstoffgas unter dem Drucke von 320 Atmosphären und bei 140° C. Kälte.

Man sehe hierüber u. A. die Beiblätter (Poggendorfs) Annalen der Physik und Chemie Band II (1878) S. 15 und S. 135.

Atmosphärische Luft (21 Maaßtheile Sauerstoff und 79 Maaßtheile Stickstoff) will schon 1826 Perkins (Phil. Trans. 1826. III. 541) unter dem Drucke von 1200 Atmosphären tropfbar flüssig gemacht haben; allein seine Angaben waren nicht über allen Zweifel erhaben: Neuerdings soll Cailletet tropfbare atmosphärische Luft schon bei einer Pressung von 200 Atmosphären erhalten haben. Man sehe hierüber u. A. die englische „Zeitschrift Engineering“ vom 26. April 1878, Pg. 325 unter der Ueberschrift: „Liquefaction of Gases“.

§. 3.

Die Wissenschaft, welche untersucht, inwiefern Kräfte, die auf flüssige Körper einwirken, denselben Gleichgewicht oder Bewegung zu ertheilen vermögen, wird Mechanik flüssiger Körper (Hydromechanik) genannt. Hiernach und mit Berücksichtigung der vorher bemerkten zwei Flüssigkeitsformen, ergiebt sich die Eintheilung der Hydromechanik von selbst, nämlich in Hydrostatik, Aerostatik, Hydrodynamik und Aerodynamik. Letztere beiden faßt man auch unter dem gemeinschaftlichen Namen Hydraulik zusammen.

§. 4.

Geschichtliche Notizen.

Die allerältesten Untersuchungen im Gebiete der Mechanik flüssiger Körper betrafen einzig und allein deren Gleichgewicht (die Hydrostatik) und zwar ist es Archimedes[1]), dem wir die ersten Principien hierüber verdanken. Dieser ausgezeichnete Mathematiker, der als Begründer der antiken, streng wissenschaftlichen Statik überhaupt betrachtet werden muß, behandelte insbesondere das Gleichgewicht fester auf dem Wasser schwimmender Körper[2]) und zwar in einer Weise, daß spätere Mathematiker verhältnißmäßig nur wenig beizufügen im Stande waren[3]).

Der für Cultur, Kunst und Wissenschaft gleich traurige Zustand, in welchen bald nach Archimedes die damalige civilisirte Welt versetzt wurde, und die fast 2000jährige Dauer desselben war auch für die Hydrostatik die Ursache, daß man sich bis zum Ende des 16. Jahrhunderts mit den Sätzen des Archimedes begnügte.

Vornämlich unbekannt, obwohl naheliegend, waren die Gesetze geblieben, nach welchen Flüssigkeiten auf Böden und Wände drücken, in denen sie enthalten sind.

Der niederländische Mathematiker Stevin[4]), überhaupt einer der würdigsten Vertreter der neuen wissenschaftlichen Mechanik, war der

---

[1]) Archimedes wurde um das Jahr 287 vor Chr. Geb. zu Syrakus geboren und 212 vor Chr. Geb. bei der Einnahme seiner Vaterstadt durch den römischen Feldherrn Marcellus, von einem Soldaten, getödtet.

[2]) Die hydrostatische Arbeit des Archimedes hat das Schicksal gehabt, nicht in der griechischen Ursprache, sondern durch arabische Vermittlung und zwar in einer höchst defecten Gestalt auf uns zu gelangen. Dühring (Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Zweite Auflage, S. 87) citirt eine lateinische Uebersetzung, aus zwei Büchern bestehend, von Commandinus, welche betitelt ist: „De iis quae vehuntur in aqua“ und 1565 erschienen sein soll. An anderer Stelle (Gehler's Physikalisches Wörterbuch, Ausgabe von 1789, Theil II, S. 660) werden diese zwei Bücher des Archimedes von den schwimmenden Körpern und zwar 1615 in Paris erschienen, unter dem Titel aufgeführt: „De insidentibus humido“.

[3]) Lagrange in der Mécanique analytique, 2. Ausgabe, 1811, Bd. 1, Lect. VI, Art. I.

[4]) Stevin wurde 1548 zu Brügge geboren und starb 1620 zu Haag. Dem Verfasser liegt über sein Leben und Wirken speciell ein Buch des Professors Steichen in Brüssel vor, welches betitelt ist „Mémoire sur la Vie et les Travaux de Simon Stevin“ und 1846 in Brüssel bei Van Dale erschien.

Erste, welcher sich um diesen Theil der Hydrostatik wesentliche Verdienste erwarb. In seiner Schrift „Principien der Statik und Hydrostatik“ (Leyden 1586)[1]) entwickelte er aus den Sätzen des Archimedes nicht nur das sogenannte hydrostatische Paradoxon (mit welchem Namen man den Satz belegte, daß Flüssigkeiten einen viel größeren Druck als ihr eignes Gewicht auf die Böden der Gefäße ausüben könnten), sondern bestimmte namentlich auch den Druck der Flüssigkeiten auf verticale und geneigte Seitenwände[2]).

Der scharfsinnige, um Physik, Mathematik und Astronomie hochverdiente Italiener Galilei[3]), der Verbesserer der Statik und Schöpfer der Dynamik, wandte zur wissenschaftlichen Herleitung der hydrostatischen Gesetze zuerst eine dem heutigen Principe der virtuellen Geschwindigkeit ähnliche Methode an, wobei man (später) jedoch noch Mancherlei auszusetzen hatte[4]). In letzterer Beziehung noch glücklicher war der geistreiche französische Geometer Pascal[5]), welcher das genannte Princip namentlich zum Beweise des Satzes anwandte, daß ein an einem Punkte der Oberfläche einer flüssigen Masse ausgeübter Druck sich gleichmässig nach allen anderen Punkten der Flüssigkeit verbreitet, wofern diese nicht auszuweichen im Stande ist.

Hiernach müßte also eine Flüssigkeit im Gleichgewicht bleiben, welche ein Gefäß ganz ausfüllt, in dem man geeignete Oeffnungen anbrachte, diese Oeffnungen durch Kolben verschloß und gegen letztere Kräfte wirken ließ, die sich gerade wie die Querschnitte dieser Kolben verhielten. (Man sehe hierzu die bildliche Darstellung in der nachher folgenden Figur 1)[6]). Nachdem Pascal die Principien des Gleichgewichts flüssiger Körper vollständig festgestellt hatte, bemühte man sich, von da ab, die Grenzen dieser Wissenschaft immer mehr und mehr zu erweitern und die betreffenden Untersuchungen namentlich auch auf ungleichartige Flüssigkeiten auszudehnen, wenn auf diese beliebige

---

[1]) Eine Sammlung der Stevinschen literarischen Arbeiten erschien von 1605 bis 1608 in Leiden, in 2 Foliobänden, unter dem Titel: „Wiskonstighe Gedachtnissen.“ Witlebord Snellius hat den größten Theil derselben in die lateinische Sprache übersetzt, während Alb. Girard eine französische Uebersetzung besorgte.

[2]) Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Zweite Auflage, Seite 89.

[3]) Galilei oder eigentlich Galileo ward geboren am 15. Februar 1564 zu Pisa und starb 1642 (Geburtsjahr Newton's) den 8. Januar im 78. Jahre seines Alters zu Florenz.

[4]) Dühring a. a. O. S. 91.

[5]) Pascal, geb. am 19. Juni 1623 zu Clermont-Ferrand in der Auvergne, gestorben am 29. August 1662 in Paris.

[6]) In der Traité de l'équilibre des liqueurs etc. betitelten Abhandlung, welche 1663, d. h. ein Jahr nach Pascal's Tode herausgegeben wurde, wird jede Flüssigkeit, die sich in einem Gefäß befindet, als eine Maschine betrachtet, welche in ähnlicher Weise, wie der Hebel und die anderen sogenannten einfachen Maschinen, die gegenseitige Wirksamkeit der angreifenden Kräfte reget und für deren Gleichgewicht bestimmte Verhältnisse vorschreibt. Auf der Grundlage dieser Anschauung wird das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten sogar zur Erläuterung des gleichen Drucks gebraucht, der auf jeden Theil der die Wandungsausschnitte ersetzenden Stempel gerichtet ist.

Kräfte wirken. Hierzu gaben insbesondere die wichtigen Capitel von der Gestalt der Erde und die Erklärung der Ebbe und Fluth als Probleme der Hydrostatik directe Veranlassung. Indem sich die ausgezeichnetsten Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts mit der Auflösung dieser speciellen Fragen beschäftigten, brachten sie dadurch die wissenschaftliche Hydrostatik in die vollendete Form, in welcher wir sie heute vor uns erblicken.

Insbesondere waren es zuerst Huyghens[1]), Newton[2]), Bouguer[3]) und Daniel Bernoulli[4]), welche sich hierbei zugleich um die Mechanik flüssiger Körper überhaupt verdient machten. Die vollständigsten Arbeiten lieferten jedoch erst Maclaurin[5]) (Treatise on Fluxions, Tome II, Cap. XIV) und Clairault[6]) (Theorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrostatique, 1743). Während Maclaurin's betreffendes Werk als ein Meisterstück der Synthesis betrachtet wird, zeigte Clairault die außerordentliche Macht der Analysis und entwickelte zuerst die partiellen Differentialgleichungen, durch welche man die Gesetze des Gleichgewichts einer flüssigen Masse ausdrücken kann, wenn auf ihre Theile beliebige Kräfte wirken.

Dem größten und fruchtbarsten Mathematiker seiner Zeit, Leonhard Euler[7]), gelang es später, die Clairaultschen partiellen Differentialgleichungen auf eine bei Weitem einfachere Art abzuleiten und sie in die höchst elegante Form zu bringen, in der wir sie heute zur Beantwortung der wissenschaftlichen Gleichgewichtsfragen flüssiger Körper anwenden[8]).

Nach Euler haben Lagrange[9]) (Mécanique analytique. Erste Ausgabe 1788. Zweite Ausgabe 1811) und Laplace[10]) (Mécanique céleste, 1799) die Hydrostatik allein auf die vollkommene Beweglichkeit der kleinsten Flüssigkeitstheilchen gegründet und sodann die betreffenden Entwickelungen mit alleiniger Zuziehung des Princips der virtuellen Geschwindigkeit ausgeführt. Die citirten Werke beider großen Meister sind auch für die Mechanik flüssiger Körper als die vollendetsten

---

[1]) Huyghens, geboren den 14. April 1629 in Haag; gestorben den 8. Juni 1695 ebendaselbst.

[2]) Newton, geboren den 5. Januar 1643 in Whoolsthorpe (Lincolnshire); gestorben den 31. März 1727 in London.

[3]) Bouguer, geboren den 16. Februar 1698 in Croisic (Nieder-Bretagne); gestorben in Paris den 15. August 1758.

[4]) Daniel Bernoulli, geboren den 9. Februar 1700 in Gröningen; gestorben den 17. März 1783 in Basel.

[5]) Maclaurin, geboren im Februar 1698 in Kilmoddan bei Inverary; gestorben den 14. Juni 1746 in York.

[6]) Clairault, geboren den 13. Mai 1713 in Paris; gestorben den 17. Mai 1765 ebendaselbst.

[7]) Euler, geboren den 15. April 1707 in Basel; gestorben den 18. Sept. 1783 in St. Petersburg.

[8]) Man sehe hierüber den folgenden Paragraph 7.

[9]) Lagrange, geboren den 25. Januar 1736 in Turin (aus einer seit 1672 daselbst ansässigen französischen Familie); gestorben den 10. April 1813 in Paris.

[10]) Laplace, geboren den 28. März 1749 in Beaumont-en-Auge (Dép. Calvados); gestorben den 5. März 1827 in Paris.

Muster analytischer Schärfe und Allgemeinheit zu betrachten, so daß sie wohl für alle Zeiten (wahrscheinlich) die Schlußsteine der gesammten wissenschaftlichen Mechanik bilden.

Daß man sich nach einer derartigen Gestaltung der Mechanik flüssiger Körper auch an die Auflösung der schwersten Probleme der Hydrostatik (mit Einführung anderer entsprechender Hypothesen) wagte, zeigt insbesondere die Capillaritätsfrage [1]), von welcher noch Daniel Bernoulli bemerkte, daß er sie auf kein allgemeines Gesetz zurückführen könne. Dieser wichtige Gegenstand fand nachher, insbesondre durch die Arbeiten von Laplace, Young [2]), Gauß [3]), Poisson [4]), Hagen [5]) u. A. seine Erledigung [6]).

---

1) Unter Capillarität versteht man das Heben oder Senken des Wasser- oder Quecksilberspiegels in engen Röhren oder zwischen sehr nahestehenden Wänden.

2) Thomas Young, geboren zu Milverton (Somersetshire) den 13. Juni 1773; gestorben den 10. Mai 1829 in London.

3) Carl Friedrich Gauß, geboren den 30. April 1777 in Braunschweig; gestorben den 23. Februar 1855 in Göttingen.

4) Poisson, geboren den 21. Juni 1781 in Pithiviers (Dép. Loiret); gestorben den 25. April 1840 in Paris.

5) Hagen, geboren den 3. März 1797 in Königsberg (Preussen).

6) Ausführlichere Literatur über das Kapitel „Capillarität" liefert namentlich Wülbern in seinem „Lehrbuche der Experimentalphysik" (Dritte Ausgabe) von §. 74 an unter der Ueberschrift: „Molekularwirkungen zwischen flüssigen und festen Körpern". Als Ergänzung hierzu möchte der Verfasser, insbesondere zum Studium für Anfänger, noch auf Jamin's „Cours de Physique de l'école polytechnique", Paris 1858, aufmerksam machen, woselbst der Abschnitt „De la Capillarité" die Treizième Leçon bildet.

Erste Abtheilung.

H y d r o s t a t i k.

Erstes Capitel.

§. 5.

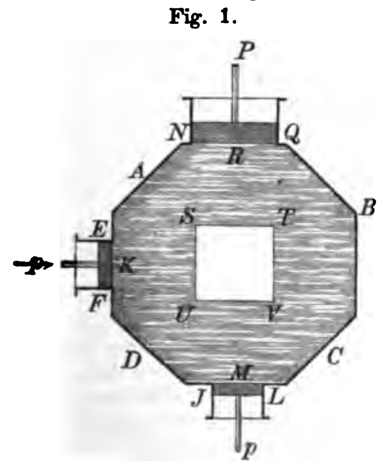
P a s c a l's G e s e t z.

Wäre uns Gestalt, Größe und Verbindungsart der Theile flüssiger Körper bekannt, so ist es wenigstens wahrscheinlich, daß sich die Gesetze des Gleichgewichts derselben aus jenen ableiten lassen würden, welche für feste Körper gefunden worden sind. Da dies jedoch (bis jetzt) nicht der Fall ist, so sind wir genöthigt, eine charakteristische Eigenschaft der flüssigen Körper aufzusuchen und solche als Grundgesetz zur Ableitung der Lehren des Gleichgewichts zu benutzen. Eine solche folgt aber unmittelbar aus der leichten Verschiebbarkeit der Theile eines flüssigen Körpers, und man kann sie auf folgende Weise ausdrücken:

„W i r d a u f e i n e n f l ü s s i g e n K ö r p e r e i n D r u c k a u s g e ü b t, u n d b l e i b t e r s t e r e r d a b e i i m G l e i c h g e w i c h t, s o p f l a n z t s i c h d i e s e r D r u c k n a c h a l l e n R i c h t u n g e n d u r c h d i e f l ü s s i g e M a s s e g l e i c h f ö r m i g f o r t u n d j e d e s T h e i l c h e n d e r s e l b e n e r f ä h r t e i n e n g l e i c h e n D r u c k."

Zur Erläuterung dieses Satzes diene Nachstehendes.

Fig. 1.



Damit vorerst der gemachten Voraussetzung entsprochen werde, daß nämlich der flüssige Körper während des auf ihn einwirkenden Drucks im Gleichgewicht verbleibt, denken wir uns die Flüssigkeit in einem (beliebigen) Gefäße befindlich, welches sie ganz ausfüllt und wovon *ABCD* Fig. 1 den Horizontal-Durchschnitt darstellen mag. Die röhrenförmige Mündung *EF* dieses Gefäßes sei durch einen verschiebbaren Kolben *K* gehörig dicht verschlossen, und die Flüssigkeit reiche genau bis unter die Fläche dieses Kolbens. Ferner denken wir uns dabei die Flüssigkeit als gewichtslos, sehen also von der

Wirkung der Schwerkraft, überdieß auch von allen sonst noch möglichen Kräften (und Widerständen) ab und nehmen nur an, daß von Außen gegen den Kolben K ein Normaldruck $= p$ ausgeübt wird.

Die in dem Grundsatze ausgesprochene Behauptung läßt sich nun auf den Druck anwenden, welchen jedes Stück der Gefäßwände, ferner jeder in der Flüssigkeit befindliche Körper, sowie jeder Theil der Flüssigkeit selbst erfährt.

Jedes Stück der Gefäßwand, wie C, D etc., wo solches auch liegen mag, dessen Größe dem Querschnitte des Kolbens K gleichkommt, erfährt nämlich nach Außen einen dem p gleichen Normaldruck, dem für's Gleichgewicht die Festigkeit des Gefäßes gehörigen Widerstand leisten muß[1]); oder wenn eine Stelle der Wandfläche, wie z. B. JL durch einen ebenfalls verschiebbaren Kolben M verschlossen wäre, so müßte, wenn ebenfalls Gleichgewicht stattfinden soll, gegen M ein von Außen nach Innen gerichteter Normaldruck angebracht werden, welcher dem auf den Kolben K wirkenden Drucke p völlig gleichkommt. -- Der gegen K ausgeübte Normaldruck wirkt nämlich hier nicht blos auf die in seiner geradlinigen Richtung liegenden Theile, wie solches bei festen Körpern der Fall sein würde, sondern er wird wegen der leichten Verschiebbarkeit der Flüssigkeitselemente auch unverändert denjenigen derselben mitgetheilt, welche seitwärts des Kolbens K liegen. — Wieviel aber auch dem Kolben K an Querschnitt gleiche verschiebbare Kolben M vorhanden sein mögen, jeder derselben müßte für den Zustand des Gleichgewichts durch einen Gegendruck gehalten werden, welcher dem gegen K ausgeübten Drucke gleich ist. Demnach ist aber jeder von diesen Drücken so anzusehen, als hielte er allen übrigen das Gleichgewicht; auch erkennt man, daß der Abstand zwischen den einzelnen beweglichen Wandstücken oder Kolben nicht in Betracht gezogen zu werden braucht, vielmehr gleich Null gesetzt werden kann, weßhalb überhaupt folgt, daß der gegen einen Kolben K vom Querschnitte $= a$ ausgeübte Druck $= p$ dem auf einen Kolben vom Querschnitte R (in einem Rohre NQ) $= na$ wirkenden Drucke $= np$ das Gleichgewicht hält. Setzt man $na = A$, $np = P$, so ergiebt sich die Proportion:

$$p : P = a : A \text{ und hieraus}$$

$$\text{I.} \quad P = \frac{A}{a} p.$$

Den Normaldruck P kann man den fortgepflanzten Druck nennen, im Gegensatze des unmittelbaren p.

Dasselbe Verhalten wie die Gefäßwände zeigt auch jeder in der Flüssigkeit befindliche Körper, wie $STUV$, wobei für's Gleichgewicht nur wieder vorauszusetzen sein wird, daß derselbe gehörige

---

[1]) Es kann hier lediglich von einem Normaldrucke (rechtwinkeligem Drucke) gegen die Wandstücke die Rede sein, da nur ein solcher durch den Widerstand der Gefäßwände völlig aufgehoben wird; ein blos theilweises Aufheben müßte Kräfte übrig lassen, die eine neue Wirkung auf die Flüssigkeit und somit Bewegung, nicht aber Gleichgewicht hervorbringen würden.

Festigkeit besitzt, um nicht von dem auf ihn fortgepflanzten Drucke in einen kleineren Raum zusammengedrängt zu werden. Endlich gilt dasselbe auch für jedes Theilchen der Flüssigkeit selbst, indem man beispielsweise blos die Ausdehnungen ST und UV des vorgedachten Körpers klein genug zu denken braucht, um eine Ebene entstehen zu lassen, die man auch als Berührungsfläche von Flüssigkeitstheilchen selbst ansehen, und auf welche man das Vorhergehende unmittelbar anwenden kann.

Anmerkung. Bei Flüssigkeiten, die mehr Cohäsion besitzen als Wasser, und andere, die im Vorstehenden vorausgesetzt wurden, besonders aber bei denen, welche man gewöhnlich mit dem Namen „halbflüssige Körper" bezeichnet, findet der Satz der gleichförmigen Druckfortpflanzung mehr oder weniger unvollständig statt, wie wir später beim Boden- oder Seitendruck auf Wände besonders kennen lernen werden.

Höchst merkwürdig ist die bei den Vorarbeiten zum Baue der Menai-Röhrenbrücke in England gemachte Beobachtung, nach welcher Gußeisen, als auch andere Metalle, bei sehr hohen Drücken, ähnlich wie Flüssigkeiten, einen gleichen Druck nach jeder Richtung ausüben sollen, in welcher die Bewegung durch Widerstände verhindert wird.

Man sehe deshalb: Clark, The Tubular Bridges. Vol. I. p. 311.

§. 6.

Nach Gleichung I kann man eine Kraft beliebig verstärken, d. h. mit einem sehr geringen Drucke einen außerordentlich großen erzeugen, wenn man die gegebene Kraft $= p$ gegen einen Kolben vom Querschnitte $= a$ wirken und den erzeugten Druck durch eine Flüssigkeit auf einen zweiten, entsprechend größeren Kolben vom Querschnitte $= A$ fortpflanzen läßt. Daß indeß hierdurch an mechanischer Wirkung Nichts gewonnen wird, werden wir nachher besonders zeigen.

Auf diesem Satze beruht namentlich das Princip einer Maschine, die nach ihrem Erfinder Bramah'sche Presse[1]), auch hydrostatische oder hydraulische Presse genannt wird. Das Wesentlichste einer solchen Maschine zeigt Fig. 2 im Verticaldurchschnitte.

Im Allgemeinen besteht dieselbe aus zwei cylindrischen, gewöhnlich mit Wasser oder Oel gefüllten Gefäßen A und B von ungleichen Durchmessern, deren innere Räume durch ein Rohr C so mit einander verbunden sind, daß sie Gefäße bilden, wobei die Flüssigkeit ungehindert aus einem in das andere treten kann, und welche man communicirende Gefäße oder Röhren nennt. In jedem der Cylinder befindet sich ein verschiebbarer (vermöge einer sogenannten Liederung) gehörig dichtender Kolben. Durch eine Oeff-

---

[1]) Joseph Bramah, geb. 1748 (oder 1749) zu Stainsborough in Yorkshire, ursprünglich Kunsttischler, nachher berühmter Mechaniker und Ingenieur in London. Gest. daselbst 1827.

Das Geschichtliche der hydrostatischen oder hydraulichen Presse, begleitet von Abbildungen der ältesten Constructionsformen derselben, hat der Verfasser im 2. Bande seiner Allgem. Maschinenlehre (2. Auflage), S. 359 behandelt.

nung E gelangt das Wasser von unten in den kleinen Cylinder, und der Rücktritt wird durch ein in gedachter Oeffnung angebrachtes Ventil u verhindert. (Ueberhaupt gehört der kleine Kolben einer Druckpumpe an.) Durch das Niederdrücken des kleinen Kolbens wird das Wasser in den großen Cylinder getrieben und veranlaßt den darin befindlichen Kolben zum Aufsteigen. Damit ferner das einmal in den großen Cylinder gelangte Wasser nicht zurückfließen kann, ist bei v ein zweites Ventil (Sperrventil) angebracht. Gewöhnlich läßt man die gegen den kleinen Kolben wirkende Kraft an einem einarmigen Hebel GHI angreifen, dessen Drehpunkt hier bei G liegt.

Um sowohl zu großen Drücken vorzubeugen, welchen die Stärkenverhältnisse der Presse nicht widerstehen, vielmehr ein Zerstören derselben veranlassen könnten, also auch um die Größe des Druckes zu messen, welcher vom kleinen Kolben auf den großen übertragen wird, ist ein Sicherheitsventil x angebracht etc.

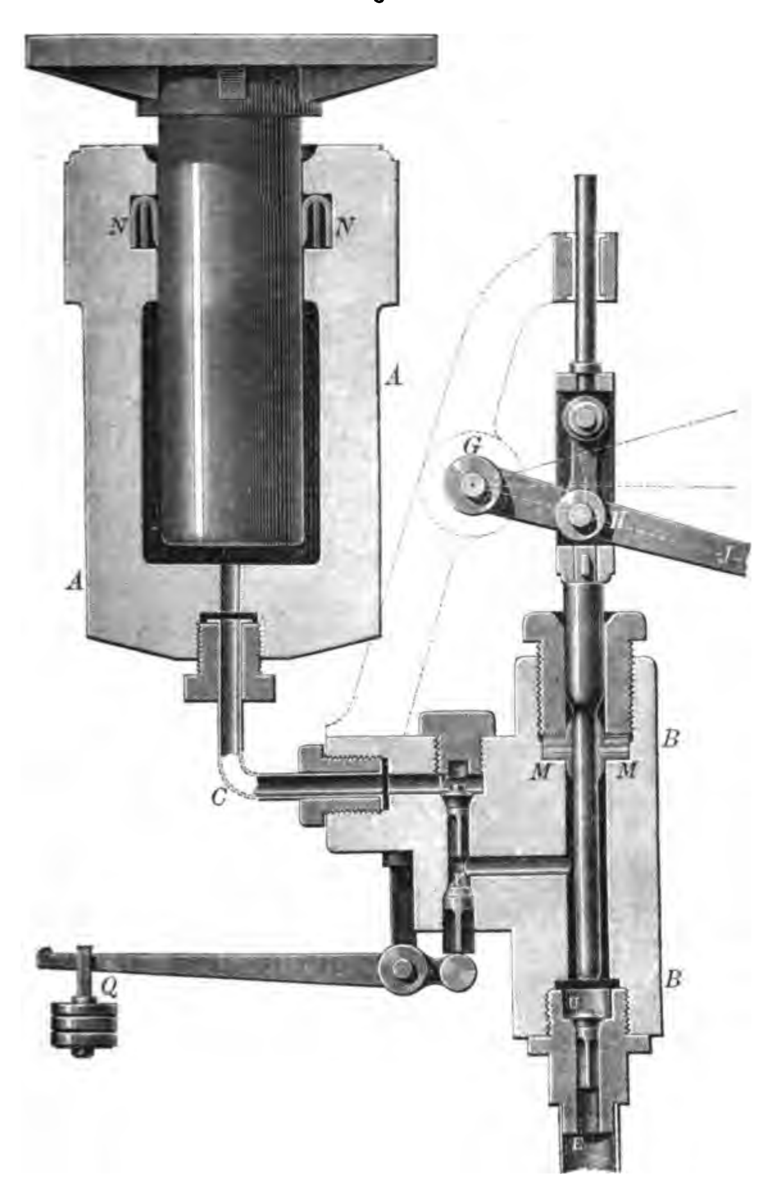
Zur Berechnung des auf den großen oder Preßkolben fortgepflanzten Druckes $= P$, sei p die unmittelbar gegen den kleinen Kolben wirkende Druckkraft, ferner mögen D und d die respectiven Durchmesser der Kolben bezeichen. Sodann erhält man nach I. §. 5, da hier $A = \frac{D^2\pi}{4}$, $a = \frac{d^2\pi}{4}$ ist, (1) $P = p\frac{D^2}{d^2}$.

Ist ferner die am Hebel bei J angreifende Kraft $= k$, ferner $GH = a$, $GJ = b$ gegeben, so folgt $p = k\frac{b}{a}$ und nach (1)

$$(2)\ P = k\frac{b}{a}\cdot\frac{D^2}{d^2}.$$

Hierbei ist jedoch von den stattfindenden Reibungen abgesehen. Läßt man den Widerstand unbeachtet, welcher durch das Anhängen etc. des Wassers an den Gefäßwänden, Durchgehen desselben durch Verengungen und Erweiterungen entsteht, so ist es namentlich die an den Liederungen M und N der beiden Kolben entstehende Reibung, welche in Betracht gezogen werden muß. Die Größe derselben läßt sich folgendermaßen ermitteln. Es mögen H und h die Höhen jeder der Liederungen bezeichnen, so daß die Flächen, an welchen die Reibung stattfindet, respective $D\pi H$ und $d\pi h$ sind; ferner werde angenommen, daß das Wasser selbst die Liederungen gegen die Kolben preßt. Sodann stelle x den Theil von p dar, welcher wirklich auf die Flüssigkeit übertragen wurde, so daß der Druck auf die Fläscheneinheit: $\frac{4x}{d^2\pi}$, mithin der Druck auf die Liederung des kleinen Kolbens: $\frac{4x}{d^2\pi}.d\pi h = 4x.\frac{h}{d}$, und auf die des großen Kolbens: $\frac{4x}{d^2\pi}.D\pi h = 4x\frac{D}{d^2}H$. Bezeichnet nun f den Reibungscoefficienten für beide Kolben, so ist der Druck pro Flächeneinheit, welcher fortgepflanzt wird: (3) $\frac{4p}{d^2\pi\left(1+4f\frac{h}{d}\right)}$ und

Fig. 2.



mithin die Reibung, welche der große Kolben erfährt, indem man letzteren Werth mit $f\pi DH$ multiplicirt:

$$(4)\quad \frac{4fp\pi DH}{d^2\pi\left(1+4f\frac{h}{d}\right)} = 4fk\frac{b}{a}\frac{DH}{d^2\left(1+4f\frac{h}{d}\right)}.$$

Hiernach ist aber der resultirende Druck $= P$, welcher von der Preßplatte ausgeübt wird:

$$P = \frac{D^2\pi}{4}\cdot\frac{4p}{d^2\pi\left(1+4f\frac{h}{d}\right)} - 4fp\frac{DH}{d^2\left(1+4f\frac{h}{d}\right)},$$

folglich nach gehöriger Zusammenziehung und wenn man zugleich für p wiederum $p = k\frac{b}{a}$ substituirt:

$$\text{I.}\quad P = k\frac{b}{a}\frac{D^2}{d^2}\frac{1-4f\frac{H}{D}}{1+4f\frac{h}{d}}.$$

Demnach wird der von einer hydraulischen Presse ausgeübte (Nutz-) Druck um so größer je niedriger die Liederungen der betreffenden Kolben sind[1]). Den Reibungscoefficienten f wird man, bei der Unbestimmtheit der Morin'schen Angaben, allerhöchstens zu $\frac{1}{8}$ annehmen können.

Unter Annahme des letzteren Werthes wird:

$$P = 0{,}875.k\frac{b}{a}\frac{D^2}{d^2},\ \text{wenn}\ \frac{h}{d} = \frac{H}{D} = 0{,}1\ \text{ist},$$

$$P = 0{,}765.k\frac{b}{a}\frac{D^2}{d^2},\ \text{wenn}\ \frac{h}{d} = \frac{H}{D} = 0{,}2,$$

woraus zugleich folgt, daß hier die Reibungsverluste immerhin geringer wie bei Schraubenpressen sind[2]).

Ist w die Weglänge, welche der Angriffspunkt der Kraft k im Sinne ihrer Richtung bei jedem Hube durchläuft, so wird die in derselben Zeit aus dem kleinen Cylinder weggedrückte Wassermenge betragen: $\frac{wa}{a}\cdot\frac{d^2\pi}{4}$. Bezeichnet man ferner den entsprechenden Weg des großen Kolbens (per Hub) mit W, so ist offenbar $\frac{wa}{b}\cdot\frac{d^2\pi}{4} = W\frac{D^2\pi}{4}$, also

$$\text{II.}\quad W = w\frac{a}{b}\cdot\frac{d^2}{D^2}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit (2), so folgt endlich

$$\text{III.}\quad PW = kw,$$

woraus, wie überhaupt bei Maschinen[3]) hervorgeht, daß ein Gewinn

[1]) Hieraus erklärt sich der Vortheil der bekannten (Reichenbach-Henschelschen) Liederung, welche aus einfachen Lederringen besteht, die in entsprechenden Nuthen des Kolbens Platz finden. Man sehe hierüber u. A. die Allgemeine Maschinenlehre des Verfassers, Band I (Zweite Auflage), Seite 443, Note 1.

[2]) Man sehe deshalb u. A. des Verfassers „Grundzüge der Mechanik", S. 275 ff.

[3]) „Grundzüge der Mechanik", S. 174.

an mechanischer Arbeit durch die hydraulische Presse nicht zu bewirken ist.

Wichtig dürfte noch sein aufmerksam zu machen, daß der durch das Sicherheitsventil angegebene Druck nicht der Nutzdruck P, sondern ein größerer ist, welcher nach (3) pr. Flächeneinheit (5) $\frac{4kb}{a\pi d^2} \frac{1}{\left(1 + 4f\frac{h}{d}\right)}$ beträgt, ein Umstand, der bei mehreren mir bekannten Versuchen mit der hydraulischen Presse übersehen worden ist. Endlich werde noch erwähnt, daß man nicht gern höhere Drücke als 3 Tonnen engl. (à 2240 ℔) pr. Quadratzoll engl. eintreten läßt (Clark's Britannia-Röhren-Brücke. S. 621).

Beispiel. Wie groß ist der resultirende Druck auf der Preßplatte einer hydraulischen Presse und innerhalb welcher Zeit steigt der Preßkolben auf 1 Centimeter (= 1 cm) Höhe, wenn $D = 30$ cm, $d = 3$ cm, $\frac{b}{a} = \frac{10}{1}$; $\frac{h}{d} = \frac{1}{4}$; $\frac{H}{D} = \frac{1}{8}$, $f = \frac{1}{6}$ ist, ferner $k = 2.15 = 30$ Kilogramm (zwei Arbeiter), die Hubhöhe wie Geschwindigkeit der Arbeiter = 75 cm pr. Sec. beträgt.

Auflösung. Zuerst ist nach I: $P = 0,786 . 30000 = 23580$ Kilogr. Sodann ist

$$W = 75 \cdot \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{9}{900} = 0,075 \text{ cm}.$$

Der Nutzeffekt folglich reichlich 76 %. Es ist aber ferner die Zeit eines Hubes $= \frac{2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = 1$ Secunde, die Zeit eines Auf- und Abganges (Doppelhubes) also 2 Secunden und mithin die Zeit $= t$ um die Preßplatte (den grossen Kolben) um 1 cm zu heben:

$$t = \frac{2}{0,075} = 26,66 \text{ Secunden.}$$

Der Druck auf die Flächeneinheit des Sicherheitsventiles x beträgt nach (5): $x = \frac{4}{\pi} . \frac{10}{1} . \frac{30}{9} \left\{ \frac{1}{1 + 4 . \frac{1}{6} . \frac{1}{4}} \right\} = 36,37$ Kilogr. pr. Quadrat-Centimeter.

Zusatz. Eine eigenthümliche, höchst nützliche Art hydraulischer Pressen bilden die 1846 zuerst von Armstrong construirten und in Anwendung gebrachten sogenannten Accumulatoren (Kraftsammler, Kraftaufspeicher), womit ein künstliches Wassergefälle, eine künstliche Druckwassersäule erzeugt und dadurch sehr bedeutende Gewichte gehoben werden können. Man speichert damit Betriebskräfte für Heb- und andere Arbeits-Maschinen auf, die für intermittirende Bewegungen entsprechend zu verwenden sind [1]).

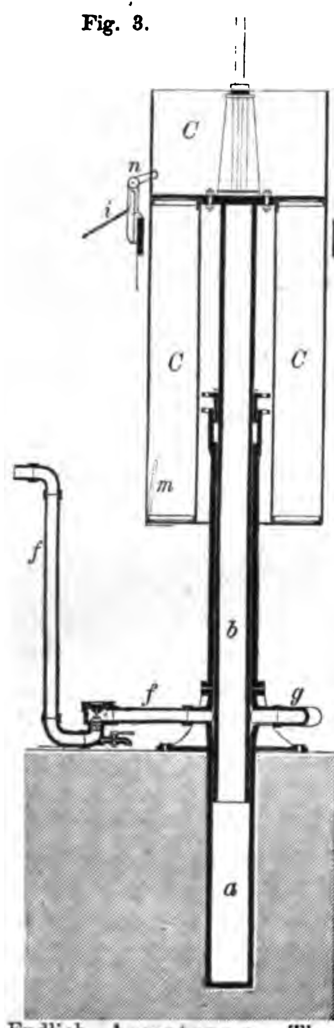
Fig. 3 ist die Copie eines Accumulators, welcher bei der steuerfreien Niederlage in Harburg mit großem Erfolge zum Betriebe von hydraulischen Winden und Krahnen [2]) benutzt wird.

---

[1]) Des Verfassers „Allgemeine Maschinenlehre". Bd. 1, S. 448 (2. Auflage), Bd. 2, S. 338 und Bd. 4, S. 335.

[2]) Bei den Harburger Accumulatoren haben die Kolben a einen Durchmesser von 10 Zoll englisch (254 mm) und 12 Fuß (3,66 m) Hub, während die Belastungsgewichte etwa 16000 Kilogr. betragen. Armstrong hielt es für ange-

Fig. 3.



Hierbei ist *a* der Cylinder des Accumulators und *b* dessen Kolben, welcher mit einem durch schwere Materialien gefüllten Behälter *C C* belastet ist, der sich in gehörigen Führungen seitlich verschiebt, um Schwankungen zu vermeiden. Das erforderliche Speisewasser wird, von einer geeigneten Dampf-Pumpe, im Rohre *f* zugeführt und im Rohre *g* erforderlichen Falles zu den Betriebsmaschinen geleitet. Ein Knaggen *m* am Accumulator und ein Apparat *ni* dienen dazu, die Dampfpumpe selbstthätig in Ruhe zu setzen, wenn genug Wasservorrath vorhanden ist, oder auch die gedachte Pumpe wieder selbstthätig in Gang zu bringen, wenn der Accumulator seinen Niedergang beginnt.

Specielles über Accumulatoren und deren Verwendung findet sich in nachbemerkten Schriften: Welkner in der Zeitschrift des Hannov. Archit. und Ingen.-Vereins, Jahrg. 1860 (Bd. IV), S. 448; hier werden besonders die Accumulatoren der steuerfreien Niederlage zu Harburg besprochen. Welkner, Ebendaselbst, Jahrg. 1877 (Bd. XII), S. 319 ff. (Seehafen etc. zu Geestemünde). Armstrong „Water Pressure Machinery" in der Institution of Mechanical Engineers. Proceedings. 1868, Pg. 21 etc. Werner „Die Anwendung stark gepresster Wässer nach Armstrong's System zur Kraftübertragung auf unterirdische Wassersäulenmaschinen". Zeitschrift für Berg-, Hütten- und Salinenwesen im preußischen Staate. Bd. XIV, S. 77. Hieraus in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XI. Endlich Armstrong „The History of the modern Developement of Water Pressure Machinery" in den „Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers". Vol. L (1877), Pg. 64 ff.

[§. 7.]

Mit Hülfe der Differenzialrechnung läßt sich (nach Euler)[1]) für das

---

messen, keine höhere Pressung im Accumulator, als die anzuwenden, welche einer Wassersäule von 1500 Fuß englisch oder von 457,5 Meter, also einem Drucke von circa 45 Atmosphären entspricht.

[1]) Mémoiren der Berliner Academie der Wissenschaften vom Jahre 1755.

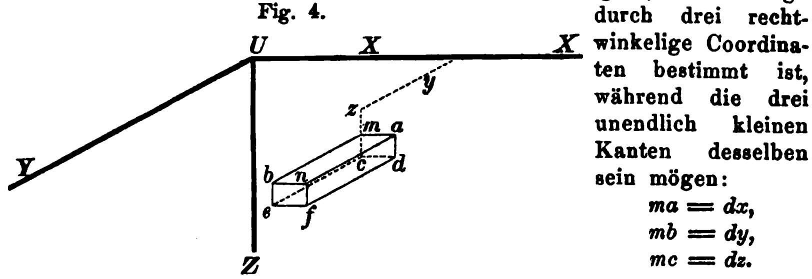
Brandes „Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper". Nach Leonhard Euler's Abhandlungen in den Neuen Commentarien der Petersburger Academie übersetzt. Leipzig 1806, Seite 32 ff.

Gleichgewicht flüssiger Körper eine allgemeine Gleichung aufstellen, indem man sich mit der analytischen Auflösung folgender Aufgabe beschäftigt:

„Wenn irgend eine flüssige Masse der Einwirkung beliebiger accelerirender Kräfte unterworfen ist, die Bedingung anzugeben, unter welcher Gleichgewicht statt findet."

Hierzu denken wir uns zunächst ein unendlich kleines Element der flüssigen Masse von parallelepipedischer Gestalt, Fig. 4, dessen Lage durch drei rechtwinkelige Coordinaten bestimmt ist, während die drei unendlich kleinen Kanten desselben sein mögen:

Fig. 4.



$$ma = dx,$$
$$mb = dy,$$
$$mc = dz.$$

Der körperliche Inhalt dieses Elementes wird sodann dargestellt durch $dx\,dy\,dz$, so wie seine Masse dm, wenn γ die gleichförmige Dichtigkeit der Flüssigkeit und g die Erdacceleration bezeichnet, durch

$$(1)\quad dm = \frac{\gamma}{g}\,dx\,dy\,dz.$$

Wie nun auch immer die accelerirenden Kräfte beschaffen sein mögen, welche in m auf das Flüssigkeitselement wirken, in jedem Falle wird man sie sämmtlich nach drei auf einander rechtwinkeligen Richtungen parallel den drei Coordinatenachsen UX, UY, UZ zerlegen können. Bezeichnen daher X, Y und Z die den drei Achsen parallelen Composantensummen der Accelerationen, welche den gegebenen Kräften entsprechen, so hat man

$$(2)\left\{\begin{aligned} dm\,X &= \frac{\gamma}{g}\,dx\,dy\,dz\,.\,X;\\ dm\,Y &= \frac{\gamma}{g}\,dx\,dy\,dz\,.\,Y;\\ dm\,Z &= \frac{\gamma}{g}\,dx\,dy\,dz\,.\,Z.\end{aligned}\right.$$

Jede der vier Größen γ, X, Y und Z wird dabei als Funktion der drei Variabeln x, y und z betrachtet.

Unter Voraussetzung fortdauernden Gleichgewichts muß aber die Wirkung dieser bewegenden Kräfte durch den Druck aufgehoben werden, welchen das Parallelepiped mf von allen Seiten erleidet. Dieser Druck im Punkte m werde nur durch die Größe p dargestellt, welche gleichfalls Funktion von x, y und z ist und deren totales Differenzial bekanntermaßen ist:

$$(3)\quad dp = \left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(\frac{dp}{dy}\right)dy + \left(\frac{dp}{dz}\right)dz.$$

Dieser unbestimmte Ausdruck kann nun auf nachstehende Weise in einen bestimmten verwandelt werden. Der Druck auf die Fläche $nmab$ läßt sich darstellen durch $p \,.\, dx dy$. In Bezug auf die gegenüberliegende Fläche $cdef$ bemerke man, daß der Druck auf die Einheit dieser Fläche um so viel größer (oder kleiner) geworden sein muß, als sich p in Bezug auf z geändert hat, weil beim Uebergange von m nach c die Coordinaten x und y unverändert geblieben sind. Hiernach wird aber der Druck auf $cdef$ darzustellen sein durch $dx\,dy \left[p + \left(\frac{dp}{dy}\right) dz\right]$, der resultirende Druck parallel der Achse UZ also durch:

$$dx\,dy\,dz \left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Soll nun im Sinne der Achse Z keine Bewegung erfolgen, so erhält man mit Bezug auf (2) als Bedingungsgleichung:

$$dx\,dy\,dz \left(\frac{dp}{dz}\right) = \frac{\gamma}{g} dx\,dy\,dz \,.\, Z, \text{ d. i.}$$

$$(4) \quad \frac{dp}{dz} = \frac{\gamma}{g} \,.\, Z.$$

Wegen des Satzes von der gleichförmigen Druckfortpflanzung etc. wird man die Drücke auf die Einheiten der Flächen $mceb$ und $mcda$ ebenfalls $= p$ annehmen können und überhaupt wie vorher als Gleichgewichtsbedingung im Sinne der Achsenrichtungen Y und X erhalten:

$$(5) \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{\gamma}{g} Y; \quad (6) \quad \left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{\gamma}{g} X.$$

Jetzt (4) bis mit (6) in (3) substituirt giebt endlich die gesuchte Bedingungsgleichung zu:

$$\text{I.} \quad dp = \frac{\gamma}{g} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Die Existenz des Gleichgewichts einer Flüssigkeit hängt also von dem Bestehen dieser Gleichung ab, d. h. es findet Gleichgewicht statt, wenn der rechte Theil integrirbar ist, was immer der Fall sein wird, wenn derselbe ein vollständiges Differenzial einer Funktion dreier unabhängiger Variabeln ist[1]). In der Hydrostatik setzen wir γ immer als unabhängig vom Drucke p voraus, also für dieselbe Flüssigkeit constant.

Zusatz 1. An den Stellen, woselbst sich die Flüssigkeit an entsprechend feste Wände lehnt, wird der Druck p offenbar vernichtet. Ueberall da, wo die Flüssigkeit mit Wänden nicht in Berührung ist, an der freien Oberfläche, muß jedoch p für den Gleichgewichtszustand an sich gleich Null sein, weil sonst nichts vorhanden ist, was diesen Druck aufzuheben vermöchte. Dasselbe gilt endlich auch, wenn p

---

[1]) Die analytische Bedingung der Integrirbarkeit ist bekanntlich: $\frac{d\gamma X}{dy} = \frac{d\gamma Y}{dx}$; $\frac{d\gamma X}{dz} = \frac{d\gamma Z}{dx}$; $\frac{d\gamma Y}{dz} = \frac{d\gamma Z}{dy}$. Oder wenn γ constant ist: $\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}$, $\frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}$, $\frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}$.

einen für die ganze Ausdehnung der Oberfläche constanten Druck repräsentirt. Die Gleichung

$$\text{II.} \quad 0 = Xdx + Ydy + Zdz$$

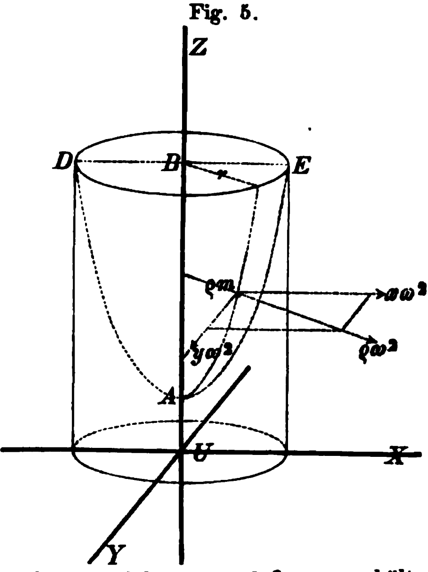
ist sonach das Differenzial der Coordinatengleichung der freien Oberfläche der ganzen Flüssigkeit.

Die Gleichung II entspricht überhaupt allen Flächen von gleichem Drucke, folglich auch noch allen Schichten im Innern der Flüssigkeit, in welchen der Druck überall derselbe ist und welche man auch Niveauschichten nennt. Die betreffenden Flächen unterscheiden sich dabei nur durch die Integralconstante von II, weil zwar der Druck für alle Punkte derselben constant, aber von Schicht zu Schicht veränderlich ist.

Zusatz 2. Aus der Gleichung II läßt sich auch noch der wichtige Satz ableiten, daß die Richtung der Resultirenden der auf eine Flüssigkeit mit freier Oberfläche wirkenden Kräfte auf der Tangente der krummen Linie, die man willkürlich auf der Oberfläche gezogen hat, rechtwinklig steht.

Zusatz 3. Um zugleich eine auch technisch nützliche Anwendung der Gleichung II nachzuweisen, wollen wir die Gestalt der freien Oberfläche des Wassers untersuchen, welches in einem cylindrischen Gefäße mit kreisförmiger Basis vom Halbmesser $= r$, Fig. 5, befindlich ist und mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine senkrechte Achse in Umdrehung versetzt wird. Die dabei auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte mögen allein Flieh- und Schwerkraft sein.

Fig. 5.



Nehmen wir die Achse Z als mit der Schwerkraftsrichtung zusammenfallend und zugleich als Drehachse an und ist ϱ die Entfernung für ein beliebiges Element dm der Flüssigkeit von dieser Achse, so ist die Fliehkraft desselben $= dm\varrho\omega^2$ und die Composanten parallel den Achsen Y und X sind respective $dmy\omega^2$ und $dmx\omega^2$.

Ueberhaupt ist daher in II zu setzen: $X = x\omega^2$, $Y = y\omega^2$ und $Z = -g$, wo g die Erdacceleration bezeichnet, so daß man erhält:

$$0 = \omega^2(xdx + ydy) - gdz, \text{ und}$$

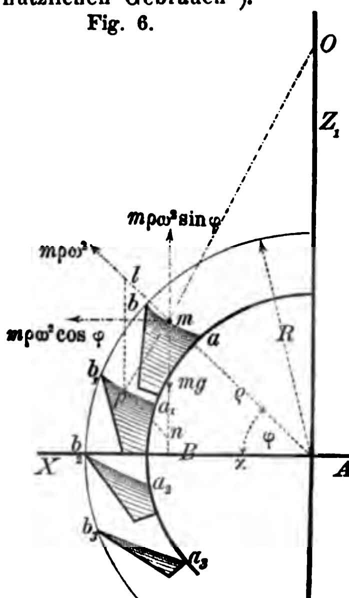
hieraus durch Integration:

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + C = \frac{\omega^2}{2g}\varrho^2 + C,$$

welches die Coordinatengleichung der Oberfläche eines Rotationsparaboloids ist. Für den Scheitel A ist $\varrho = 0$ und $z = AU = H$, folglich

$H = C$ und $z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + H$. Für die Punkte der größten Erhebung wird $\varrho = r$ und $z = UB = H + h$, also $H + h = \frac{r^2\omega^2}{2g} + H$, und die Tiefe AB des paraboloidischen Trichters $h = \frac{r^2\omega^2}{2g}$ etc. Von letzterem Werthe macht man bei der Theorie gewisser horizontaler Wasserräder nützlichen Gebrauch[1]).

Fig. 6.



Dreht sich das Gefäß (für unseren Zweck die mit Wasser gefüllte Zelle eines Wasserrades) Fig. 6 gleichförmig um eine horizontale, rechtwinklig auf der Bildfläche in A stehende Achse, so läßt sich die Gestalt der betreffenden Niveaufläche wie folgt ermitteln und damit zugleich der Ort bestimmen, wo das Wasser aus den Zellen auszufließen anfängt.

Hierzu sei R der äußere Radhalbmesser und m ein Element der Masse des Zellenwassers, in der Entfernung $= \varrho$ von der Drehachse A. Ferner sei φ der Winkel, welchen der Halbmesser mA mit der als Abszissenachse angenommenen Horizontalen AX bildet. Die Ordinatenachse AZ sei rechtwinklig auf AX.

Unter Beibehaltung der außerdem im vorigen Zusatze angenommenen Bezeichnungen, erhält man dann sofort:

$$X = \varrho\omega^2 \cos\varphi \text{ und } Z = \varrho\omega^2 \sin\varphi - g,$$

daher aus II für die betreffende Niveaufläche:

$$0 = \varrho\omega^2 dx \cos\varphi + \varrho\omega^2 dz \sin\varphi - g\,dz,$$

d. i., weil $\varrho\cos\varphi = \overline{AB} = x$ und $\varrho\sin\varphi = \overline{Bm} = z$ ist, auch

$$0 = \omega^2 x\,dx + \omega^2 z\,dz - g\,dz.$$

Aus letzterer Gleichung ergiebt sich aber durch Integration

$$\text{IV. } x^2 + z^2 - \frac{2g}{\omega^2} z = \text{Const.}$$

Hiernach bilden, in gegenwärtigem Falle, die Niveauflächen und demgemäß auch die Oberfläche des Wasser in den Zellen (ab,

---

[1]) Für ein gründlicheres und ausführlicheres Studium dieses ganzen Gegenstandes verdienen insbesondere empfohlen zu werden: die bereits vorher citirten Eulerschen Abhandlungen in den Neuen Commentarien der Petersburger Academie, wovon Prof. Brandes in Leipzig Uebersetzungen unter dem Seite 14 angegebenen Titel lieferte. Nächstdem ist zum (theoretischen) Studium zu rathen: Decher (Prof. in Augsburg), „Handbuch der rationellen Mechanik". Vierter Band (Mechanik flüssiger Systeme) S. 10 ff.

$a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ etc.) des Rades Fig. 6, Theile von concentrischen Kreiscylindern.

Addirt man zu beiden Seiten der Gleichung IV den Werth $\frac{g^2}{\omega^4}$, so ergiebt sich

$$x^2 + \left(z - \frac{g}{\omega^2}\right)^2 = \frac{g^2}{\omega^4} + \text{Const., oder}$$

wenn $\frac{g^2}{\omega^4} + \text{Const.} = a^2$ gesetzt wird:

$$\text{V.} \quad x^2 + \left(z - \frac{g}{\omega^2}\right)^2 = a^2.$$

Dies ist aber nichts anderes als die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunktscoordinaten $x_1 = \text{Null}$ und $z_1 = + \frac{g}{\omega^2}$ sind und dessen Halbmesser $a = \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4} + \text{Const.}}$ ist.

Die Achse der concentrischen Kreiscylinder, welche die Niveauflächen bilden, liegt also parallel der Drehachse des Gefäßes (parallel der Wasserradwelle) und zwar in der Höhe $\frac{g}{\omega^2}$ vertikal darüber.

Letzterer Werth läßt sich auch noch auf nachstehendem, einfachem Wege nachweisen.

Ein beliebiges Element m der Wassermasse unterliegt offenbar der Einwirkung zweier Kräfte, der Schwerkraft mg und der Fliehkraft $m\varrho\omega^2$. Stellt man diese Kräfte beziehungsweise durch die Linien $\overline{mn}$ und $\overline{ml}$ dar, so liefert das Parallelogramm $lmnp$ die betreffende Resultirende pm, welche gehörig verlängert, die Vertikale durch A in einem Punkte O schneidet. Der Ort von O wird aber durch die Proportion bestimmt:

$$\overline{AO} : \overline{Am} = \overline{mn} : \overline{ml}, \text{ d. i. durch } \overline{AO} : \varrho = mg : m\varrho\omega^2,$$

woraus richtig folgt:

$$\overline{AO} = \frac{g}{\omega^2}.$$

Zur Berechnung der wasserhaltenden Bögen vertikaler Wasserräder wurde letzterer Werth zuerst von Poncelet in Anwendung gebracht und zwar bereits 1832 in dessen (Lithographirtem) Werke: „Cours de mécanique appliquée aux machines“, Sect. VII Pg. 30. Noch vollständiger behandelte letztgedachte Frage der Bergrath und Professor Jenny im Berg- und Hüttenmännischen Jahrbuche der k. k. österr. Montananstalten etc. von 1862 (Bd. XI oder Bd. XIV der ganzen Reihe).

In Bezug auf die Constante vorstehender Gleichungen IV und V ist hier noch zu erwähnen, daß deren Werth vom Füllungsgrade und der Stellung der Schaufelzellen Fig. 6 abhängt und offenbar der Ausguß des Wassers aus den Zellen beginnt, wenn der Mantel des betreffenden Kreiscylinders die äußere Kante der correspondirenden Schaufel trifft.

Zum weiteren Studium des theoretischen Theiles der Sache ist namentlich noch folgendes Werk zu empfehlen: Decher a. a. O. Vierter Band, §. 25, S. 113—117.

Zweites Capitel.

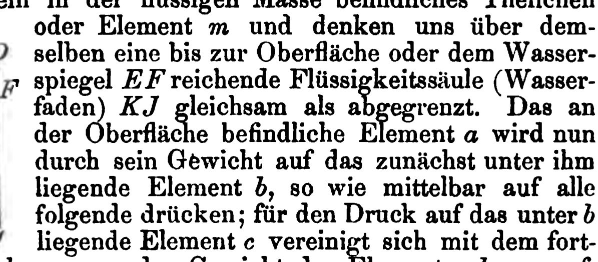
Gleichgewicht und Druck des Wassers in Gefäßen, wenn auf solches blos die Schwerkraft als wirksam gedacht wird.

§. 8.

Wirkt allein die Schwerkraft auf das in einem offenen Gefäße $ABCD$, Fig. 7, enthaltene Wasser, so entsteht ein vertikal abwärts gerichteter Druck, welcher sich zwar nach allen Seiten hin fortpflanzt, dessen Größe sich jedoch nach besonderen Gesetzen richtet, deren Aufsuchung im Nachstehenden geschehen soll.

Um zunächst ein Maaß für einen solchen Druck zu erhalten, betrachten wir ein in der flüssigen Masse befindliches Theilchen oder Element m und denken uns über demselben eine bis zur Oberfläche oder dem Wasserspiegel EF reichende Flüssigkeitssäule (Wasserfaden) KJ gleichsam als abgegrenzt. Das an der Oberfläche befindliche Element a wird nun durch sein Gewicht auf das zunächst unter ihm liegende Element b, so wie mittelbar auf alle folgende drücken; für den Druck auf das unter b liegende Element c vereinigt sich mit dem fortgepflanzten Drucke von a das Gewicht des Elementes b, u. s. f. für alle abwärts nach m hin liegende Elemente, so daß der Druck, welchen m erfährt, durch das Gewicht der Flüssigkeitssäule KJ gemessen wird.

Fig. 7.



Der Druck, welchen irgend ein Flüssigkeitselement erfährt, ist sonach um so größer, je tiefer dasselbe unter dem Wasserspiegel EF liegt, und in einer von letzterem überall gleichweit abstehenden Fläche der flüssigen Masse müssen gleiche Drücke stattfinden.

Hiernach läßt sich nun zeigen, daß für den Zustand des Gleichgewichtes der Wasserspiegel EF eine horizontale Ebene bilden muß. Angenommen, es wäre letzteres nicht der Fall, vielmehr habe die Oberfläche eine aus der Durchschnittsfigur 8 sich ergebende Gestalt, wobei einzelne Theile der Flüssigkeit höher als andere liegen. Durch den tiefsten Punkt C denke man sich eine horizontale Ebene MN geführt, und die darüber bei B und D befindlichen Flüssigkeitsmassen in Wassersäulen ab u. s. w. zerlegt. Jede solcher Wassersäulen übt nun einen nach allen Seiten hin gerichteten Druck aus, der nothwendig eine Bewegung veranlassen muß, wenn die übrigen Flüssigkeitselemente nicht einen gleichen Gegendruck leisten. So lange aber über MN nicht Flüssigkeitssäulen von gleicher Höhe stehen, oder die Oberfläche nicht zu MN parallel, d. i. horizontal ist, kann jener gleiche Gegendruck nicht stattfinden, folglich auch kein Gleichgewicht vorhanden sein.

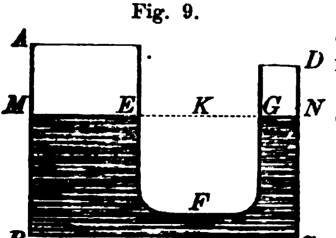
Fig. 8.

Hieraus folgt zugleich, daß, für den Zustand des

Gleichgewichtes, die in einer und derselben beliebigen Horizontalschicht der Flüssigkeit stattfindenden Drücke sich gegen einander aufheben müssen.

Alle diese Gesetze sind von der Gefäßform ganz unabhängig und gelten daher auch für sogenannte communicirende Gefäße *ABCD*, Fig. 9, woselbst man den Satz vom horizontalen Wasserspiegel gewöhnlich so auszudrücken pflegt, daß man sagt: „in communicirenden Gefäßen ist eine und dieselbe Flüssigkeit nur dann im Gleichgewichte, wenn die Oberflächenspiegel in einerlei Horizontalebene liegen.“

Fig. 9.



Letzteren Satz beweist man wohl auch so, daß man sich die Wände *EFG* der Gefäße hinweg und das Gefäß selbst so weit mit Wasser gefüllt vorstellt, daß *MN* den Wasserspiegel bildet, der nach dem Vorstehenden horizontal sein muß; hierauf den Theil *EFGK* der Flüssigkeit wieder fest werden und in der gezeichneten Lage der Figur erhalten läßt, wonach kein Grund vorhanden ist, anzunehmen, es lägen die beiden nunmehro getrennten Spiegel *MB* und *GN* nicht mehr in derselben horizontalen Ebene.

Anmerkung. Einigermaßen abgeändert wird letzterer Satz allein in dem Falle, wenn die betreffenden communicirenden Gefäße sehr enge Röhren (Haarröhren, Capillarröhren) bilden, was vom technischen Standpunkte betrachtet oft zu berücksichtigen ist, wenn die Durchmesser der Röhren entsprechend klein sind.

Eben so ist noch zu bemerken, daß die Oberflächen von Wassermassen bedeutender Ausdehnung Theile einer Kugelfläche bilden müssen, wenn allein die Schwerkraft auf das Wasser als wirksam gedacht wird. Man sehe hierzu den 5. und 6. Abschnitt im Ersten Theile der Eulerschen Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper, worin zugleich höchst interessante Untersuchungen über die Gestalt der Erde geführt werden.

§. 9.

Bodendruck.

Aus dem Vorhergehenden folgt unmittelbar, daß Wasser, welches sich in einem prismatischen Gefäße mit verticaler Achse und horizontalem Boden befindet, gegen letzteren im Zustande des Gleichgewichtes einen Druck ausübt, welcher dem Gewichte des Wassers gleich ist. Denn wenn auch, der gleichförmigen Druckfortpflanzung wegen, gleichzeitig ein Druck auf die Seitenwände des Gefäßes ausgeübt werden muß, so ist dieser doch gleichsam als eine Art von Spannung anzusehen, wodurch keine Verminderung des Druckes in verticaler Richtung veranlaßt wird. Der Druck auf den horizontalen Boden eines geraden prismatischen Gefäßes ist folglich dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche diesen Boden zur Grundfläche und dessen Verticalabstand vom Wasserspiegel zur Höhe

hat. Bezeichnet daher A den Flächeninhalt des Bodens, H die Wasserhöhe und γ das Gewicht der Cubikeinheit Wasser, so erhält man für den Bodendruck $= P$

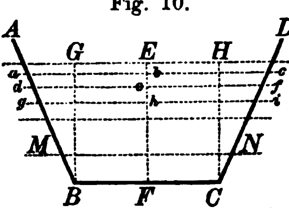
$$P = \gamma . A . H.$$

Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, daß sich H und A auf dasselbe Längen- und Flächenmaaß beziehen, wie das Cubikmaaß für γ. Drückt man daher erstere beiden Größen respective in Metern und Quadratmetern aus, so bezeichnet γ das Gewicht eines Cubikmeters Wasser, welches gleich 1000 Kilogramm anzunehmen ist[1]). Daher wird

$$P = 1000 . A . H. \text{ Kilogramm.}$$

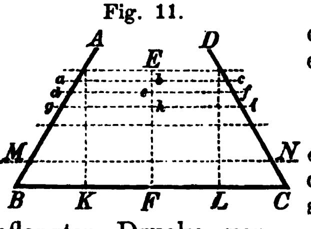
Der so eben gefundene Satz für den Bodendruck gilt aber auch für jedes beliebige, wie immer gestaltete Gefäß $ABCD$, Fig. 10 oder Fig. 11, was sich auf folgende Weise darthun läßt. Es sei

Fig. 10.



$EF = H$ die senkrechte Wasserhöhe, der Inhalt des Horizontalbodens $BC = A$. Man denke sich EF in sehr kleine Theile Eb, be, eh etc. getheilt, und durch jeden der Theilpunkte eine horizontale Ebene, wie ac, df, gi etc. gelegt, so daß man die dadurch gebildeten Körperelemente ohne besonderen Fehler als Prismen ansehen darf. Die Inhalte der respectiven Grundflächen mögen mit a_1, a_2, a_3 . . . bezeichnet werden.

Fig. 11.



Nach dem Vorstehenden wird sodann der Druck $= p_1$, welchen die Fläche a_1 erfährt, ausgedrückt durch

$$(1) \quad p_1 = \gamma . a_1 \, Eb.$$

Der Druck $= p_2$, welchen die Fläche a_2 erleidet, besteht aber aus dem Gewichte der unmittelbar über ihr stehenden Flüssigkeitssäule $acdf$ und aus dem fortgepflanzten Drucke von p_1, so daß, wenn letzterer vorerst mit x bezeichnet wird, folgt

$$(2) \quad p_2 = \gamma . a_2 \, \overline{be} + x.$$

Nach I. §. 5 verhält sich aber $p_1 : x = a_1 : a_2$, woraus sich $x = p_1 \frac{a_2}{a_1}$ und somit ergiebt

$p_2 = \gamma . a_2 . \overline{be} + p_1 \frac{a^2}{a_1}$; oder, wenn man für p_1 den Werth aus (1) substituirt,

$$p_2 = \gamma . a_2 . \overline{be} + \gamma . a_2 . \overline{Eb} = \gamma . a_2 (\overline{be} + \overline{Eb}); \text{ d. i.}$$

$$(3) \quad p_2 = \gamma . a_2 . \overline{Ee}.$$

[1]) Der Temperatureinfluß auf das Gewicht der Cubikeinheit Wasser kann bei gegenwärtigen Betrachtungen außer Acht bleiben. So rechnet man das Gewicht eines

englischen	Cubikfußes Wasser	= 62,50 ℔ engl.
österreichischen	„ „	= 56,38 ℔ Wiener.

Ebenso erhält man für den Druck $= p_3$ auf die Fläche a_3, wenn der von p_2 fortgepflanzte Druck mit y bezeichnet wird,

$$(4) \quad p_3 = \gamma \cdot a_3 \cdot \overline{eh} + y.$$

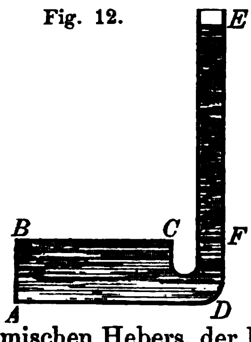
Es ist aber $y = p_2 \frac{a_3}{a_2}$, oder mit Bezug auf (3) $y = \gamma \cdot a_3 \cdot \overline{Ee}$, somit aus (4)

$$p_3 = \gamma\, a_3\, (\overline{eh} + \overline{Ee}) = \gamma\, a_3\, \overline{Eh}.$$

Auf solche Weise fortgefahren, läßt sich allgemein zeigen, daß der Druck, welchen eine beliebige Horizontalebene MN erfährt, ganz unabhängig von der Gefäßform, dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, welche die gedrückte Fläche zur Basis und den Verticalabstand des Schwerpunktes derselben vom Wasserspiegel zur Höhe hat, so daß man für den Druck $= p_n = P$ auf den Boden BC wie vorher erhält

$$P = \gamma \cdot A \cdot H.$$

Fig. 12.



Ebenso kann man darthun, daß vorstehendes Gesetz auch auf jeden horizontalen Theil der Seitenwände eines Gefäßes anwendbar ist. So ist z. B. der vertical aufwärts gerichtete Druck, welchen die Decke BC des bis zum Punkte E mit Wasser gefüllten Gefäßes $ABCED$, Fig. 12, erfährt, dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche die Fläche BC zur Basis und den Verticalabstand EF zur Höhe hat.

Auf dem Satze vom Drucke gegen horizontale Boden, oder eben solche Wandstücken und Decken, beruht das Princip des anatomischen Hebers, der Real'schen Presse, der Wassersäulenmaschinen, Kolbenpumpen etc.

Zusatz. Eine interessante (wenn auch nicht sehr praktische) Anwendung des Satzes vom Bodendrucke des Wassers machte seiner Zeit der französische Ingenieur Girard, indem er bemüht war, diesen Druck zur Vermeidung (?) der Zapfenreibung von (namentlich stehenden) Wellen zu benutzen. Fig. 13 zeigt Girard's betreffende Anordnung für vertical stehende Turbinenwellen.

Dabei ist a eine unbewegliche Säule, welche oberwärts der hohlen Turbinenwelle b zur Stütze dient, indem in gehöriger Höhe über dem Spiegel des Aufschlagwassers ein sogenannter Kammzapfen angebracht ist[1]. c und d sind zwei mit Nuthen (sogenannter Labyrinth-Dichtung) versehene Scheiben, wovon sich die obere c mit der Turbinenwelle b dreht, während die untere d mit dem Fußlagerbocke e ein Ganzes bildet, mit diesem also auch unbeweglich ist.

Durch Zuführung von Druckwasser (bei natürlichem Gefälle, oder besser durch eine besondere Pumpe), welches sich zwischen den beiden Scheiben c und d gehörig verbreiten kann, wollte Girard die metallische Berührung der Oberflächen beider Scheiben c und d völlig

---

[1]) Allgemeine Maschinenlehre, Bd. 1, S. 400 (Zweite Auflage).

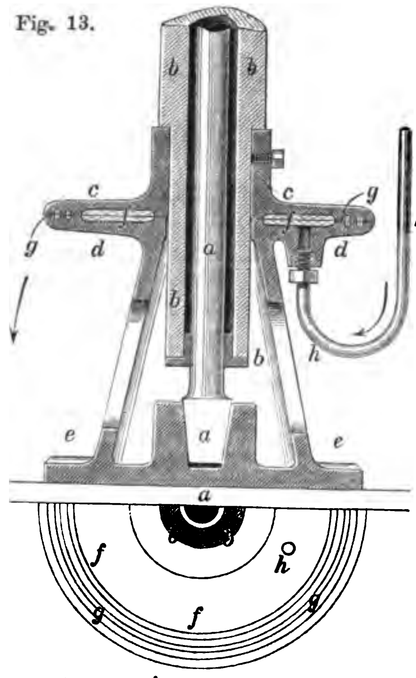


Fig. 13.

vermeiden und folgerecht auch die Reibung beinahe auf Null herabziehen. So sehr diese Anordnung auch in einer der unten angegebenen französischen Quelle (Comptes rendus) belobt und eine große Arbeitsersparniß (durch Rechnung, für einen besonderen Fall) nachgewiesen wird, so stellen sich dem ganzen Prinzipe und dessen Ausführung doch erhebliche Nachtheile entgegen. Welchen Werth Girard selbst auf die ganze Anordnung legte, dürfte daraus erhellen, daß bei allen Turbinen, wo er den hydraulischen Druck in gedachter Weise verwendete, er dennoch die Oberwasserzapfen (Kammzapfen) nicht für überflüssig hielt.

Näheres über die ganze Sache enthalten folgende Quellen: Comptes rendus (Decbr. 1862) und daraus in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1864, in Dr. Grothe's „Jahresbericht über die Fortschritte der mech. Technik und Technologie". Dritter Jahrg. (1863—1864), S. 310. Ferner (mit Abbildungen begleitet) in Lacroix's „Etudes sur l'exposition de 1867 etc." 3. Serie, Fasciculus 11—15, pg. 149.

Anmerkung 1. Nach diesen allgemeinen Sätzen könnte es auffallend erscheinen, daß der Bodendruck bald kleiner wie in Fig. 10, bald größer wie in Fig. 11 als das Gewicht der im Gefäße überhaupt enthaltenen Flüssigkeit ist; eine einfache Betrachtung giebt indeß hierüber Aufschluß. Bei Fig. 10 wird nämlich das in den Räumen ABG und HCD enthaltene Wasser von den Seitenwänden getragen und hat auf den Bodendruck keinen Einfluß. Bei Fig. 11 dagegen erklärt sich der scheinbare Widerspruch (das hydrostatische Paradoxon), daß der Boden einen größeren Druck auszuhalten hat als das Gewicht des darüber stehenden Wassers, sofort dadurch, daß man sich durch die schiefen Wände AB und DC bis zum Boden reichende Röhrchen gesteckt denkt, worauf das Wasser nach dem Satze von den communicirenden Röhren (§. 8) in diesen sich eben so hoch stellen wird als im Gefäße $ABCD$. Der Druck der Flüssigkeitssäulen von der Gefäßwandstelle bis zum Spiegel des Wassers im eingesteckten Rohre, ist bei geschlossener Wand als Reaction von oben nach unten thätig, vergrößert den Bodendruck entsprechend etc. Die letzten möglichen Zweifel fallen später bei der Betrachtung der Drücke auf Seitenwände weg.

Anmerkung 2. In wie weit die sogenannten halbflüssigen Körper vorstehendem Satze vom Bodendrucke völlig flüssiger Körper entsprechen, ist der Natur der Sache nach bis jetzt für manche dieser Körper noch

unentschieden. Der wichtigen Anwendung im Baufache wegen hat man desfallsige Untersuchungen hauptsächlich auf Sand ausgedehnt, wovon wir hier mittheilen, was Hagen[1]) angiebt, während wir insbesondere noch auf Navier's[2]) Bemerkungen aufmerksam machen.

Hagen's Hauptsätze sind Folgende: „Der Druck auf dem Boden einer vertical gestellten cylindrischen Röhre ist bei geringen Höhen dem Gewichte der ganzen darüber stehenden Sandmasse gleich. Bei zunehmender Höhe der Sandmasse wächst dieser Druck jedoch in einem geringeren Maaße, wie das bemerkte Gewicht, und zwar wird die relative Vergrößerung desselben immer geringer, bis sie zuletzt ganz aufhört. Sobald man diese Grenze erreicht hat, wird gar keine Zunahme des Druckes noch ferner stattfinden, wie hoch man auch die Aufschüttung fortsetzen und welche andere Belastung man auf dem Sande auch noch anbringen mag.“

[§. 10.]

Mit Hülfe von Gleichung I. §. 7 lassen sich die Ergebnisse der vorigen §§. fast unmittelbar herleiten. Unter den vorher gemachten Voraussetzungen ist nämlich, wenn die Achse der Z als mit der Schwerkraftrichtung zusammenfallend vorausgesetzt wird, ohne Weiteres $X = Y =$ Null, $Z = -g$ und $dp = -\gamma dz$, folglich $p = -\gamma z + C$.

Zur Bestimmung der Constanten C werde angenommen, daß Q die Pressung auf die Einheit der Oberfläche der Flüssigkeit bezeichne, wofür $z = h$ ist und weshalb folgt:

$$p = Q + \gamma\,(h - z).$$

Es stellt aber $h - z$ den Abstand derjenigen Gleichgewichtsschicht vom Oberwasserspiegel dar, welche überall pro Flächeneinheit den constanten Druck p erfährt, während Q dem äußeren Drucke auf die flüssige Oberfläche entspricht und welcher bei technischen Fragen meistens der Druck der atmosphärischen Luft ist. Ueberhaupt lehrt der für p gefundene Ausdruck, daß die Pressung in jedem Punkte einer beliebigen Gleichgewichtsschicht von der Tiefe dieses Punktes unter dem Oberwasserspiegel, keineswegs aber von der Gefäßform abhängt.

§. 11.

Zur besseren Hervorhebung der Wichtigkeit vorstehender Sätze für technische Fragen mag hier folgende Aufgabe Platz finden[3]).

Man soll die Dicke $= e$ des Bétonbettes[4]) einer Baugrube, Fig. 14, unter nachstehenden Voraussetzungen und Umständen berechnen.

---

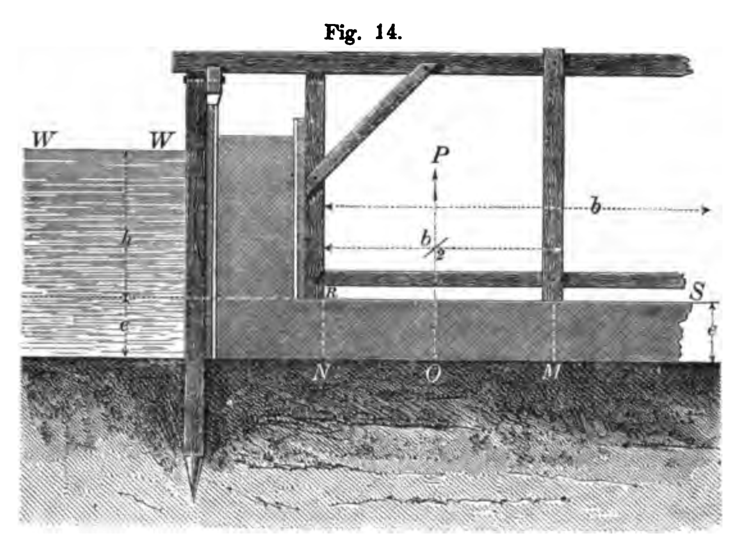
[1]) Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst. Erster Theil, 2. Auflage, S. 507.

[2]) Navier, Mechanik der Baukunst, deutsch von Westphal, §. 268 u. f., bespricht recht ausführlich die Versuche von Delanges, Huber-Burnaud und Moreau.

[3]) Mary, De l'emploi du Béton, Annales des Ponts et Chaussées, 1832, 2. Serie, pag. 66 und 97 etc. Nach diesem: Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst. Theil I, S. 802.

[4]) Béton ist ein Gemenge von hydraulischem Mörtel mit Steinen (von höchstens 50 Millimeter Durchmesser) ungefähr in dem Verhältnisse von 1 : 1 in Maaßtheilen. Man sehe Hagen a. a. O. S. 788.

Fig. 14.



An beiden langen Seiten der Baugrube sind Fangdämme aus Béton aufgeführt, welche das Aufschwimmen des ganzen Bodens durch ihr Gewicht verhindern, jedoch einem Bruche in der Mitte des Bettes nicht entgegenwirken.

Auflösung. Es sei h die Druckhöhe des Außenwassers WW über der Oberfläche RS des Bétonbettes, b die Breite des Bétonbettes zwischen den Fangdämmen, m die absolute Festigkeit des Bétons in Kilogrammen pro Quadratmeter, γ das Gewicht eines Cubikmeters Wasser und $q = 1{,}5 \,.\, \gamma$ das Gewicht eines Cubikmeters Béton.

Der Wasserdruck $= P$ auf eine halbe Bodenfläche MN des Bétonbettes von 1 m Breite ist: $P = \gamma \, \frac{1}{2} \, b \, (h + e)$ und das statische Moment desselben, in Bezug auf N, wo $MO = \frac{1}{2} NM = \frac{1}{4} b$ ist,

$$\frac{\gamma}{2} \, b \, (h + e) \, \frac{b}{4} = \frac{\gamma}{8} \, b^2 \, (h + e).$$

Das Gewicht des halben Bétonbettes: $\frac{qbe}{2}$, so wie dessen Momente, in Bezug auf N:

$$\frac{qb^2e}{8}.$$

Endlich ist das Moment der Bruchfestigkeit, wenn man die horizontale Gleichgewichtsachse durch den höchsten Punkt des Querschnittes bei N legt: $\frac{m}{8} \,.\, 1 \,.\, e^2$.

Daher folgt als Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{m}{8} \, e^2 = \frac{\gamma b^2}{8} (h + e) - \frac{qb^2}{8} \,.\, e, \text{ und hieraus}$$

$$e = \frac{-3b^2 (q - \gamma) + b \sqrt{9b^2 (q - \gamma)^2 + 96 \,.\, \gamma h m}}{16 \, m}.$$

Nach Hagen ist $m = 68256$ Kil. pro Quadratmeter zu nehmen.

Beispiel. Wie groß muß die Dicke des Bétonbettes sein, wenn $b = 9^m,1$, $h = 4^m,7$, $\gamma = 1000$ Kil., $q = 1500$ Kil. ist?

$$e = 1^m,4.$$

§. 12.

Bei Flüssigkeiten, deren Theile verschiedene Dichten haben und sich nicht mischen, lagern sich diese für den Gleichgewichtszustand im Verhältniß ihrer Dichten über einander, weil eben das Gleichgewicht erfordert, daß die Dichtigkeit gleichzeitig mit dem Drucke in der ganzen Ausdehnung einer Horizontalschicht constant sei. Der Druck gegen Bodenflächen ist in solchem Falle gleich dem Flächeninhalte des Bodens, multiplicirt mit der Summe der Producte aus den verschiedenen Flüssigkeitshöhen und ihren zugehörigen Dichten. Sind daher die Höhen der einzelnen Schichten h_1, h_2, h_3 .... h_n, ihre Dichten respective γ_1, γ_2, γ_3 .... γ_n, und der Flächeninhalt des Gefäßbodens $= A$, so erhält man für den gedachten Druck $= P$:

$$P = A\,(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 \ldots \gamma_n h_n).$$

§. 13.

Befinden sich zwei Flüssigkeiten, welche sich nicht vermischen, in communicirenden Gefäßen, so verhalten sich die Höhen ihrer Oberflächen über der Horizontalebene, in welcher sie sich berühren, wie umgekehrt ihre Dichten.

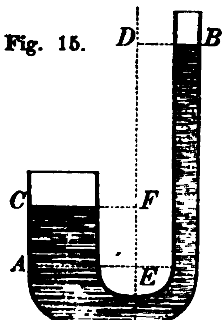


Fig. 15.

In den communicirenden Gefäßen, Fig. 15, sei der Theil AB von der Flüssigkeit mit geringerer Dichte $= p$ und der Theil AC von der mit größerer Dichte $= q$ eingenommen. Die Horizontalebenen der beiden Oberflächen in B und C mögen eine Verticallinie in D und F und die Horizontale A, wo sich die Flüssigkeiten berühren, eben diese Verticale in E schneiden.

Sodann erhält man sofort für den Druck der Flüssigkeit AB in A:

$$p\,.\,\overline{DE},$$

und für den Druck der Flüssigkeit AC in A:

$$q\,.\,\overline{FE}.$$

Für den Gleichgewichtszustand müssen diese beiden Drücke gleich groß, d. i. $p\,.\,\overline{DE} = q\,.\,\overline{FE}$ sein, oder es findet, wie behauptet wurde, die Proportion statt:

$$\overline{DE} : \overline{FE} = q : p.$$

§. 14.

Druck auf die Seitenwände der Gefäße.

Vorerst werde bemerkt, daß es in der Hydrostatik gebräuchlich ist, jeden nicht horizontalen Boden oder jedes solches Stück des-

selben als Theil der Seitenwand des betreffenden Gefäßes zu betrachten.

In jedem mit Wasser gefüllten, beliebig gestalteten Gefäße erleidet aber ein nach allen Richtungen hin unendlich kleines Stück (Elementarfläche) einer solchen Seitenwand einen Normaldruck, welcher dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, die das gedachte Wandstück zur Basis und dessen Verticalabstand vom Wasserspiegel zur Höhe hat. Denn da der Druck, den irgend ein Wassertheilchen im Gefäße erfährt, sich eben so gut nach den Seiten, als nach unten fortpflanzt, so ist klar, daß ein Stück der Seitenwand, wie das vorbezeichnete, denselben Druck wie ein eben so großes Stück des Bodens erleiden würde, wenn man für beide einerlei Abstand vom Wasserspiegel voraussetzte.

Bildet das gedachte Wandstück eine krumme Fläche, so ist die Richtung dieses Druckes als rechtwinkelig auf der Tangentialebene desselben anzunehmen.

§. 15.

Für den Normaldruck, den eine ebene, senkrechte oder beliebig geneigte Seitenwand von willkürlicher Ausdehnung erfährt, läßt sich jetzt sehr leicht eine allgemeine Regel finden.

Man theile die ganze Wand in Elementarflächen, setze deren Inhalt $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n$ und ihre respectiven Abstände vom Wasserspiegel $h_1, h_2, h_3, \ldots . h_n$. Die Drücke auf diese Elemente sind daher nach vorigem §.: $\gamma a_1 h_1, \gamma a_2 h_2, \gamma a_3 h_3, \ldots . \gamma a_n h_n$. Die Richtung jedes dieser Drücke steht aber auf der betreffenden ebenen Wand normal, so daß der Gesammtdruck gegen dieselbe aus einem Systeme paralleler Kräfte besteht, deren Mittelkraft $= R$ ihrer algebraischen Summe gleich ist, also

$$R = \gamma\,(a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \ldots a_n h_n).$$

Die in der Parenthese befindlichen Producte sind aber nichts anderes als die Summe der statischen Momente der Theile a_1, a_2, $a_3 \ldots . a_n$, wenn man den Wasserspiegel zur Momentenebene annimmt. Bezeichnet man daher die Entfernung des Schwerpunktes der ebenen Wand vom Wasserspiegel mit z und den Inhalt der ganzen gedrückten Fläche mit A, so folgt

$$\gamma A z = \gamma\,(a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \ldots a_n h_n);$$

mithin aus (1)

$$R = \gamma\, A z.$$

D e r N o r m a l d r u c k g e g e n e i n e b e l i e b i g e e b e n e S e i t e n w a n d e i n e s G e f ä ß e s i s t d a h e r d e m G e w i c h t e e i n e r W a s s e r s ä u l e g l e i c h, w e l c h e d i e g e d r ü c k t e E b e n e z u r B a s i s u n d d e n A b s t a n d d e s S c h w e r p u n k t e s d e r s e l b e n v o m W a s s e r s p i e g e l z u r H ö h e h a t.

Die Schwerpunktsentfernung einer solchen Ebene vom Wasserspiegel nennt man gewöhnlich die Druckhöhe dieser Ebene.

Aus dem Vorstehenden läßt sich zugleich abnehmen, daß der Normaldruck auf eine in die Flüssigkeit untergetauchte Ebene derselbe bleibt, wenn man auch letztere beliebig um ihren Schwerpunkt dreht.

Zusatz 1. Bei technischen Arbeiten und dahin gehörigen mathematischen Entwickelungen ersetzt man sehr oft Gewichte, welche die Intensitäten von Kräften ausdrücken, durch Flüssigkeitssäulen von gleicher Größe des Gewichtes. Ist z. B. in einem besondern Falle die Größe der gegen die Einheit einer Fläche drückenden Kraft $= p$, so erhält man, wenn x die Druckhöhe der Wassersäule bezeichnet, deren Gewicht das Maaß für jenes p ist,

$$p = \gamma \,.\, 1 \,.\, x, \text{ oder } x = \frac{p}{\gamma}.$$

So wird ein Druck (einer Atmosphäre) von 14,7 ℔ engl. pro □ Zoll engl. durch eine Wassersäule von $x = \frac{144 \,.\, 14{,}7}{62{,}5} = 33{,}8$ Fuß engl., ebenso der von 10333 Kilogr. pro Quadratmeter durch eine Wassersäule von der Höhe $x = \frac{10333}{1000} = 10{,}333$ Meter gemessen.

Zusatz 2. Der Normaldruck $= R$ gegen ein vertical gestelltes Rechteck von der Breite b und der Höhe h, dessen obere Seite mit dem horizontalen Wasserspiegel zusammenfällt, ist sonach:

$R = \gamma b h \,.\, \frac{h}{2} = \frac{\gamma b h^2}{2}$, d. h. bei gleichbleibender Breite ist der Normaldruck dem Quadrate der Höhe proportional.

Zusatz 3. Was die bereits §. 9 angeführten halbflüssigen Körper in gegenwärtigem Falle anlangt, so dürfte auch hier nur das wichtig sein, was man bis jetzt beim Sande wahrgenommen hat[1]). Insbesondere bemerkt Hagen, daß der horizontale Druck, den eine Sandschüttung gegen eine verticale Wand ausübt, dem Quadrate der Schüttungshöhe proportional ist, vorausgesetzt, daß die Oberfläche ganz wagrecht abgeglichen ist und daß die Wand, welche den fraglichen Druck erfährt, bis zu dieser Oberfläche heraufreicht. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Zusatzes setzt daher Hagen diesen Druck

$$R = A \frac{\gamma'}{2} b h^2, \text{ wenn}$$

γ' das Gewicht der Cubikeinheit des Sandes und A eine von der Natur des letztern abhängige Constante bezeichnet.

Hagen ermittelt insbesondere die Reibung einer Sandschüttung gegen einen Cylinder, der überall von ihr umgeben wird. Bezeichnet dabei f den Reibungscoefficienten zwischen Sand und Cylinder, ferner r den Radius der kreisförmigen Basis des letztern, so ist zuerst $b = 2r\pi$ und die Reibung

$$f \,.\, R = fA \,.\, \gamma' r \pi h^2.$$

Für eisenhaltigen Streusand, und wenn der bemerkte Cylinder ein gläserner war, fand Hagen $\gamma' = 2{,}82$ Loth, $fA = 0{,}12$, wenn der rhein-

[1]) Hagen, Wasserbaukunde, Bd. 1, S. 506 und Navier, Mechanik der Baukunst §. 269.

ländische Zoll als Maaßeinheit angenommen wurde. Für feines Schrot, wo $\gamma = 8{,}245$ eben so $fA = 0{,}135$ etc.

§. 16.

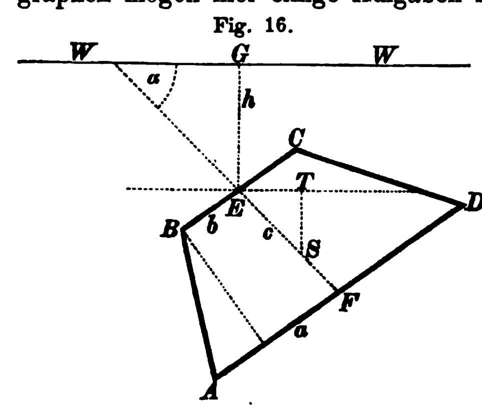
Der Satz des vorigen §. kann auch benutzt werden, um den Druck auf die gesammte Seitenfläche eines Gefäßes, d. h. auf alle Dreiecke, Parallelogramme u. s. w., woraus dieselbe besteht, zu berechnen. Sieht man die Größe der Wandstücken wieder als Gewichte an, die in parallelen, gegen den Wasserspiegel rechtwinkeligen Richtungen wirken müssen, so läßt sich, ähnlich wie vorher, zeigen, daß der Druck, den sämmtliche Seitenwände erfahren, dem Gewichte eines Wasserkörpers gleich ist, welcher aus der Summe der Inhalte dieser Flächen multiplicirt mit dem Abstande des Schwerpunktes des ganzen Systemes vom Wasserspiegel besteht. Zu beachten ist jedoch hierbei, daß hier der Gesammtdruck nicht, wie im vorigen §., als Mittelkraft, sondern als der Inbegriff der Normaldrücke zu betrachten ist, welche jede der Flächen für sich allein erfährt. In diesem Sinne läßt sich bemerkte Regel auch auf den Gesammtdruck anwenden, den irgend eine krumme Seitenfläche erleidet, d. h. man muß diesen Druck als den Inbegriff der Normaldrücke ansehen, wovon jeder senkrecht auf der Ebene steht, welche als Berührende für jede der Elementarflächen gedacht werden kann.

Anmerkung. Die Frage, in wiefern sich zu diesen einzelnen Normaldrücken eine Mittelkraft angeben läßt, ob eine einzige solche in allen Fällen ausreicht, und wo der Angriffspunkt liegt, bleibt später folgenden Betrachtungen überlassen.

§. 17.

Zur Erläuterung und Anwendung der Sätze vorstehender Paragraphen mögen hier einige Aufgaben folgen.

Fig. 16.



Aufgabe 1. Es ist der Normaldruck des Wassers gegen ein Trapez $ABCD$, Fig. 16, zu bestimmen, welches sich in einer gegen den Wasserspiegel WW oder dem Horizonte unter einem Winkel $= \alpha$ geneigten Ebene befindet, und dessen parallele Seiten AD und BC horizontal sind. Die oberste Seite BC liege unter dem Wasserspiegel in einer verticalen Tiefe $EG = h$, ferner sei $AD = a$, $BC = b$, und der rechtwinkelige Abstand letzterer beiden Seiten $EF = c$.

Auflösung. Wir finden zuerst die Druckhöhe des Trapezes und nehmen deßhalb, an daß sich der Schwerpunkt derselben in S befinde. Nach §. 73 der Geostatik des Verfassers (Dritte Auflage) ist sodann

$$ES = \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b},$$

und daher der Verticalabstand ST des Punktes S, von einer durch die oberste Seite BC parallel zum Wasserspiegel gelegten Ebene,

$$ST = \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b} \cdot \sin \alpha.$$

Für die Druckhöhe $= EG + ST = z$ erhält man sonach

$$z = h + \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b} \sin \alpha,$$

Es ist aber der Flächeninhalt des Trapezes $= \frac{c}{2} (a + b)$, folglich der gesuchte Normaldruck $= P$ nach §. 15

$$P = \gamma \cdot \frac{c}{2} (a + b) \left(h + \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b} \sin \alpha\right), \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad P = \frac{c\gamma}{6} \left\{ 3 (a + b) h + c (2a + b) \sin \alpha \right\}.$$

Liegt die größere Seite AD des Trapezes dem Wasserspiegel zugekehrt, so erhält man auf gleichem Wege:

$$\text{II.} \quad P = \frac{c\gamma}{6} \left\{ 3 (a + b) h + c (a + 2b) \sin \alpha \right\}.$$

Zusatz 1. Für ein Rechteck ist unter sonst gleichen Umständen, wegen $a = b$,

$$P = \gamma ac \, (h + \tfrac{1}{2} c \cdot \sin \alpha).$$

und wenn dessen obere Seite mit dem Wasserspiegel zusammenfällt, also $h = 0$ ist:

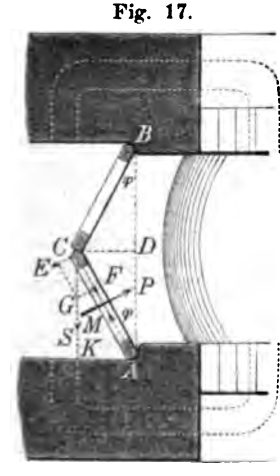
$$P = \tfrac{1}{2} \gamma ac^2 \cdot \sin \alpha.$$

Im Falle die gedrückte Fläche ein Dreieck ist, hat man b oder a gleich Null zu setzen, je nachdem die Spitze nach oben oder unten gekehrt ist.

§. 18.

Aufgabe 2. Es ist die Kraft zu bestimmen, womit die Riegelhölzer bei Schleusen-Stemmthoren zusammengedrückt werden, so wie anzugeben, wie betreffende Dimensionen berechnet werden können.

Fig. 17.



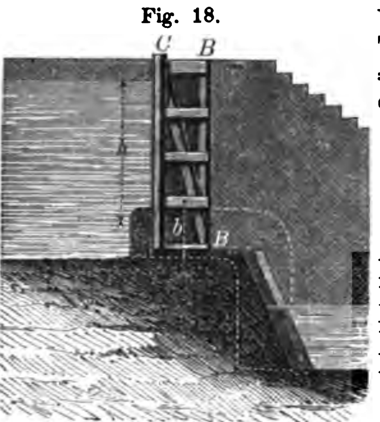
Auflösung. Es sei Fig. 17 Grundriß und Fig. 18 Aufriß eines Theiles vom sogenannten Oberhaupte einer Schleuse, wobei man das geschlossene Stemmthor, Drempel (Schlagschwelle), die Umläufe (Kanäle) etc. für gegenwärtigen Zweck hinlänglich erkennen wird. Die lichte Weite AB der Thoröffnung sei $= w$, die Pfeilhöhe $DC = e$, so daß das Verhältniß $\frac{e}{2w}$ (im Mittel $\frac{1}{5}$), ferner $\angle DAC = \varphi$ (gegen 20°) und endlich die Thorflügellängen $AC = BC = l$ als ebenfalls bekannt anzunehmen sind. Die Entfernung zweier Riegel eines jeden Thores sei, von Mitte zu Mitte derselben gemessen $= b$ und die entsprechende Wasserdruckhöhe $= h$.

Die Normalpressung $= P$ des Wassers

gegen den Theil eines Thores, welcher zwischen zwei Riegelmitten liegt, ist folglich

$$(1) \quad P = \gamma bl \,.\, h = \gamma bh \,.\, \frac{w}{2\cos\varphi}.$$

Fig. 18.



Wir ersetzen ferner den zweiten Thorflügel durch einen Gegendruck $= S$ und bestimmen dessen Größe durch die Momentengleichung:

$$S \,.\, \overline{AK} = P \,.\, \overline{AM}, \text{ d. i.}$$

$$S \,.\, l \sin\varphi = P \,.\, \frac{l}{2}, \text{ und}$$

$$S = \frac{P}{2\sin\varphi}.$$

Die Kraft $CF = K$, womit der Riegel zusammengedrückt wird, ist folglich

$$\text{I.} \quad K = S\cos\varphi = \frac{P}{2\,tg\,\varphi} = \frac{\gamma b h}{4} \,.\, \frac{w}{\sin\varphi}.$$

Wegen der Composante CE von S, welche in C rechtwinklig auf der Thorebene steht und deren Größe $CE = S \,.\, \sin\varphi = \frac{P}{2}$ ist, verhält sich die Thorhälfte MC in Betracht von Kräften, welche dieselbe zu biegen sich bestreben, gerade so, als wenn der Flügel in der Mitte M eingemauert (festgehalten) würde, am Ende C die Normalkraft $\frac{P}{2}$ wirke und über die Länge $\overline{MC}$ ein Gewicht $\frac{P}{2}$ gleichförmig verbreitet wäre. Das größte statistische Moment dieser beiden Normalkräfte in Bezug auf M ist aber: $-\frac{P}{2} \,.\, \frac{\overline{MC}}{2} + \frac{P}{2} \,.\, \overline{MC} = +\frac{P}{4} \,.\, \overline{MC} = \frac{Pl}{8}$. Bezeichnet daher p das Tragvermögen des Riegels auf die Flächeneinheit bezogen, und bildet er im Querschnitte ein Rechteck von der Höhe a und Dicke c vom Inhalt $A = ac$, so folgt:

$$p = \frac{P}{2A\,tg\,\varphi} + \frac{U}{T} \,.\, \frac{Pl}{8},$$ [1]

---

[1]) Nach V., §. 116 der Geostatik (Dritte Auflage) des Verfassers, erhält man die Zusammendrückung einer Faser pro Längeneinheit durch einen Druck oder Zug Q in der Achsenrichtung zu: $\frac{Q}{E \,.\, A}$. Eben so auch, nach I., §. 126 (derselben Quelle), für die größte durch Biegung veranlaßte Verlängerung einer Faser: $\frac{U}{E \,.\, T} \,.\, M$, wobei E den Elasticitätsmodul und M das Maximalmoment der biegenden Kräfte bezeichnet.

Daher die Ausdehnung (oder Zusammendrückung) zufolge der combinirten Kraftwirkung:

$$\frac{p}{E} = \frac{Q}{E \,.\, A} + \frac{U}{E \,.\, T} \,.\, M, \text{ oder}$$

wo U die von der neutralen Achse am entferntesten liegende Faser und T das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf eine Achse bezeichnet, welche in der Ebene der Figur liegt und durch den Schwerpunkt derselben geht. Hiernach also $U = \frac{c}{2}$, $T = \frac{1}{12} ac^3$ und somit ist:

$$\text{II.} \quad p = \frac{P}{2ac \cdot \text{tg}\,\varphi} + \tfrac{3}{4} \frac{Pl}{ac^2}.$$

Hierbei ist von dem eigenen Gewichte des Thores noch abgesehen.

Zusatz 1. Führt man in (II) den Werth von P aus (1) und $l = \frac{w}{2 \cos\varphi}$ ein, so folgt:

$$p = \frac{\gamma bhw}{4ac} \left\{ \frac{1}{\sin\varphi} + \tfrac{3}{4} \frac{w}{c} \frac{1}{\cos\varphi^2} \right\}.$$

Letzterer Werth wird aber in Bezug auf φ eine Eminenzie, wenn man φ aus der Gleichung berechnet:

$$\text{III.} \quad \sin\varphi^4 - 2m \,.\, \sin\varphi^3 - 2 \sin\varphi^2 + 1 = 0, \text{ wo } m = \frac{3w}{4c} \text{ ist}$$

und woraus man den vortheilhaften Winkel φ entnehmen kann.

Beispiel. Setzt man mit Hagen (Wasserbauk. II. Theil. Bd. 3, S. 95 und 106) $c = 13$ Zoll, $w = 30$ Fuß, so ergiebt sich aus III die Wurzel: $+ 0{,}254$ oder φ nahe zu 18 Grad.

Zusatz 2. Barlow findet nach sehr unklarem Entwickelungsgange unter allen Umständen (Transactions of the Institution of Civil Engineers. Vol. I. p. 72) zur Bestimmung von φ die Gleichung

$$\text{tg}\,\varphi^3 + \tfrac{1}{20}\,\text{tg}\,\varphi^2 = \tfrac{1}{12},$$

welche $\varphi = 19^\circ 25'$ giebt.

Woltmann in seinem Werke: „Beiträge zur Schiffbarmachung der Flüsse" findet S. 232, nach höchst sonderbarer Herleitungsweise zur Bestimmung von φ die Gleichung

$$\frac{1}{\sec.\varphi^2 \,\text{cosec.}\,\varphi} + \frac{1}{\sec.\varphi^2} = \text{Maxim., woraus}$$

$$\varphi = 19^\circ 28'.$$

Belidor in seiner hydraulischen Architektur (2. Theil, §. 164) gab bereits viel früher $\varphi = 22\tfrac{1}{2}$ Grad an.

§. 19.

Druck des Wassers nach bestimmten Richtungen.

Bei technischen Untersuchungen wird es sehr oft nöthig, den Druck anzugeben, welchen das Wasser gegen Gefäßwände nach

---

$$p = \frac{Q}{A} + \frac{U}{T} \cdot M,$$

worin p das Tragvermögen bezeichnet und die übrigen Größen oben im Texte angegeben sind.

einer vorgeschriebenen Richtung, die von der des Normaldruckes verschieden ist, ausübt. Nachstehendes sei zur Herleitung der hierbei stattfindenden Gesetze bestimmt.

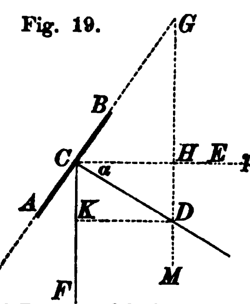


Fig. 19.

Ist AB, Fig. 19, ein nach allen Seiten hin unendlich kleines Stück einer Gefäßwand, so kann man die Richtungen des Druckes auf dasselbe, gleichgültig, ob solches eben oder krumm, als unter einander parallel annehmen, so daß die ihnen zugehörige Mittelkraft der Summe der Drücke auf die einzelnen Punkte desselben Elementes gleich ist. Es sei nun C der Angriffspunkt, CD Richtung und Größe dieser Mittelkraft, und man soll angeben, wie stark AB nach einer von CD verschiedenen Richtung, z. B. der CE, die mit ersterer den Winkel $DCE = \alpha$ einschließt, gedrückt wird. Zu diesem Ende zerlege man CD in zwei Seitenkräfte CH und CK, wovon erstere mit CE zusammenfällt, letztere auf CE rechtwinklig steht. Da nun sodann CK in der bezeichneten Richtung keine Wirkung äußern kann, so muß CH den gesuchten Druck darstellen. Setzt man daher den Inhalt des Elementes $AB = a$, die zugehörige Druckhöhe $= h$, so ist der Normaldruck $CD = \gamma \cdot ah$, und der Druck nach der Richtung $CE = CH = \overline{CD} \cos \alpha = \gamma ah \cdot \cos \alpha$. (1).

Denkt man sich jetzt AB als Durchschnittslinie der Ebene, in welcher der Winkel DCE liegt, mit der Elementarfläche und führt durch die genannte Ebene eine zweite auf CE und somit auch auf der DCE rechtwinklig stehende Ebene, so wird, wenn GM die Durchschnittslinie letzterer beiden Ebenen ist, CGM der Neigungswinkel sein, welchen das Wandelement mit der Ebene GHM bildet. Denkt man sich ferner das Element AB auf die Ebene GHM projicirt, so stellt nach Sätzen der Geometrie $a \cos \angle \overline{CGM}$, oder (da $\angle CGM = \angle DCE = \alpha$ sein muß) $a \cos \alpha$ die gedachte Projection dar. Demnach erhält man aus (1), wenn $a \cos \alpha = f$ gesetzt wird, für den Druck $= p$ nach der Richtung EC:

$$p = \gamma \cdot fh.$$

Es ist also der Druck des Wassers nach irgend einer Richtung gegen eine beliebige Elementarfläche gleich dem Normaldrucke gegen die rechtwinklig zur bezeichneten Richtung genommene Projection der Elementarfläche, wenn für beide Fälle einerlei Druckhöhe vorausgesetzt wird. Ueberhaupt ergiebt sich aber der wichtige Satz:

Der Druck, welchen ein beliebiges Element einer Gefäßwand nach irgend einer bestimmten Richtung erfährt, wird stets erhalten, wenn man die Projection dieses Elementes auf eine Ebene sucht, welche rechtwinklig auf der bezeichneten Richtung steht, und die Fläche der Projection mit der Druckhöhe multiplicirt, die der gedrückten Fläche zukommt.

Zusatz 1. Unanwendbar könnte dieser Satz auf den Druck erscheinen, den irgend eine krumme Fläche von willkürlicher Größe nach einer bestimmten Richtung erfährt, indem hier die Normaldrücke auf die Elemente der krummen Fläche nicht, wie bei ebenen Flächen, unter einander parallel gerichtet sind.

Um hierüber Aufschluß zu erhalten, bestimmen wir den Normaldruck auf jedes Element der krummen Fläche und zerlegen jeden solchen (nach §. 65 Geostatik) in drei Seitenkräfte, die respective dreien rechtwinkligen Coordinatenachsen parallel sind, und worauf sich die zugehörigen Resultirenden, im Allgemeinen zwei, werden finden lassen. Allein für unseren Fall, wo der Druck nur nach einer vorgeschriebenen Richtung angegeben werden soll, braucht der letztere Theil der bemerkten Arbeit nicht vorgenommen zu werden, wenn man nur eine der drei Coordinatenachsen in die bezeichnete Richtung legt. Hat man z. B. die Achse der Z, die auf der Ebene XY rechtwinklig steht, in der vorgeschriebenen Druckrichtung angenommen, so wird nur nöthig sein, den Normaldruck auf jedes Element mit dem Cosinus des Winkels zu multipliciren, den die Richtung jenes Druckes mit der Achse der Z, oder, was dasselbe ist, den die Berührungsebene für ein solches Element mit der Ebene XY macht. Die Producte dieser Elemente in die respectiven Cosinus sind sodann nichts Anderes, als die Projectionen der Elemente auf die Ebene XY. Legt man daher diesen Projectionen, wie es §. 15 geschah, Gewichte bei, so läßt sich auf dem an gedachtem Orte gewählten Wege auch hier überhaupt zeigen,

daß der Druck nach einer bestimmten Richtung gegen eine krumme Fläche gleich dem Gewichte einer Wassersäule ist, welche die rechtwinklig zur bezeichneten Richtung genommene Projection der krummen Fläche zur Basis und die Druckhöhe der krummen Fläche zur Höhe hat.

Zusatz 2. Hiernach läßt sich ohne Weiteres der Druck angeben, welchen in verticaler Richtung die (krummen) Mantelflächen eines Kegels und einer Halbkugel erfahren, wenn solche ganz mit Wasser gefüllt sind, und wenn r den Halbmesser der kreisförmigen Kegelbasis so wie der Kugel und h die Höhe des Kegels bezeichnet.

Die Projection der gedrückten Flächen rechtwinklig gegen die Verticale ist $= r^2\pi$, die Druckhöhe für den Kegel $= \frac{2}{3}\, h$, wenn dessen Spitze nach oben gekehrt ist und die Druckhöhe für die Halbkugel $= \frac{1}{2}\, r$, wenn vorausgesetzt wird, daß deren größter Kreis mit dem Wasserspiegel zusammenfällt. Sonach der anzugebende Druck

für den Kegel: $\gamma r^2\pi \,.\, \frac{2}{3}\, h = \frac{2}{3}\, \gamma\pi r^2 h$;
für die Halbkugel: $\gamma r^2\pi \,.\, \frac{1}{2}\, r = \frac{1}{2}\, \gamma\pi r^3$.

Zugleich lösen sich hierbei die letzten Zweifel (Anmerkung 1, §. 9) über Bodendrücke (das sogenannte hydrostatische Paradoxon). So ist z. B. der Bodendruck bei dem so eben betrachteten Kegel: $\gamma r^2\pi h$. Wegen der festen Verbindung des Mantels mit diesem Boden und weil der Druck auf den Mantel nach verticaler Richtung aufwärts, der Bodendruck aber abwärts gerichtet ist, ergiebt sich sonach ein resultirender Druck nach unten:

$$[\gamma r^2 \pi h - \tfrac{2}{3}\gamma \pi r^2 h] = \frac{\gamma}{3}\pi r^2 h,$$

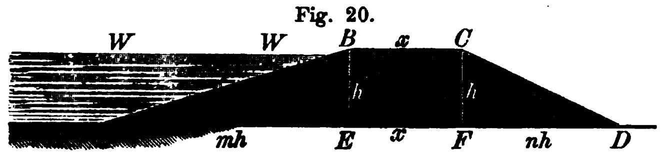
d. h. wie ganz richtig, eine Kraft, welche gleich dem Gewichte des im Kegel befindlichen Wassers ist.

§. 20.

Aufgabe 1. Man soll die obere oder Kronenbreite eines aus Erde aufgeführten Deichdammes unter der Voraussetzung berechnen, daß derselbe vom Wasserdrucke nicht auf seiner Grundfläche AD fortgeschoben werden kann.

Auflösung. Es sei $ABCD$, Fig. 20, das wenigstens der Form nach festgestellte Dammprofil, seine Höhe $BE = CF = h$,

Fig. 20.



die äußere Böschung AB habe eine m (wenigstens drei)fache, die innere CD eine n (wenigstens zwei)fache Anlage, so daß $AE = mh$, $FD = nh$ ist, die Dammlänge sei $= l$. Das Gewicht der Cubikeinheit Erdmasse werde mit q und der Reibungscoefficient zwischen Dammkörper und dessen Grundfläche mit f bezeichnet.

Für den Zustand des Gleichgewichts wird letztere Reibung dem Horizontaldrucke des Wassers das Gleichgewicht zu halten haben. Beachtet man hierzu, daß der die Reibung erzeugende Druck aus dem Gewichte des Dammkörpers besteht, diesen vermehrt um den Verticaldruck des Wassers und setzt die Kronenbreite $BC = x$, so erhält man ohne Weiteres:

$$\tfrac{1}{2}\gamma h^2 l = fqhl\left[x + \frac{h}{2}(m+n)\right] + f\frac{\gamma m h^2 l}{2}.$$

In vielen Fällen wird man indeß annehmen müssen, daß der Dammkörper nach und nach ganz vom Wasser durchdrungen wird, so daß statt obigem Dammgewichte ein anderes nämlich $(q-\gamma)hl\left[x + \frac{h}{2}(m+n)\right]h$ in Rechnung zu bringen, der Verticaldruck $\tfrac{1}{2}\gamma m h^2 l$ des Wassers aber ganz wegzulassen sein wird, indem diesen das Grundwasser des Bodens im Gleichgewichte hält. Nimmt man überdies, der Sicherheit wegen, das $1\tfrac{1}{2}$ fache des Horizontaldruckes in Rechnung, so folgt endlich:

$$\tfrac{3}{4}\gamma h^2 = f(q-\gamma)\left[x + \frac{h}{2}(m+n)\right]h, \text{ woraus sich ergibt:}$$

$$x = \frac{3\gamma h}{4f(q-\gamma)} - \frac{h}{2}(m+n).$$

Praktische Anforderungen verlangen gewöhnlich x noch größer zu nehmen, als diese Formel giebt.

§. 21.

Aufgabe 2. Man soll die erforderliche Stärke cylindrischer Röhren angeben, damit dieselben einem bestimmten Flüssigkeitsdrucke widerstehen können.

Fig. 21.

Auflösung. Als entsprechende Vorbereitung zur Lösung dieser Aufgabe untersuchen wir zuerst, welche Spannung $= t$ in zwei auf einander folgende Seiten AB und AD eines elastischen Polygons, Fig. 20, hervorgerufen wird, wenn man gegen den Winkelpunkt A dieser Seiten ein Normaldruck $= p$ ausübt. Hierzu sei $AO = \varrho$ der Krümmungshalbmesser des sehr kleinen Bogens BD, zu dessen Endpunkten AB und AD Tangenten sind, ferner $\angle BOD = \varphi$.

Zufolge §. 39, Gleichung V. der Geostatik des Verfassers, hat man zunächst:

$$p = 2t \cos \tfrac{1}{2} (180 - \varphi) = 2t \sin \tfrac{1}{2} \varphi.$$

Wegen Kleinheit von φ ist der Sinus mit dem Bogen zu verwechseln, so daß folgt: $p = t \,.\, \varphi$. Bezeichnet ferner s die Länge des Bogens BD, so ist $s = \varrho\varphi$ und folglich $p = \frac{t\,.\,s}{\varrho}$, oder wenn man $s =$ der Einheit annimmt:

$$(1) \quad p = \frac{t}{\varrho},\ ^{1)} \text{ oder}$$
$$t = p\varrho.$$

Da man sich die unendlich kleinen Polygonseiten mit dem unendlich kleinen Bogen des Radius ϱ zusammenfallend vorstellen kann, so folgt aus (1) auch, daß man die Achsenspannung in einem beliebigen Punkte einer ebenen Curve findet, wenn man den daselbst stattfindenden Normaldruck mit dem Krümmungshalbmesser für diesen Punkt multiplicirt.

Bildet die Curve einen Kreisbogen, so bezeichnet ϱ den Radius, womit derselbe beschrieben ist und daher ϱ eine Constante. Ist ferner die Curve eine geschlossene und bildet sie überdies den Querschnittsumfang einer Röhre, deren Querschnitt ein Kreis vom Radius $= r$ ist, so stellt

$$(2) \quad t = pr$$

die Spannung in der Peripherie der Röhrenquerschnitte unter der Voraussetzung dar, daß p der überall gleiche Druck auf die Flächeneinheit der Röhre ist.

Um die Spannung der Röhrenwand in der Richtung der Seiten einer cylindrischen Röhre zu erhalten, denken wir uns dieselbe an beiden Enden geschlossen, so daß diese Endflächen eine Pressung $= pr^2\pi$ erfahren. Sodann erleidet aber die Einheit vom

---

[1]) Ein bereits von d'Alembert aufgefundenes Gesetz. Traité des Fluides §. 4 p. 4.

Umfang der Röhren eine Achsenspannung $= t$, welche gleich sein muß

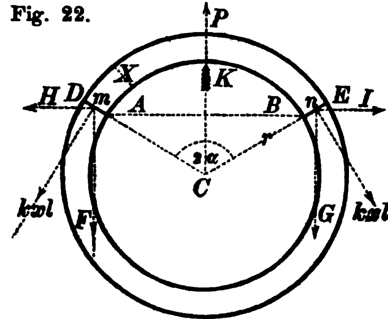
$$(3) \quad t . = \frac{pr^2\pi}{2r\pi} = \frac{pr}{2}.$$

Aus (2) und (3) folgt nun der bemerkenswerthe Satz, daß bei einer Röhre mit kreisförmigem Querschnitte, welche von einer Flüssigkeit einen überall gleichen Druck erfährt, die Spannung in der Seitenrichtung, parallel der Röhrenachse, nur halb so so groß ist wie die Spannung in der Richtung der Querschnitte.

Werden daher die Wandstücke einer Röhre so genommen daß Längenrisse nicht eintreten können, so ist dieselbe noch mehr gegen Zerstörungen in der Richtung der Querschnitte gesichert.

Unter diesen Voraussetzungen berechnen wir die Wandstärke $= x$ einer Röhre von kreisförmigem Querschnitte, wenn r der innere Radius derselben ist und die Flüssigkeit, welche gegen die Röhre drückt, dieselbe füllt, die Druckkraft also von Innen nach Außen gerichtet ist.

Fig. 22.



Ein beliebiges Stück der Röhrenwand von der Länge $= l$ und dem zugehörigen Centriwinkel $DCE = 2\alpha$, Fig. 22, lasse zuerst dergleichen Längenrisse bei D und E erwarten, wobei die Flächen $x . l$ bei AD und BE mit einer Kraft kxl rechtwinklig gegen AD und BE widerstehen, wenn k das sogenannte Tragvermögen, Zugspannung (II, §. 116 Geostatik) des vorhandenen Röhrenmaterials pro Flächeneinheit bezeichnet. Der Druck P nach der bestimmten Richtung CK rechtwinklig auf die Sehne des Bogens AKB ist ferner, wenn H die Druckhöhe der Flüssigkeit über der betreffenden Stelle bezeichnet,

$$P = \gamma . \overline{AB} . l . H, \text{ oder weil } \overline{AB} = 2r \sin\alpha \text{ ist,}$$

$$(4) \quad P = 2\,\gamma r\, lH . \sin\alpha.$$

Diesem Drucke entgegen wirken die zur Richtung von P parallelen Composanten mF und nG von kxl, während sich die zu P rechtwinkligen mH und nI wechselseitig vernichten. Es ist aber

$$mF + nG = 2\,kxl . \sin\alpha,$$

woraus für's Gleichgewicht mit (4) verglichen folgt:

$$2\,kxl \sin\alpha = 2\,\gamma rl . H \sin\alpha, \text{ d. i.}$$

$$x = \frac{\gamma}{k} r . H, \text{ oder wenn } 2r = D \text{ eingeführt wird}$$

$$\text{I.} \quad x = \frac{\gamma}{2k} . D . H.$$

Hieraus folgt zugleich, daß große und kleine Stücke der Röhre

mit gleicher Wahrscheinlichkeit von der drückenden Flüssigkeit herausgetrieben werden können, da in I. weder α noch l enthalten ist.

Bezeichnet p den inneren Druck pro Flächeneinheit der Röhre und p_0 eben so den äußeren Druck, so läßt sich auch setzen, indem man jetzt annimmt, der Riß der Röhre theilt dieselbe genau in zwei Hälften:

$$(2rl)\,(p - p_0) = k\,(2lx), \text{ d. i.}$$

$$\text{II.} \quad x = \frac{r(p - p_0)}{k}.$$

Um vorstehende Ausdrücke für die Praxis möglichst brauchbar zu machen, sind an denselben entsprechende Correctionen anzubringen. Vorerst ist klar, daß sie nicht eine solche Form behalten können, wo für $H = 0$ oder für $p = p_0$ auch $x = 0$ wird, da wegen der eigenen Stabilität der Röhre, selbst wenn kein Druck stattfindet, ferner bei gegossenen Röhren, wenn der Guß überhaupt noch möglich sein soll, immerhin eine gewisse Wanddicke vorhanden sein muß. Sodann wird es auch sicherer sein, den für gleiches Material und dieselbe Flüssigkeit constanten Factor $\frac{\gamma}{2k}$ (in I) durch directe Versuche zu ermitteln. Bezeichnet daher c die kleinste Dicke, welche man einer Röhre überhaupt noch geben darf, und wird $\frac{\gamma}{2k} = \mu$ gesetzt, so folgt aus I.

$$\text{III.} \quad x = \mu\,.\,DH + c.$$

Nach D'Aubuisson[1]) ist für gußeiserne Röhren und Metermaße $\mu = 0{,}00015$, $c = 0{,}^m01$, folglich für dieses Material

$$x = 0{,}^m00015\,DH + 0{,}^m01.$$

Empfehlenswerth sind die für μ und c aus Erfahrung entnommenen Werthe Genieys[2]). Derselbe führt in III. statt H die Anzahl der Atmosphären $= n$ ein, die dem jedesmaligen Drucke (Ueberdrucke) entsprechen, jede derselben zu 10 Meter Druckhöhe gerechnet, und sodann, alle Maaße in Metern ausgedrückt,

für bleierne Röhren $x = 0{,}005\,nD + 0{,}0045$,
„ gußeiserne „ $x = 0{,}0007\,nD + 0{,}01$,
„ Röhren von Eisenblech $x = 0{,}0005\,nD + 0{,}003$,
„ „ „ natürlichem Gestein $x = 0{,}05\,nD$,
„ „ „ künstlichem „ (Cement) $x = 0{,}1\,nD$,
„ hölzerne Röhren $x = 0{,}833\,nD + 0{,}027$.

D'Aubuisson wie Genieys rathen übrigens, um recht sicher zu gehen, alle Röhren auf 100 Meter Druckhöhe zu prüfen, wonach in die Formel des ersteren $H = 100$, in die Formeln des letzteren $n = 10$ gesetzt werden müßte.

Nach Redtenbacher[3]) lassen sich die Wanddicken der

---

[1]) Traité d'hydraulique; 2. éd. Paris 1840, p. 252.

[2]) Essai sur les moyens de conduire, d'élever et de distribuer les eaux Paris 1829, p. 177.

[3]) Resultate für den Maschinenbau. Sechste erweiterte Auflage von Dr. Grashof herausgegeben. Heidelberg 1875, Seite 76.

Röhren, wenn dieselben mit Sicherheit zu widerstehen im Stande sein sollen, aus nachstehenden Formeln berechnen, wenn δ die Wanddicke in Centimetern, d den inneren Durchmesser ebenfalls in Centimetern und n den in Atmosphären dargestellten inneren Druck bezeichnet:

Eisenblech	$\delta = 0{,}00125\ (n-1)\ d + 0{,}3$
Gußeisen	$\delta = 0{,}004\ (n-1)\ d + 0{,}5$
Kupfer	$\delta = 0{,}002\ (n-1)\ d + 0{,}1$
Blei	$\delta = 0{,}040\ (n-1)\ d + 0{,}1$
Zink	$\delta = 0{,}025\ (n-1)\ d + 0{,}1$
Holz	$\delta = 0{,}032\ (n-1)\ d + 2{,}7$
Natürlicher Stein	$\delta = 0{,}037\ (n-1)\ d + 3{,}0$
Künstlicher Stein	$\delta = 0{,}054\ (n-1)\ d + 4{,}0$

In Frankreich wurde 1843 vorgeschrieben, die Eisenblechstärken von Dampfkesseln nach der Formel zu berechnen:[1])

$$\text{IV.}\quad \delta = 1{,}8 \,.\, d\ (n-1) + 3,$$

worin d den Durchmesser des cylindrischen Kessels in Metern, n die Dampfspannung im Innern des Kessels in Atmosphären und δ die Blechdicke in Millimetern bezeichnet.

Diese französische Formel diente lange Zeit in fast allen Ländern zur gesetzlichen Bestimmung der Wanddicken von aus Eisenblech hergestellten Dampfkesseln, unter der Voraussetzung, daß diese nur Drücken von Innen nach Außen (inneren Ueberdruck) Widerstand zu leisten haben und wird noch gegenwärtig vielfach benutzt[2]).

Zusatz 1. Der Ausdruck I soll zuerst von Mariotte aufgestellt worden sein und ist man dabei von der (falschen) Voraussetzung ausgegangen, daß der Widerstand gegen Trennung in allen Punkten der Röhrenwand stets gleich groß sei, sie mögen näher oder entfernter der äußeren Oberfläche liegen. Dies ist auch der Grund, weshalb sich diese Formel nur dann für die Praxis brauchbar gezeigt hat, wenn die Wanddicke verhältnißmäßig gering ist, weil nur in diesem Falle die

---

[1]) Annales des Ponts et Chaussées, 1843, I, Pg. 372.

[2]) Im Almanach für die k. k. österreichische Kriegsmarine für 1878 wird S. 45 unter der Ueberschrift „Formeln für die Construction der Schiffsdampfkessel" bemerkt, daß die Kesselwandstärke für cylindrische, aus Eisenblech herzustellende Kessel zu berechnen sei aus:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\, d \,.\, \frac{p}{k} + 0{,}3.$$

Hierin bezeichnet δ die Kesselwanddicke in Centimetern, d den inneren Kesseldurchmesser ebenfalls in Centimetern, p die größte beabsichtigte Dampfspannung (Ueberdruck) in Kilogrammen pro Quadrat-Centimeter und k einen Coefficienten, der für gewöhnliche Fälle = 700, für vom Feuer bestrichene Wände = 350 ist. In der Zeitschrift des Verbandes der Dampfkessel-Ueberwachungs-Vereine, Nr. 6 (vom Monat Juni) 1878, S. 66, wird für Walzenkessel mit Ueberdruck von Innen nach Außen, fast ganz der alten französischen Formel entsprechend, folgender Abdruck (als Vereinsseitige Vorschrift) empfohlen:

$$\delta = 1{,}8 \,.\, d\ (n-1) + 4,$$

vorausgesetzt dieselben Bezeichnungen und Maaße wie Formel III.

Voraussetzung einer gleichmäßigen Vertheilung der Spannung über die ganze Dicke der Röhrenwand, oder die Annahme, daß nicht der geringste Grad von Elasticität vorhanden ist, gestattet werden kann. Für dicke Röhrenwände, beispielsweise für hydraulische Pressen, Geschützröhren etc., ist daher die Mariotte'sche Formel völlig unbrauchbar[1]).

Mit Rücksicht auf die Elasticität des Materials hat, nach Wissen des Verfassers, zuerst Barlow die erforderliche Wandstärke cylindrischer Röhren bestimmt (Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen. Dreizehnter Jahrgang, 1834, S. 121) und zwar unter Zuziehung der Hypothese, „daß für jede Ausdehnung der Röhre ihr Querschnitt immer denselben Flächeninhalt behalte“.

Hierdurch gelangt Barlow zu der Formel:

$$\text{V.} \quad x = \frac{pr}{k-p},$$

worin x die gesuchte Wanddicke bezeichnet, p den Druck auf den Quadratzoll der innern Oberfläche, r den innern Radius der Röhre und k die absolute Festigkeit des Materials, d. h. die Kraft bezeichnet, womit jeder Quadratzoll der Trennung Widerstand leistet.

Abgesehen von der Unrichtigkeit der genannten Hypothese ist die Richtigkeit dieser Formel auch deshalb zweifelhaft, weil sie für $k = p$ die Wanddicke unendlich groß giebt[2]).

Eine andere beachtenswerthe Formel leitete (1834) Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, 13. Jahrgang (1834), S. 124, unter der Hypothese ab, „daß für eine Ausdehnung, welche innerhalb der Grenzen vollkommener Elasticität bleibt, die Dicke der Röhrenwand keine Aenderung erleidet, oder, was dasselbe ist, daß die Differenz des äußern und innern Durchmessers vor und nach der Ausdehnung constant bleibt.

Hiermit gelangt Brix zu der Formel:

$$\text{VI.} \quad x = r\left[e^{\frac{p}{k}} - 1\right],$$

worin dieselben Buchstaben gleiche Bedeutung wie bei Barlow haben und $e = 2{,}71828\ldots$, d. h. die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist.

Diese Formel wurde längere Zeit hindurch im Königreich Preußen zur Berechnung der gesetzlichen Wanddicke bei Dampfkesseln benutzt[3]).

Frei von allen besonderen Hypothesen (wie Barlow und Brix), lediglich auf die Principien der Lehre vom Widerstande (elastischer)

---

[1]) Leider sind dem Verfasser die 1712 (2 Bde.) zu Leyden und 1740 zu Haag erschienenen Gesammtwerke Mariotte's nicht zur Hand. Eytelwein citirt hierbei in seiner Hydrostatik, S. 39, Mariotte's Erfahrungen unter dem Titel: „Divers ouvrages mathématiques et de physique par Mrs. de l'académie royale des sciences“, Paris 1693, Pg. 516.

[2]) Man sehe über die Barlow'sche Formel auch Bd. 9 (1826) S. 43 etc. der Jahrbücher des k. k. polytechn. Instituts in Wien.

[3]) Dabei wurde $p = 15 \cdot (n-1)$ Pfund und $k = \frac{50000}{15}$ in Rechnung gebracht, so daß sich ergab:

Materialien gegründet, entwickelte zuerst Lamé in seinen 1852 erschienenen berühmten „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides“, Pg. 191 (die vorstehenden Bezeichnungen beibehaltend):

$$\frac{x+r}{r} = \sqrt{\frac{k+p}{k-p+2p_0}}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\text{VII.} \quad x = r \left\{ -1 + \sqrt{\frac{k+p}{k-p+2p_0}} \right\}.$$

Mit p_0 wird hier der äußere auf die Rohrwand kommende Druck bezeichnet.

Die Lamé'sche Formel zeigt sich namentlich bei sehr großen Pressungen als nützlich, wo die Mariotte'sche Formel zu kleine Werthe giebt, während bei geringen Pressungen beide Formeln fast übereinstimmende Werthe liefern.

Hat man beispielsweise die Wanddicke eines gußeisernen Rohres von 30 Centimeter Radius zu berechnen, wobei im Innern eine Pressung von 13 Atmosphären statt hat, während auf die Außenfläche die atmosphärische Luft drückt, und nimmt man den Tragmodul des Gußeisens zu 300 Kil. pro Quadratcentimeter an, so giebt die Formel II:

$$x = \frac{30\,(13-1)}{300} = 1{,}20 \text{ Centimeter.}$$

Eben so liefert die Formel VII:

$$x = 30 \left\{ -1 + \sqrt{\frac{313}{289}} \right\} = 1{,}22 \text{ Centimeter.}$$ [1]).

Ist dagegen die erforderliche Wanddicke des Cylinders einer hydraulischen Presse zu ermitteln, wobei r ebenfalls 30 Centimeter, dagegen $p = 400$ Kil. (400 Atmosph.) ist und, des besseren Materials wegen, $k = 500$ Kil. angenommen wird, so liefert die Mariotte'sche Formel

$$x = \frac{30\,(400-1)}{500} = 24 \text{ Centimeter,}$$

$$x = r\left[-1 + e^{0{,}0045\,(n-1)}\right]$$

Daß hier n die Anzahl Atmosphären des Innendruckes bezeichnet und x in (preuß.) Zollen erhalten wird, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Was bereits seiner Zeit erfahrene Praktiker von allen diesen Formeln für Berechnung von Dampfkesselwanddicken hielten (d. h. höchst wenig) und deren Ansichten sich später dadurch bestätigten, daß man in dem (neuesten) Dampfkesselgesetze für das Königreich Preußen ganz von der gesetzlichen Vorschrift bestimmter Wanddicken für den gedachten Fall absah, erhellt besonders aus einem Artikel, welcher sich in Dingler's Polytechn. Journal, Bd. 111, S. 88 etc., abgedruckt vorfindet.

[1]) Der besonderen Merkwürdigkeit (!) wegen citirt der Verfasser noch eine Abhandlung, welche die Ueberschrift trägt: „Die Bestimmung der Wandstärken gußeiserner Rohre“, welche im 18. Bande (1872) S. 495 der Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins abgedruckt ist. Als Commentar hierzu dienen Artikel in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XVII (1873), S. 219 und Bd. XIX (1875), S. 101. Ferner im Journal für Gasbeleuchtung (von Schilling), Jahrg. 1875, S. 66.

die Lamé'sche Formel[1]) dagegen

$$x = 30 \left\{ -1 + \sqrt{\frac{900}{98}} \right\} = 60 \text{ Centimeter.}$$

Der Unfall[2]), welcher sich durch das Platzen fast aller hydraulischen Pressen ereignete, als man seiner Zeit bemüht war, das berühmte Riesenschiff „Great Eastern" vom Stapel zu lassen, findet hiernach seine natürliche Erklärung.

Die Lamé'sche Formel enthält übrigens noch das für die Praxis wichtige Resultat, daß es für jedes Material einen Grenzwerth des inneren Druckes giebt, welcher in keinem Falle überschritten werden darf, wie groß auch die Wanddicke und wie klein die innere Weite der Röhre auch sein mag. Dieser Grenzwerth ist $p = k + p_0$, oder, wenn kein äußerer Druck vorhanden wäre, $p = k$, d. h. gleich der absoluten Festigkeit des Materials.

Eine der Lamé'schen fast gleiche Formel, für die Wanddicken hydraulischer Preßcylinder, entwickelt Grashof in seinem ausgezeichneten Werke „Die Elasticitätslehre", Berlin 1878, Zweite Auflage, S. 327 (Nr. 571), nämlich:

$$x = r \left\{ -1 + \sqrt{\frac{k + 0{,}5\,p}{k - p}} \right\}.$$

Sämmtliche Formeln sind praktisch unbrauchbar, sobald, bei cylindrischen Röhren, die Länge den Durchmesser um mehr als das dreifache übertrifft und der Druck (Ueberdruck) von Außen nach Innen gerichtet ist, ein Fall, der beispielsweise vielfach bei Dampfkesseln eintritt.

Zur Zeit sind alle Versuche zur Herleitung zuverlässiger, praktischer Formeln für letztern Zweck an der Schwierigkeit der Aufgabe an sich gescheitert[3]), so wie auch daran, welche Form der Abweichungen von der Kreisform man bei den Rechnungen zu Grunde legen soll[4]). Nur soviel steht fest, daß hierbei die Länge der Röhre nicht außer Acht gelassen werden darf.

Deshalb sind hier Versuche von besonderem Werthe, welche die Bildung einer empirischen Formel gestatten.

Dergleichen Versuche hat der bekannte englische Ingenieur W. Fairbairn mit Eisenblechröhren von 10 bis 48 Centimeter Durchmesser und von 48 bis 155 Centimeter Länge angestellt[5]) und daraus eine Formel von der Form

$$x = \mu \sqrt{pdl}$$

[1]) Vereinfachte Ableitungsmethoden der Lamé'schen Formel haben geliefert: Scheffler in seiner Abhandlung „Die Elasticitätsverhältnisse der Röhren". Wiesbaden 1859. Dann Dwelshauvers-Dery in der „Revue Universelle", Tome 35 (1874), Pg. 73 und hiernach Prof. Keck im XX. Bande (1874) S. 622 der Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins.

[2]) Rühlmann, Allgem. Maschinenlehre, Bd. 1, S. 5 (2. Auflage) und das „Practical mech. Journal", 1857—58, Pg. 191.

[3]) Wiebe, „Lehre von der einfachen Maschinentheilung", Bd. I. S. 359.

[4]) Weisbach, „Ingenieur- und Maschinen-Mechanik". Zweiter Theil. Vierte Auflage (1865), S. 919, §. 411.

[5]) Zeuner, „Civilingenieur", Bd. 4, S. 53.

abgeleitet, wenn man die vorigen Bezeichnungen beibehält, l die Länge der Röhre und μ einen Erfahrungcoefficienten bezeichnet.

Wird l in Metern, d in Centimetern ausgedrückt und bez. p den Dampfdruck in Kilogrammen pro Quadratcentimeter, so ergiebt sich die erforderliche Wandstärke in Millimetern zu

$$x = 0{,}27 \sqrt{pld}.$$

Grashof[1]) hat aus 21 Fairbairn'schen Versuchen, mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, die empirische Formel

$$n = 7790 \frac{\delta^{2,215}}{l d^{1,278}}$$

abgeleitet, worin l die Länge der Röhre in Centimetern, d den Durchmesser in Centimetern, δ die Blechdicke in Millimetern und n den Ueberdruck in Atmosphären bezeichnet, durch welche die Röhre zerdrückt wird.

Da jedoch diese Formel die wichtigeren Versuche mit dickeren Blechen nicht genügend wiedergiebt, so wurde eine zweite Formel hergestellt, welche den gedachten Versuchen genau entspricht. Diese ist

$$n = 325 \frac{\delta^{2,081}}{l^{0,564} d^{0,889}}.$$

Eine noch andere Formel leitete der französische Ingenieur Love[2]) aus den erwähnten Fairbairn'schen Versuchen ab, deren Gestalt mit einer noch andern übereinstimmt, welche nachher von der „Commission der Hütte“ in Berlin[3]) abgeleitet wurde und die mit ihren Coefficienten (Alles in Centimetern ausgedrückt) nachstehende Gestalt hat:

$$p_1 = 376721 \frac{\delta^2}{ld} + 1160 \frac{\delta^2}{d} - 93 \frac{\delta}{d}.$$

Dabei bezeichnet p_1 den äußeren Druck pro Kilogramm der Fläche, welcher nöthig ist, um die Elasticitätsgrenze schmiedeeiserner Röhren gerade zu überschreiten.

Der Verfasser muß Grashof beistimmen, welcher S. 244 der ersten Auflage seiner Festigkeitslehre hervorhebt, daß diese sämmtlichen Formeln vorläufig nur als Nothbehelfe zu betrachten sind.

Da es Zweck und Umfang der Hydromechanik überschreiten würde, auf die Berechnung von Wandstärken anderer Gefäße, beispielsweise auf kugelförmige, auf solche mit ebenen Wandflächen u. A. einzugehen, so sieht sich der Verfasser in dieser Hinsicht genöthigt, auf die mehrfach citirten Werke, namentlich auf die vortreffliche Grashof'sche Festigkeitslehre zu verweisen.

§. 22.

Aufgabe 3. Man soll eine Gleichung zur Berechnung der Querschnittsdimensionen eines gekrümmten Schleusenthores ABC, Fig. 23 entwickeln.

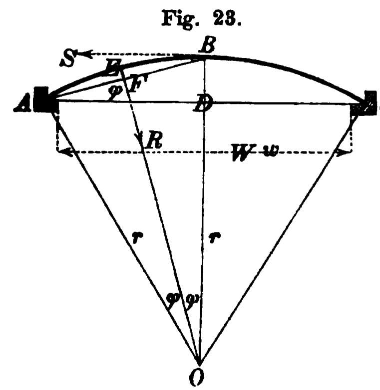
---

[1]) „Theorie der Elasticität und Festigkeit“, S. 329 (2. Auflage).

[2]) „Civil-Ingenieur“, Jahrg. 1861, S. 238 und Zeitschrift des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, Jahrg. 1870, S. 117.

[3]) In letzterer Quelle S. 119.

Fig. 23.



Auflösung. Behalten wir ganz die Bezeichnungen von Aufgabe 2 §. 18 bei, bezeichnen wir überdies den Wasserdruck pro Längeneinheit des Bogens AB mit q, d. h. setzen $\gamma b h = q$, so ist die Achsenspannung $= t$ nach voriger Aufgabe in der Curve ABC an einer Stelle, wo ϱ der Krümmungshalbmesser ist: $t = q \cdot \varrho$.

Nehmen wir ABC als einen Kreisbogen und setzen $AO = BO = r$, so folgt die überall gleiche Achsenspannung

$$(1) \quad t = q\, r.$$

Ersetzen wir jetzt wiederum die eine Hälfte BC durch eine Horizontalkraft $= S$, so ergiebt sich dieselbe, wegen $S \cdot \overline{BD} = R \cdot \overline{AF}$, wo R den Wasserdruck $= q \cdot \overline{AB}$ auf die Curve AEB in der Richtung EO bezeichnet, zu $S = q \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \cdot \overline{AF} = q \cdot \frac{\overline{AF}}{\sin\varphi}$[1] $= q \cdot r$ wie bereits in (1) gefunden. Aber $2\,\overline{AF} \cdot \cos\varphi = \frac{w}{2}$, also $\overline{AF} = \frac{w}{4 \cdot \cos\varphi}$, daher auch $S = \frac{q w}{4 \sin\varphi \cos\varphi} = \frac{q w}{2 \sin\varphi\, 2\varphi} = \frac{\gamma b h w}{2 \sin 2\varphi}$.

Wird endlich das Tragvermögen des Thormaterials pro Flächeneinheit mit k und der Thorquerschnitt mit A bezeichnet, so ist

$$\text{I.} \quad A = \frac{\gamma b h w}{2 k \sin 2\varphi}.$$

Hierbei ist abermals das Thorgewicht unbeachtet gelassen. Man sehe deshalb Navier, Baumechanik §. 574.

§. 23.

Vom Mittelpunkte des Druckes.

Unter dem Mittelpunkte des Druckes versteht man den Angriffspunkt der Mittelkraft, welche den sämmtlichen, auf die einzelnen Punkte einer Fläche wirkenden Normaldrücken des Wassers entspricht. Zur Bestimmung statischer Momente ist die Kenntniß der Lage dieses Punktes durchaus nothwendig.

Bei (horizontalen) Bodenflächen, wo alle Elemente gleichen Druck erfahren, fällt der Mittelpunkt des Druckes mit dem Schwerpunkte zusammen. Bei allen Seitenwänden liegt er dagegen stets unter dem Schwerpunkte derselben, weil hier die Drücke auf die einzelnen Punkte mit deren Tiefe unter dem Wasserspiegel zunehmen.

Zuerst werde der Mittelpunkt des Druckes für ebene Seiten-

---

[1] Im $\triangle AFO$ ist $\angle AOF = \varphi$, folglich $\frac{AF}{AO} = \sin\varphi$ oder $\frac{AF}{\sin\varphi} = AO = r$.

wände bestimmt, was nach dem Früheren einfach darin bestehen wird, den Angriffspunkt der Mittelkraft für ein System paralleler Kräfte zu suchen.

Für den Fall, daß die gedrückte Seitenwand durch eine gerade Linie in zwei symmetrische Theile getheilt wird, also zu beiden Seiten derselben gleiche statische Momente liegen, muß sich der zu suchende Angriffspunkt in dieser Geraden befinden, und man wird nur nöthig haben, dessen Abstand von einer geraden Linie anzugeben, welche man in der Ebene der gedrückten Fläche als Momentenachse angenommen hat.

Der Einfachheit wegen wählt man letztere entweder so, daß sie, durch den höchsten Punkt der Fläche gehend, parallel zum Wasserspiegel liegt, oder daß sie mit der Linie zusammenfällt, in welcher die Ebene der gedrückten Fläche den Oberwasserspiegel schneidet.

Die gedrückte Fläche theilt man sodann in Elemente, deren Begrenzungslinie parallel zur Momentenachse sind, bestimmt die statischen Momente der Normaldrücke, welche diese Elemente erfahren, und dividirt deren Summe durch den Normaldruck auf die Gesammtfläche; der Quotient giebt den gesuchten Abstand des Druckmittelpunktes.

Läßt sich die Scheidewand nicht, wie vorbemerkt, durch eine Gerade theilen, so hat man die Momente der Druckelemente noch in Bezug auf eine zweite Achse zu bestimmen, welche erstere unter einem (rechten) Winkel schneidet und gleichfalls in der Ebene der gedrückten Wand liegt u. s. w.

Um endlich den Mittelpunkt des Druckes für ein krummes Wandstück zu bestimmen, hat man (u. A. nach §. 65 der „Grundzüge der Mechanik“, 3. Auflage des Verfassers) die Normaldrücke auf die Elemente der krummen Fläche in Seitenkräfte zu zerlegen und die entsprechenden Resultirenden aufzusuchen.

Diese ihrer Lage und Größe nach so bestimmten Resultirenden lassen sich jedoch nur unter besonderen Umständen zu einer einzigen Resultante vereinigen; ist daher Letzteres nicht der Fall, so kann natürlich von einem Mittelpunkte des Druckes im obigen Sinne nicht die Rede sein. Zu den bemerkten Fällen, wo eine einzige Mittelkraft möglich ist, gehört namentlich der, wenn die gedrückte Wand die Flüssigkeit überall umgiebt, wie später gezeigt werden wird.

§. 24.

Mit Bezug auf den vorigen Paragraphen werde nun der Mittelpunkt des Druckes für eine ebene Fläche FF', Fig. 24, bestimmt, die ganz unter dem Wasserspiegel liegt und gegen den Horizont unter einem Winkel α geneigt ist. Die Gerade UX sei die Durchschnittslinie der Ebene der Fläche FF' mit dem Wasserspiegel WW und zugleich die Abscissenachse eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Ordinatenachse UY in der Ebene von FF' liegt. Die Coordinaten eines beliebigen aber unendlich kleinen Flächenelementes mn, dessen Inhalt $= \lambda$ sein mag, bezeichnen wir mit

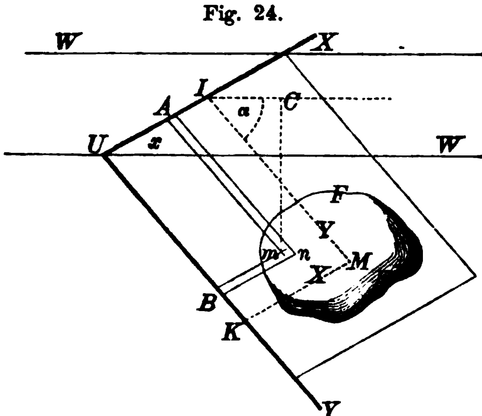


Fig. 24.

x ($= UA = Bm$) und mit y ($= UB = Am$) und erhalten sonach, weil die Druckhöhe $mC = y \sin \alpha$ ist, den Normaldruck des Wassers auf mn: $\gamma \lambda y \sin \alpha$ und die Summe aller dieser Drücke $= \gamma \sin \alpha \, \Sigma \, (\lambda y) = \gamma \, . \, P \sin \alpha$, wenn $\Sigma \, (\lambda y) = P$ gesetzt wird. Die statischen Momente dieses Druckes in Bezug auf die Achsen UX und UY ergeben sich daher ohne Weiteres respective zu $\gamma \sin \alpha \, \Sigma \, (\lambda y^2)$ und $\gamma \sin \alpha \, \Sigma \, (\lambda x y)$. Setzt man daher die Coordinaten des Druckmittelpunktes $IM = Y$, $KM = X$, so folgt nach dem bekannten Satze, daß das statische Moment des Ganzen gleich der Summe der statischen Momente der Theile sein muß:

$$Y . \gamma P \sin \alpha = \gamma \sin \alpha \, \Sigma \, (\lambda y^2) \text{ und}$$
$$X \gamma P \sin \alpha = \gamma \sin \alpha \, \Sigma \, (\lambda x y), \text{ d. i.}$$
$$\text{I. } Y = \frac{\Sigma \, (\lambda y^2)}{P} \text{ und II. } X = \frac{\Sigma \, (\lambda x y)}{P}.$$

Der Zähler des ersten Ausdruckes ist aber nichts anders als das Trägheitsmoment der gedrückten Fläche in Bezug auf eine Achse, welche in ihrer Ebene und zugleich im Oberwasserspiegel liegt, so wie im zweiten Ausdrucke der Zähler das Centrifugalmoment derselben Fläche auf dieselbe Achse bezogen bezeichnet. Zugleich folgt hieraus, daß der Mittelpunkt des Wasserdruckes für eine ebene Fläche nichts anderes als der Mittelpunkt des Stoßes ist, wenn man die Abscissenachse UX als Drehachse der Fläche FF' betrachtet.

Für eine Fläche, die in einer zur Ordinatenachse UY symmetrische Lage gebracht werden kann, wird $\Sigma \lambda x y$ gleich Null, weil dann jedem $+ x$ auf der einen Seite dieser Achse ein $- x$ auf der andern entspricht. Man erhält daher, wenn überdies das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Achse UX mit T bezeichnet wird:

$$\text{III. } Y = \frac{T}{P},$$

in diesem Falle findet man also den Mittelpunkt des Druckes, indem man das Trägheitsmoment der gedrückten Fläche durch das statische Moment der Fläche dividirt, beide Momente auf dieselbe Achse bezogen, welche in der Ebene der Fläche und im Wasserspiegel liegt.

Der so bestimmte Druckmittelpunkt fällt daher auch mit dem Schwingungspunkte der Fläche zusammen, wenn UX abermals die Drehachse bildet.

Fig. 25.

Zusatz 1. Für ein vertical stehendes Rechteck $ABCD$, Fig. 25, dessen obere Kante $BC = b$ mit dem Wasserspiegel WW zusammenfällt und dessen Höhe $= h$ ist, erhält man daher, wegen $T = \frac{1}{3} bh^3$ und $P = \frac{bh^2}{2}$ sofort:

$$Y = \frac{\frac{1}{3} bh^3}{\frac{1}{2} bh^2} = \frac{2}{3} h.$$

Steht dagegen die obere Kante um e vom Oberwasserspiegel ab, d. h. bildet $W'W'$ den Wasserspiegel, so ist

$$T = \frac{1}{12} bh^3 + bh\left(e + \frac{h}{2}\right)^2, \text{ so wie}$$

$$P = bh\left(e + \frac{h}{2}\right), \text{ daher}$$

$$Y = \frac{e^2 + eh + \frac{1}{3} h^2}{e + \frac{h}{2}}$$

Für eine vertical stehende Kreisfläche vom Halbmesser $= r$, deren höchster Punkt um e unterm Wasserspiegel liegt, ist ähnlich wie vorher:

$$T = \frac{1}{4} \pi r^4 + r^2 \pi (r + e)^2$$

$$P = \pi r^2 (r + e), \text{ folglich}$$

$$Y = \frac{r^2 + 4(r + e)^2}{4(r + e)}.$$

Fällt der höchste Punkt der Kreisfläche mit dem Wasserspiegel zusammen, so wird $e =$ Null und $Y = \frac{5}{4} r$.

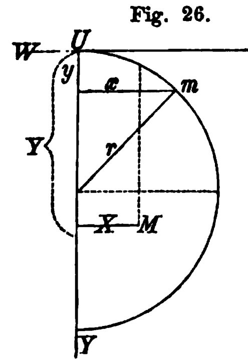
[§. 25.]

Für nicht symmetrische Flächen läßt sich genau genommen der Mittelpunkt des Druckes nur mit Hülfe der Differential- und Integralrechnung bestimmen, was in diesem Paragraphen gezeigt werden soll.

Die Formeln I und II geben, in die Sprache der genannten Rechnung übersetzt, sofort:

$$Y = \frac{\int y^2\, dx\, dy}{\int y\, dx\, dy}; \quad X = \frac{\int xy\, dx\, dy}{\int y\, dx\, dy}.$$

Fig. 26.



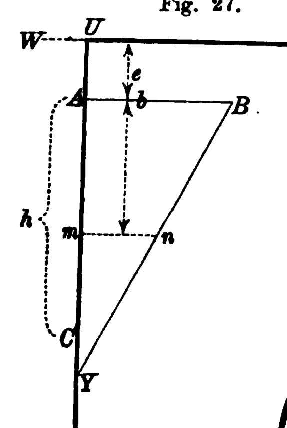
Mittelst derselben mögen folgende specielle Fälle behandelt werden:

(1) Mittelpunkt des Druckes eines Halbkreises von Radius $= r$, Fig. 26, dessen verticaler Durchmesser mit der Verticalachse UY, und der Coordinatenursprung im Endpunkte des Durchmessers mit dem Wasserspiegel WW zusammenfallen mag. Für einen Punkt m der Kreisperipherie hat man bekanntlich $x^2 = 2ry - y^2$, folglich:

$$Y = \frac{\int_0^{2r} y^2\,dy \int_0^{\sqrt{2ry - y^2}} dx}{\int_0^{2r} y\,dy \int_0^{\sqrt{2ry - y^2}} dx} = \frac{\frac{5}{8} r^4 \pi}{\frac{1}{2} r^3 \pi} = \frac{5}{4} r;\ ^{1)}$$

$$X = \frac{\int_0^{2r} ydy \int_0^{\sqrt{2ry - y^2}} xdx}{\int_0^{2r} ydy \int_0^{\sqrt{2ry - y^2}} dx} = \frac{\frac{2}{3} r^4}{\frac{1}{2} r^3 \pi} = \frac{4r}{3\pi}$$

Fig. 27.



(2) Mittelpunkt des Druckes für ein ebenes Dreieck ABC, Fig. 27, dessen eine Cathete $AC = h$ vertical liegt, mit der Ordinatenachse UY zusammenfällt, während die andere Cathete $AB = b$ um e vom Oberwasserspiegel absteht.

Zuerst erhält man hier für die Breite mn in dem beliebigen Abstande $Um = y$: $mn = \frac{b}{h}(h + e - y)$ und sodann:

$$Y = \frac{\int_e^{e+h} y^2\,dy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} dx}{\int_e^{e+h} ydy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} dx} = \frac{h^2 + 4he + 6e^2}{2h + 6e};$$

$$X = \frac{\int_e^{e+h} ydy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} xdx}{\int_e^{e+h} ydy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} dx} = \frac{b}{4}\,\frac{h + 4e}{h + 3e}.$$

---

[1]) $\int dz \sqrt{2az - z^2} = -\frac{1}{2}(a - z)\sqrt{2az - z^2} + \frac{1}{2}a^2 \text{arc sin vers.}\left(\frac{z}{a}\right) + C$

$= -\frac{1}{2}(a - z)\sqrt{2az - z^2} + a^2 \text{arc sin} \sqrt{\frac{z}{2a}} + C$

$\int zdz \sqrt{2az - z^2} = -\frac{1}{3}\sqrt{(2az - z^2)^3} + a\int dz \sqrt{2az - z^2},$

$\int z^2 dz \sqrt{2az - z^2} = -\frac{5a + 3z}{12}\sqrt{(2az - z^2)^3} + \frac{5a^2}{4}\int dz \sqrt{2az - z^2}.$

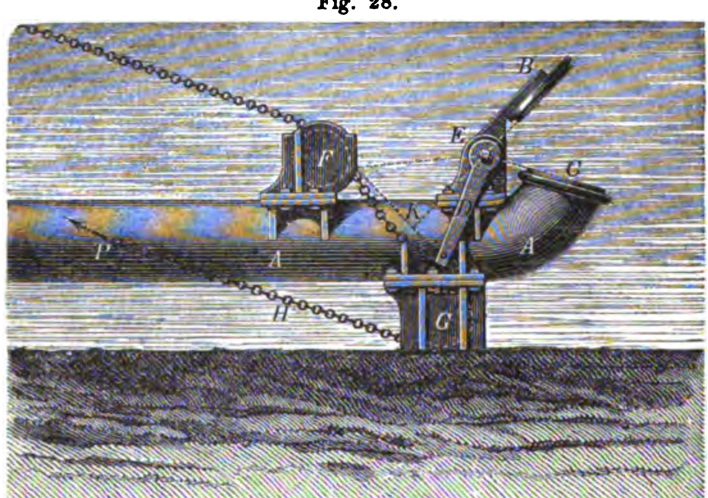
Für e = Null wird $Y = \frac{1}{2} h$ und $X = \frac{1}{4} b$. Genau dieselben Werthe lassen sich für den Mittelpunkt des Stoßes einer Dreieckfläche finden.

§. 26.

Zur Anwendung der Lehre vom Mittelpunkte des Druckes folgen hier noch einige praktische Aufgaben.

Aufgabe 1. Zur Abführung des Wassers aus dem Speisebassin des von Telford erbauten Birmingham und Warwick Canales [1]) dient eine 18 Zoll (engl.) weite Röhrenleitung A, Fig. 28, (welche

Fig. 28.



horizontal durch den Bassin-Damm geht), die an der Eintrittsstelle C durch eine kreisförmige Scheibe B geschlossen und geöffnet werden kann. Für den Zweck dieser Bewegung ist die Scheibe mit einem Arme D derartig verbunden, daß überhaupt eine um E als Achse drehbare Hebelanordnung gebildet wird. Ueber feste Rollen F und G geleitete Ketten dienen respective zum Schließen und Oeffnen der Klappe B etc., welche Ketten der dreifüßigen (Höhe zur Anlage = 1 : 3) Dammböschung parallel bis zur Dammkrone geführt sind, sich dort auf die Trommel einer mit Räderwerk versehenen Aufzugsmaschine (Winde) wickeln etc.

Es soll die Zugkraft = P in der Kette K für den Anfang der Bewegung der als geschlossen gedachten Klappe, mit Nichtbeachtung aller Reibungen, bestimmt werden, wenn man weiß, daß die Druckhöhe für den Schwerpunkt der kreisförmigen Klappe 43 Fuß englisch, der Radius der Kreisscheibe $B = 11\frac{1}{2}$ Zoll, der Neigungswinkel der Klappe gegen den Horizont (parallel der Dammböschung) $18^\circ\ 26'$ ($\frac{1}{3} = \text{tg. } 18^\circ\ 26'$), der Hebelarm der Zugkraft

[1]) Life of Telford, p. 80, Plate 29 und Hagen, Wasserbau, II. Theil, 3. Bd., S. 576.

= 22 Zoll, die Entfernung EB des Hebeldrehpunktes von der Klappenmitte = 19 Zoll beträgt und ein Cubikfuß (engl.) Wasser = 62,5 ℔ gerechnet wird [1]).

Auflösung. Es sei allgemein r der Radius des Klappenkreises, L die Entfernung des Mittelpunktes vom Wasserspiegel, in der Dammböschungsrichtung gemessen, und Y die Entfernung des Druckmittelpunktes in Bezug auf die Gerade der Achse, wo der Oberwasserspiegel die Dammböschung berührt.

Sodann ist nach §. 25:

$$Y = \frac{\frac{1}{4} r^4 \pi + r^2 \pi L^2}{r^2 \pi L} = \frac{r^2}{4L} + L, \text{ d. i.}$$

wegen $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}$ und $L = \frac{43'}{\sin \varphi} = 135',988$ engl., $r = 11'',5$:

$$Y = 0',0017 + 135',978 = 135',9797.$$

Ferner ist der Wasserdruck auf die Klappe:

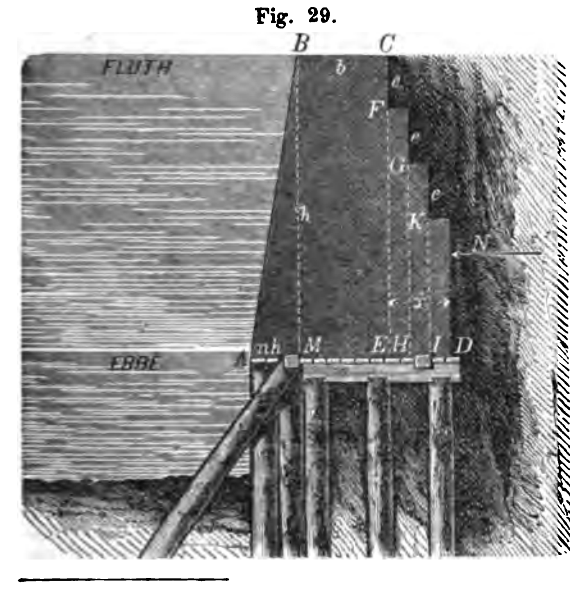
$$\left(\frac{11,5}{12}\right)^2 \pi \,.\, 43 \,.\, 62,5 = 7754,104 \text{ ℔}.$$

Der Hebelarm dieses Druckes: $19'' + 0',0017 = 19'' + 0'',0203$
$= 19,0203$ Zoll,

" " der Zugkraft = 22'', sonach endlich:

$$P = \frac{19,0203 \,.\, 7754,104}{22} = 6703,9 \text{ ℔}.$$

Fig. 29.



Aufgabe 2. An einem Fluth und Ebbe haltenden Strome wird die Anlegung einer Kaimauer, Fig. 29, beabsichtigt, welche auf einen Pfahlrost zu gründen ist und eine obere Breite $b = 4' \, 3''$ ($= 1^m,24$) und eine gegen die Wasserseite frei stehende Höhe $h = 17' \, 4''$ ($= 5^m,0$) erhalten soll. Die Anlage AM der Vorderfläche AB sei $nh = 1'6''$ ($= 0^m,44$) festgesetzt u. von der Krone ab nach unten drei Bankets, jedes von $e = 3'$ ($= 0^m,876$)

[1]) Entsprechend dem Original, woraus der Verfasser vorstehende Aufgabe entnahm, sind auch hier die englischen Maaße und Gewichte beibehalten worden. Für Bau- und Maschinen-Ingenieure haben die englischen Maaße insofern (neben dem Metermaaße) eine besondere Bedeutung, als weder für England noch Nord-

Höhe und gleicher Breite $= \frac{x}{3}$ angeordnet. Man soll die Dicke $ED = x$ der hinteren Maueranlage unter der Voraussetzung berechnen, daß das Erdreich N, was gegen die Mauer drückt, gleiche Dichte mit dem Wasser habe, das Mauerwerk eine Dichte $= q$ besitze und der Druck der Masse N eine Drehung der Mauer um die Kante A zu bewirken strebt. Endlich werde $\gamma = 53{,}2$ ℔ (hannov.) gesetzt und $q = 2\gamma$.[1])

Auflösung. Nach §. 20 ist das Moment des Wasserdruckes in Bezug auf die Kante A, wenn die auf der Bildfläche normale Mauerdimension $= 1$ gesetzt wird: $\gamma h \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{\gamma h^3}{6}$, oder wenn m einen Sicherheitscoefficienten $m > 1$ bezeichnet: $\frac{m\gamma h^3}{6}$. Setzt man diesen Werth der Summe der statischen Momente der sämmtlichen Mauertheile, einschließlich des auf die Bankets kommenden Flüssigkeitsdruckes gleich, so erhält man folgende Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht, aus welcher x zu reduciren ist:

$$\text{I.}\quad \frac{m\gamma h^3}{6} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3} q n^2 h^3 \\ + qbh\left(nh + \frac{1}{2} b\right) \\ + \left[\frac{qx}{3}(h-e) + \frac{\gamma e x}{3}\right]\left(nh + b + \frac{x}{6}\right) \\ + \left[\frac{qx}{3}(h-2e) + \frac{2\gamma e x}{3}\right]\left(nh + b + \frac{3x}{6}\right) \\ + \left[\frac{qx}{3}(h-3e) + \frac{3\gamma e x}{3}\right]\left(nh + b + \frac{5x}{6}\right) \end{array}\right\}$$

Für eine Mauer, wo die innere Seite CD vertical also $x =$ Null ist, kann man b als unbekannt voraussetzen, so daß man erhält:

$$\frac{q}{3} n^2 h^3 + qbh\left(nh + \frac{1}{2} b\right) = \frac{m}{6} \gamma h^3 \text{ und hieraus}$$

$$\text{II.}\quad b = h\left(-n + \sqrt{\tfrac{1}{3} n^2 + \frac{m\gamma}{3q}}\right).$$

---

amerika Aussicht vorhanden ist, daß in diesen Ländern das Metermaaß in nächster Zeit allgemein eingeführt wird.

Man merke deshalb, daß man den englischen Fuß $= 0{,}305$ Meter und den englischen Zoll $= 25{,}4$ Millimeter setzen und das englische Pfund $= 0{,}453$ Kilogramm annehmen kann.

[1]) Diese Aufgabe behandelt eine beim Baue des Geestemünder Hafens gestellte Aufgabe, wo die Ingenieure seiner Zeit (1855) noch verpflichtet waren, nach hannover'schen Maaßen zu rechnen und zu arbeiten. Aus letzterem Grunde schien es dem Verfasser angemessen, in diesem Falle auch in der 2. Auflage der Hydrodynamik die älteren Maaßgrößen beizubehalten und nur überall die Reduction in Meter beizusetzen. Man sehe hierzu „Technische Mittheilungen über die Hafenplätze Geestemünde und Bremerhafen" im Jahrgang 1855 der Zeitschr. d. Hannov. Archit.- und Ingen.-Vereins, S. 45, Blatt 4, Fig. 4.

Endlich ist zu bemerken, daß durch ein Versehen der Zeichner in Fig. 29 die Spundwand in verticaler Richtung unter M anzugeben vergessen hat.

Endlich, wenn auch die Vorderfläche ungeböscht, also noch $n =$ Null ist:

$$\text{III.} \quad b = h\sqrt{\frac{m\gamma}{3q}}.$$

Für's mathematische Gleichgewicht, d. h. wenn $m = 1$ ist und überdies $q = 2\gamma$ folgt:

$$\text{IV.} \quad b = 0{,}408 \, . \, h,$$

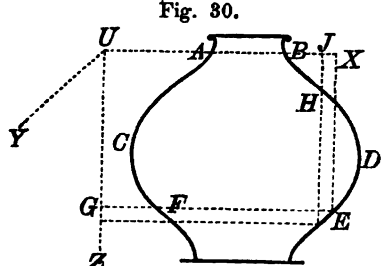
woraus sich die praktische Regel erklärt, derartige Mauern halb so dick zu machen, als der hinter ihnen befindliche Wasserstand beträgt. Für obige Zahlenwerthe wird $x = 2{,}799$ Fuß ($= 0{,}817$ Meter), wenn $m = 1$ ist und $x = 4{,}287$ Fuß ($= 1{,}252$ Meter) für $m = \frac{3}{2}$. Der ausführende Ingenieur hat (Geestehafenbau) $x = 3{,}33$ Fuß (0,972 Meter) genommen.

Die Formel IV erklärt die Angabe Minard's (Navigation des rivières, Chap. XIV, p. 170), daß er $b = 0{,}4\,h$ bei ungefähr 400 Schleusen als Mittelwerth gefunden habe.

§. 27.

Mittelkraft aus den Druckkräften, wenn die gedrückte Fläche die Flüssigkeit von allen Seiten umgiebt.

Fig. 30.



Es sei $ABCD$, Fig. 30, ein ganz beliebig gestaltetes Gefäß, welches bis AB mit Wasser gefüllt ist. E sei ein Element der Wandfläche, ω der Flächeninhalt desselben, und die zugehörige Druckhöhe $JE = z$. Der Normaldruck gegen dieses Element werde wie in §. 23 in Seitenkräfte zerlegt, welche den drei Achsen eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes parallel sind, und wovon die UX und UY in der Ebene des Wasserspiegels liegen mögen, UZ also mit der Schwerkraftsrichtung zusammenfällt. Bezeichnet man sodann die Projection des Elementes ω gegen die Ebenen YZ, XZ und XY mit a, b und c, so erhält man nach §. 19 für die horizontalen Seitenkräfte γaz und γbz, für die verticalen γcz.

Um nun zunächst die Mittelkraft der Horizontalkräfte anzugeben, werde das horizontale Prisma GE betrachtet und das Element E auf die Ebene YZ projicirt. Dies Prisma schneidet auf der Gefäßwand bei F nothwendig ein Element ab, dessen Projection auf die Ebene YZ dieselbe Größe wie die Projection des Elementes E, auch dieselbe Druckhöhe wie letzteres hat, so daß beide Elemente einerlei Druck $= \gamma az$ in horizontaler Richtung nach Außen erfahren. Die Richtungen dieser beiden Drücke wirken aber in derselben Geraden einander genau entgegen, heben sich daher völlig auf und tragen Nichts zur Bildung der respectiven Mittelkraft bei. Leicht erkennt man aber, daß dasselbe nicht nur von allen übrigen Drücken, die UX parallel gerichtet sind, nachgewiesen werden

kann, sondern auch von jenen, welche UY parallel sind. Ueberhaupt folgt daher der Satz:

Alle Drücke, welche das Wasser auf die verschiedenen Theile der Seitenwand eines Gefäßes nach horizontalen Richtungen ausübt, heben sich gegenseitig auf, oder das ganze Gefäß wird vom Wasser nach horizontalen Richtungen gleich stark gedrückt.

Wie daher auch die Form des Gefäßes sein mag, welches die Flüssigkeit überall umgiebt, so wird doch durch letztere dem Gefäße kein Bestreben zu irgend einer horizontalen Bewegung ertheilt. Vorausgesetzt ist natürlich hierbei, daß die Festigkeit der Gefäßwände hinreicht, sämmtliche Horizontaldrücke zu vernichten.

Bringt man dagegen an irgend einer Stelle der Wand eine Oeffnung an, so wird der Druck an der gegenüber liegenden Stelle nicht mehr aufgehoben, und das Gefäß wird sich bestreben, eine horizontal gerichtete Bewegung anzunehmen. Hierauf beruht unter Anderem die Wirkung einer besonderen Art von Wasserrädern, die man deshalb Reactionsräder genannt hat.

Zur Bestimmung der fraglichen Mittelkraft bleiben daher die verticalen Seitenkräfte allein übrig. Hierzu werde das verticale Prisma EHJ betrachtet und das Element E auf die Ebene XY projicirt gedacht. Das Prisma schneidet auf der Gefäßwand, oberhalb, ein zweites Element H ab, welches auf XY gleiche Projection wie E, aber nicht dieselbe Druckhöhe hat. Bezeichnet man letztere, d. i. HJ, mit z', so ist der vertical aufwärts gerichtete Druck gegen das Element $H = \gamma c z'$. Diesem Drucke wirkt aber der gegen E, d. i. $\gamma c z$, genau entgegen, so daß wegen $z > z'$, als verticale Seitenkraft für die zu bildende Mittelkraft: $\gamma c\,(z - z')$, das Gewicht eines Wasserprismas verbleibt, welches c zur Grundfläche und $z - z'$ zur Höhe hat. Ueberhaupt wird also hiernach die zu suchende Mittelkraft aus der Summe der Gewichte so vieler ähnlicher Prismen wie EH bestehen, als man solche innerhalb des Gefäßes gebildet denken kann; diejenigen Prismen, deren obere Endfläche in den Wasserspiegel fällt, können an dem vorhergehenden Resultate Nichts ändern.

Aus Allem ergiebt sich aber,

daß die Mittelkraft aus allen Druckkräften einer Flüssigkeit, welche vom Gefäße überall umgeben wird, und wobei letzteres gehörigen Widerstand leistet, dem Gewichte der Flüssigkeit gleich ist; oder die Kraft, womit ein Gefäß vom darin befindlichen Wasser vertical abwärts getrieben wird, ist dem Gewichte des darin enthaltenen Wassers gleich.

Da man alle Seitenkräfte, die zur Bildung dieser Mittelkraft beitragen, unmittelbar als Gewichte betrachten kann, so muß die Richtung der Mittelkraft durch den Schwerpunkt des flüssigen Körpers gehen.

Drittes Capitel.

Gleichgewicht des Wassers mit eingetauchten festen Körpern.

§. 28.

Druck des Wassers gegen eingetauchte Körper.

Archimedisches Princip.

Aus einer einfachen Betrachtung wird zu entnehmen sein, daß sich der Druck, welchen ein in eine Flüssigkeit getauchter fester (freier) Körper überhaupt erfährt, ganz auf dieselbe Weise auffinden lassen muß, wie in §. 27 der Druck gegen eine die Flüssigkeit überall umgebende Fläche.

Die hier nach entsprechender Zerlegung erhaltenen Seitenkräfte unterscheiden sich von den an gedachtem Orte nur durch die relativen Zeichen, indem jetzt die Horizontalkräfte von Außen nach Innen gerichtet, die Verticalkräfte gegen die oberen (dem Wasserspiegel zugekehrten) Elemente abwärts und die Verticalkräfte gegen die unteren (entgegengesetzten) Elemente aufwärts gerichtet sind.

Verfährt man sodann wie in gedachtem Paragraphen, so ergeben sich für jeden ganz oder zum Theil in eine Flüssigkeit getauchten Körper leicht folgende Sätze:

Die horizontalen Druckkräfte heben sich auf, oder die ruhige Flüssigkeit drückt den festen Körper nach allen Horizontalrichtungen gleich stark.

Die Mittelkraft aus allen Druckkräften wirkt vertical aufwärts, ist gleich dem Gewichte der Flüssigkeit, welche den Körper aus der von ihm eingenommenen Stelle verdrängt, und ihre Richtung geht durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit.

Letzteren Satz drückt man gewöhnlich auch so aus, daß man sagt:

„Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper verliert so viel an seinem Gewichte, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt.“

Dieses Gesetz ist von Archimedes gefunden worden und trägt seinen Namen.

Den vertical aufwärts gerichteten Druck des Wassers nennt man den hydrostatischen Auftrieb. Vorstehendes gilt übrigens sowohl für gleich dichte Flüssigkeiten, als auch für solche, welche aus horizontalen Schichten von verschiedener Dichte bestehen.

Von diesen Sätzen macht man unter Anderem auch Anwendung bei der Bestimmung des specifischen (eigenthümlichen) Gewichtes eines Körpers, worunter man die (unbenannte) Zahl versteht, welche angiebt, wie viel Mal ein Körper mehr wiegt, als eine Masse Wasser, welche mit ihm gleiches Volumen hat.

Bezeichnet daher P das absolute, s das specifische Gewicht eines beliebigen gleichartigen Körpers von Volumen $= V$, ferner p das absolute Gewicht eines gleich großen Wasserkörpers, so ist

$$s = \frac{P}{p}, \text{ oder da auch } p = \gamma V \text{ sein muß:}$$

$$s = \frac{P}{\gamma V}, \quad P = \gamma s \,.\, V \text{ etc.}$$

Wenn im Folgenden das Gegentheil nicht besonders hervorgehoben wird, so nennt der Verfasser das Product γs die **Dichte** des betreffenden Körpers, versteht also unter letzterer das Gewicht der Volumeneinheit desselben. Wird daher die Dichte mit Δ bezeichnet, so hat man

$$\text{I.} \quad \Delta = \gamma s,$$

$$\text{II.} \quad s = \frac{\Delta}{\gamma} \text{ und}$$

$$\text{III.} \quad P = \Delta V.$$ [1]

§. 29.

Gleichgewicht schwimmender Körper.

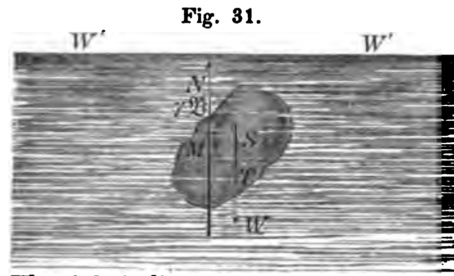
Nach dem Vorstehenden läßt sich angeben, ob ein ganz unter das Wasser getauchter Körper an einer ihm gegebenen Stelle fortdauernd verbleiben, ob er untersinken oder sich ganz oder zum Theil über den Wasserspiegel erheben wird. Dem hydrostatischen Auftriebe wirkt nämlich das in allen Fällen gleichbleibende Gewicht des Körpers selbst entgegen. Ist daher das Gewicht des Körpers eben so groß, als das der von ihm verdrängten Flüssigkeit, so wird er in der Flüssigkeit untersinken. Beträgt aber das Gewicht des Körpers weniger, so wird er in die Höhe steigen, und zwar so lange, bis nur noch ein solcher Theil desselben in die Flüssigkeit taucht, daß das Gewicht des ganzen Körpers dem Gewichte der Wassermasse gleich ist, die er sodann noch verdrängt. In letzterem Falle sagt man von dem Körper, daß er **schwimme**.

Damit sich jedoch ein auf einer ruhigen Flüssigkeit schwimmender Körper vollständig im Gleichgewicht befinde, ist, außer der Bedingung, daß das Gewicht des Körpers dem der verdrängten Flüssigkeit gleich sei, noch eine andere zu erfüllen nöthig, nämlich die, daß der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers mit dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit in derselben Verticallinie liege. Ist sowohl der schwimmende Körper als die Flüssigkeit gleichartig, so liegt im vollständigen Gleichgewichtszustande der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit mit dem des eingetauchten Körpertheiles in einem und demselben Punkte.

Eine noch vollständigere Erledigung finden vorstehende Auseinandersetzungen durch folgende mathematische Betrachtung.

---

[1]) Mehrere neuere Schriftsteller verstehen unter **specifischem Gewichte** denjenigen Werth von Δ in der Gleichung III, welchen man erhält, wenn man $P = 1$ (= 1 Kilogramm) setzt, also erhält $1 = \Delta V$ und so daß $\Delta = \frac{1}{V}$ ist. In diesem Falle nennt man V das **specifische Volumen**. Man sehe hierüber auch den Artikel „**Dichte**" in Karmarsch und Heeren „Technischem Wörterbuche". Dritte Auflage, Prag 1877.


Fig. 31.

Es sei S, Fig. 31, der Schwerpunkt eines ganz unter den Wasserspiegel $W' W'$ getauchten Körpers vom absoluten Gewichte gleich W und $\mathfrak{B}$ das Volumen der verdrängten Flüssigkeit, also $\gamma\mathfrak{B}$ der hydrostatische Auftrieb, dessen Angriffspunkt im Schwerpunkte M der verdrängten Flüssigkeit liegt.

Es lassen sich aber die beiden hier auftretenden Kräfte, W vertical abwärts und $\gamma\mathfrak{B}$ vertical aufwärts wirkend zusammensetzen in eine Einzelkraft $W - \gamma\mathfrak{B}$ oder $\gamma\mathfrak{B} - W$ und in ein Kräftepaar von der Breite $\overline{MS}$, welches sich bestrebt, den Körper in der Richtung SMN oder in der NMS mit einer Energie um den Schwerpunkt S zu drehen, deren Größe $\gamma\mathfrak{B} \,.\, \overline{MS}$ ist.

Für's vollständige Gleichgewicht muß daher letzteres Moment gleich Null sein, d. h. die beiden gedachten Schwerpunkte müssen in derselben Verticalen liegen und überdies die Gleichung stattfinden:

$$\text{I.} \quad \gamma\mathfrak{B} = W$$

oder, wenn V das Volumen von W und s sein specifisches Gewicht bezeichnet, also $W = \gamma s V$ ist:

$$\text{II.} \quad \mathfrak{B} = s \,.\, V.$$

Zusatz 1. Die oben erhaltene Einzelkraft $\pm (\gamma\mathfrak{B} - W)$ (das Gewicht des Körpers im Wasser, auch das relative Gewicht genannt) giebt noch zu folgenden Schlüssen Veranlassung. Setzen wir gedachten Werth $= R$ und $W = \gamma s V$, so ergiebt sich $R = \gamma\,(\mathfrak{B} - s V)$. Ist nun anfänglich $\mathfrak{B} = V$, d. h. der eingetauchte Körper überall vom Wasser umgeben, so folgt

$$\text{III.} \quad R = \gamma\mathfrak{B}\,(1 - s) = \left(\frac{W}{s} - W\right).$$

Es wird also der Körper, wenn

$1 > s$ aufwärts steigen, wenn
$1 < s$ zu Boden sinken und endlich wenn
$1 = s$ in jeder Lage unterm Wasser verharren.

Im ersteren Falle dauert die aufwärts gerichtete Bewegung so lange bis $\mathfrak{B}$ wiederum eine solche Größe erlangt hat, daß $R =$ Null ist und die Gleichungen II. und I. stattfinden.

Zusatz 2. Die Verbindungslinie beider vorgenannten Schwerpunkte nennt man die Schwimmachse, die horizontale Oberfläche der Flüssigkeit, in welcher der Körper schwimmt, die Schwimmebene. Man sagt, der Körper schwimmt in aufrechter Stellung, wenn es wenigstens eine durch seine Schwimmachse zu legende (verticale) Ebene giebt, die den Körper in zwei symmetrische Theile theilt; im entgegengesetzten Falle sagt man, der Körper schwimmt in schiefer Stellung. Ferner sagt man, ein Körper schwimme mit Stabilität oder im steten Gleichgewichte, wenn er, aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, von

selbst ein Bestreben besitzt, in diese Lage wieder zurückzukehren; mit Instabilität im unsteten Gleichgewichte, wenn er sich, statt, wie bemerkt, zurückzukehren, immer mehr von der ersten Lage entfernt; endlich ohne Stabilität, wenn er, aus seiner ursprünglichen Lage gebracht, gar kein Bestreben zu irgend einer Bewegung zeigt.

Beispiel. Welchen Auftrieb erfährt ein ganz ins Wasser getauchtes Stück Tannenholz von 40 Kilogramm Gewicht, mit welcher resultirenden Kraft erfolgt das Aufwärtssteigen und wie viel Cubikmeter Wasser werden von demselben aus der Stelle gedrängt, wenn es zur Ruhe gelangt ist und an der Oberfläche schwimmt.

Auflösung. Nimmt man das specifische Gewicht des Tannenholzes zu 0,6 an, so ergiebt sich das relative Gewicht zu:

$$R = \frac{40}{0{,}6} - 40 = 26\tfrac{2}{3} \text{ Kilogramm,}$$

und das verdrängte Wasservolumen zu

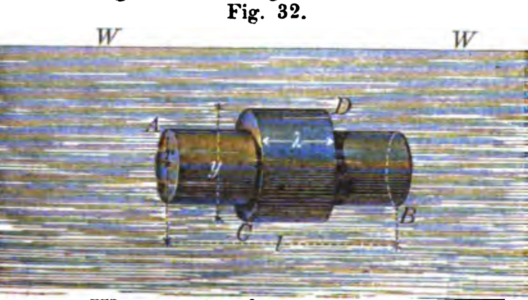
$$\mathfrak{V} = \frac{W}{\gamma s} = \frac{40}{600} = 0{,}0666 \ldots\ldots \text{ Cubikmeter.}$$

§. 30.

Vom hydrostatischen Auftriebe macht man sehr oft Gebrauch, um Lasten aus dem Wasser zu heben, eingerammte Pfähle aus dem Grunde zu ziehen etc., worüber man nachlesen kann in Hagen Wasserbaukunst, 1. Theil, 2. Auflage, S. 683.

Auch wenn specifisch leichtere Körper als das Wasser mit specifisch schwereren verbunden werden, kann man letztere bis zur Oberfläche des Wassers ohne besondere Kraftanwendung erheben, sobald man nur eine derartige Anordnung trifft, daß der Auftrieb des Wassers dem absoluten Gewichte der festen Körperverbindung das Gleichgewicht hält.

Fig. 32.



Beispielsweise sei in Fig. 32 ein kupferner Cylinder AB mit kreisförmiger Basis vom Halbmesser $= r$ und der Länge $= l$ mit einem Korkringe CD von der Länge λ in der Weise zu umgeben, daß die Verbindung in jeder Lage unterm Wasserspiegel im (indifferenten) Gleichgewichte verharrt. Wie groß wird man den Durchmesser y des Korkringes zu nehmen haben, wenn das specifische Gewicht dieses Materials $= s'$, das des Kupfers $= s$ gesetzt wird.

Mit Zuziehung bekannter Sätze der Geometrie erhält man sofort, wenn die Bezeichnung der letzteren Paragraphen beibehalten werden:

$$\mathfrak{V} = \gamma \left[r^2 \pi l + \left(\frac{y^2 \pi}{4} - r^2 \pi \right) \lambda \right] \text{ und}$$

$$W = \gamma s r^2 \pi l + \gamma s' \left(\frac{y^2 \pi}{4} - r^2 \pi \right) \lambda.$$

Hieraus für's Gleichgewicht nach I. §. 29:

$$r^2\pi l + \left(\frac{y^2\pi}{4} - r^2\pi\right)\lambda = sr^2\pi l + s'\lambda\left(\frac{y^2\pi}{4} - r^2\pi\right),$$

so wie nach gehöriger Reduction:

$$y = 2r\sqrt{\frac{l}{\lambda}\frac{s-1}{1-s_1} + 1}.$$

Für $r = 10$ cm, $\lambda = 20$ cm, $l = 60$, $s = 8{,}8$ und $s_1 = 0{,}24$, findet man $y = 112{,}8$ cm. Die Dicke des Korkringes muß folglich betragen: $\frac{y-2r}{2} = \frac{112{,}8 - 20{,}0}{2} = 46{,}4$ cm.

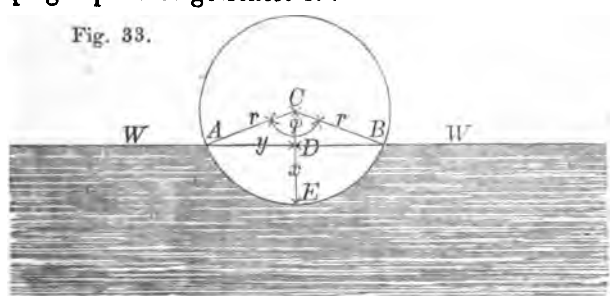
§. 31.

Tiefe der Einsenkung schwimmender (symmetrischer) Körper.

Ist der schwimmende Körper in Bezug auf irgend eine durch ihn gelegte Achse symmetrisch, d. h. ist er so gestaltet, daß für jede Ebene, welche durch ihn rechtwinklig zu gedachter Achse geführt wird, der Schwerpunkt der Schnittfläche in dieser Achse liegt, und senkt man ihn so in die Flüssigkeit, daß bemerkte Achse vertical gerichtet ist, so wird der Schwerpunkt des ganzen Körpers und der seines eingetauchten Theiles in dieser Achse liegen, und die Bedingung des Gleichgewichtes in Bezug auf Drehung wird von selbst erfüllt sein, wie tief auch der Körper eintauchen mag. Die Größe der Eintauchungstiefe wird aber aus einer Gleichung des §. 29 zu reduciren sein.

Zur weiteren Kenntnißnahme dieses für den Techniker besonders wichtigen Gegenstandes folgt von hier ab eine Reihe entsprechender Aufgaben und Beispiele.

Aufgabe 1. Es ist die Eintauchungstiefe eines Cylinders, Fig. 33, mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius $= r$ und der Länge $= l$ zu bestimmen, wenn seine geometrische Achse dem Wasserspiegel parallel gerichtet ist.



Auflösung. Es sei ADB die Durchschnittslinie der Schwimmebene mit einer Ebene, welche normal und vertical zur Cylinderachse gerichtet ist, $DE = x$ die zu findende Eintauchungstiefe, so wie φ der zu AEB gehörige Bogen für den Halbmesser $= 1$.

Eine directe Auflösung der Aufgabe ist geradezu unmöglich, vielmehr ist erst φ zu finden und sodann x zu berechnen.

Zu diesem Ende beachte man, daß sein muß:

$$\mathfrak{B} = [\text{Sector } ACBE - \Delta\, ACB]\, l, \text{ d. i.}$$

$$\mathfrak{B} = \left[\frac{r^2\varphi}{3} - r^2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi \cos\tfrac{1}{2}\varphi\right] l, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{r^2}{2}(\varphi - \sin\varphi)\, l.$$

Ist das specifische Gewicht des Cylinders $= s$ gegeben, so folgt ferner

$$W = \gamma s r^2 \pi \,.\, l$$

und daher aus der Vergleichung mit $\gamma\mathfrak{B}$: $\varphi - \sin\varphi = \frac{2W}{\gamma r^2 l}$, oder

$$\text{I.}\quad 2s\pi = \varphi - \sin\varphi.$$

Hat man durch diesen Ausdruck φ ermittelt, so erhält man für x ohne Weiteres:

$$\text{II.}\quad x = r\,(1 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Beispiel. Ist $s = \frac{3}{2\pi}$, so wird aus I. $3 = \varphi - \sin\varphi$ und demzufolge liegt, wie aus der Tabelle der folgenden Anmerkung erhellt, der Winkel φ zwischen 175 und 180 Graden.

Setzen wir zur näheren Bestimmung $\varphi = 175 + z = \alpha + z$, so wird aus I:

$$3 = (\alpha + z) - \sin(\alpha + z).$$

Reducirt man diese Gleichung auf z und beachtet, daß weil z sehr klein gedacht werden kann, $\sin z = z$ und $\cos z = 1$ zu setzen ist, so folgt (in Bogenmaaß):

$$z = \frac{3 - \alpha + \sin\alpha}{1 - \cos\alpha}, \text{ d. i.}$$

$$z = \frac{3 - 3{,}0543 + 0{,}0872}{1 + 0{,}996} = 0{,}0165 \text{ und deshalb in Graden:}$$

$$\varphi = 175 \text{ Grad } 56 \text{ Minuten } 43 \text{ Secunden.}$$

Endlich ergiebt sich $x = r\,(1 - \cos 87^\circ\, 58'\, 21{,}5'') = 0{,}9646\,.\,r$.

Anmerkung. Zur Erleichterung der Auflösung betreffender Aufgaben wird nachstehende hier erweiterte Eytelwein'sche[1]) Tabelle dienen, woraus zugleich erhellt, daß $\frac{2W}{\gamma r^2 l}$ oder $2s\pi$ nie größer als 6,283185 werden können.

---

[1]) Eytelwein, Hydrostatik §. 67.

φ Grade.	$\varphi - \sin \varphi$.	φ Grade.	$\varphi - \sin \varphi$.	φ Grade.	$\varphi - \sin \varphi$.
5	0,000111	125	1,362510	245	5,182365
10	0,000885	130	1,502884	250	5,303016
15	0,002980	135	1,649088	255	5,416516
20	0,007046	140	1,800673	260	5,522664
25	0,013714	145	1,957151	265	5,621318
30	0,023599	150	2,117994	270	5,712389
35	0,037289	155	2,282642	275	5,795850
40	0,055344	160	2,450507	280	5,871730
45	0,078291	165	2,620974	285	5,940114
50	0,106620	170	2,793412	290	6,001147
55	0,140779	175	2,967170	295	6,055029
60	0,181173	180	3,141592	300	6,102018
65	0,228156	185	3,316015	305	6,142406
70	0,282038	190	3,489774	310	6,176565
75	0,343071	195	3,662211	315	6,204894
80	0,411456	200	3,832679	320	6,227841
85	0,487335	205	4,000543	325	6,245896
90	0,570796	210	4,165191	330	6,259587
95	0,661868	215	4,326034	335	6,269471
100	0,760521	220	4,482512	340	6,276140
105	0,866670	225	4,634098	345	6,280205
110	0,980170	230	4,780302	350	6,282300
115	1,100821	235	4,920676	355	6,283074
120	1,228370	240	5,054816	360	6,283185

Zusatz. Die Eintauchungstiefe $= x$ einer schwimmenden Kugel, wenn Fig. 33 den betreffenden größten Kreis darstellt, ergiebt sich aus der Gleichung

$$\tfrac{4}{3}\pi\gamma s r^3 = \gamma\,(rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3)\,\pi\,^{1)},\ \text{d. i. aus}$$
$$0 = x^3 - 3rx^2 + 4sr^3.$$

Ist die Kugel überdies mit einem Gewichte Q belastet, wie dies bei sogenannten Schwimmern häufig der Fall ist, so ist die Eintauchungstiefe aus der Gleichung zu berechnen:

$$\tfrac{4}{3}\gamma s r^3\pi + Q = \gamma\pi\,(rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3).$$

§. 32.

Aufgabe 2. Aus einer gehörigen Zahl von Tonnen ist Fig. 34 ein auf dem Wasser schwimmendes Floß gebildet, indem man die Tonnen in der Nähe der Böden gekoppelt und durch Seile mit hölzernen Schwellen, Zangen etc. zu einem Ganzen vereinigt hat. Es fragt sich, welche Last $= Z$ mit Sicherheit auf ein derartiges Floß gesetzt werden kann, wenn das Gewicht der Tonnen und des

---

[1]) Es ist nämlich $\mathfrak{V} = \int_0^x y^2\pi dx$, oder wegen $y^2 = 2rx - x^2$,

$$\mathfrak{V} = \pi\int_0^x (2rx - x^2)\,dx = \pi\,(rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3).$$



Fig. 34.

sonstigen Holzwerkes etc. $= Q$ ist und die Tonnen, wie in der Figur angegeben, ganz unter das Wasser getaucht sind.

Auflösung. Das Tragvermögen einer (hölzernen) Tonne kann für practische Fälle genau genug gleich dem Wassergewichte gesetzt werden, welches ihr hohler Raum aufnimmt. Bezeichnet daher D die Spundtiefe, d die Bodentiefe und l die Länge einer Tonne, von denen n gleiche vorhanden sind, so ist bei Vernachlässigung des sonst mit eingetauchten Holzwerkes, nach den Grundzügen der Mechanik des Verfassers §. 77, S. 197 (Dritte Auflage),

$$\mathfrak{V} = n \frac{\pi}{4} \left(\frac{2D + d}{3}\right)^2 l$$

und

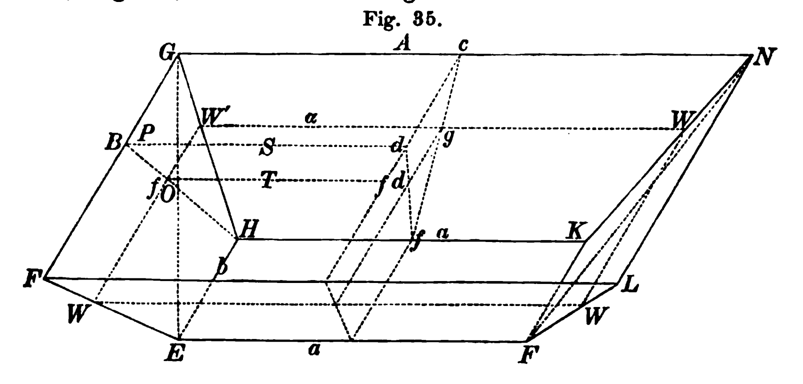
$$Z = \frac{\gamma n \pi}{4} \left(\frac{2D + d}{3}\right)^2 l - Q.$$

Anmerkung. Sind Menschen und Pferde auf ein derartiges Floß zu stellen, so kann man rechnen, daß ein Mann im Gedränge 0,20 bis 0,17 Quadratmeter Raum bedarf, 70 Kilogramm wiegt und auf 1 Quadratmeter folglich 350 bis 412 Kilogramm Belastung kommen. Ein Pferd von 2,7 Meter Länge und 1,0 Meter Breite aber 2,7 Quadratmeter Raum bedarf, 400 bis 500 Kilogr. wiegt und der Quadratmeter mit 150 bis 180 Kilogr. belastet wird.

§. 33.

Aufgabe 3. Es ist eine Gleichung zwischen der Eintauchungstiefe eines auf dem Wasser schwimmenden Pontons neben skizzirter Form, Fig. 35, und der Belastung desselben zu entwickeln.

Fig. 35.



Auflösung. Die gegebenen Dimensionen des Pontons mögen folgende sein: die Seiten des obersten Rechteckes FN, nämlich $FL = GN = A$ und $FG = LN = B$, die des unteren EK nämlich $EI = HK = a$ und $EH = IK = b$, die ganze Tiefe $fd = h$. Die Dimensionen des durch die Schwimmebene gebildeten Rechteckes WW' lassen sich aus den vorher gegebenen berechnen und mögen vorläufig α und β genannt werden, während wir die Eintauchungstiefe fh mit x bezeichnen. Nach der untenstehenden Note ist[1]): Inhalt des Prisma $EGHINK = \frac{1}{2} bh \left(\frac{2a + A}{3}\right)$, ebenso das Prisma $FEGNIL = \frac{Bh}{2}\left(\frac{2A + a}{3}\right)$, folglich der Inhalt $= I$ beider zusammengenommen:

$$I = \frac{h}{6} \left\{ b\,(2a + A) + B\,(2A + a) \right\}.$$

Das verdrängte Wasservolumen $= \mathfrak{V}$ ist ein ähnlicher Körper zu letzterem Volumen, und man findet den betreffenden Inhalt, wenn man in dem Ausdrucke für I statt h den Werth x setzt, A mit α und B mit β verwechselt, also erhält:

$$(1) \quad \mathfrak{V} = \frac{x}{6} \left\{ b\,(2a + \alpha) + \beta\,(2\alpha + a) \right\}.$$

Es erübrigt nur noch, α und β durch bekannte Dimensionen auszudrücken. Hierzu hat man aber, weil $\Delta\, def \backsim \Delta\, fgh$, $hf : fd = hg : de$, d. i. $x : h = \frac{\beta - b}{2} : \frac{B - b}{2}$ und ebenso, weil $\Delta\, HQT \backsim \Delta\, HPS$, $x : h = \frac{\alpha - a}{2} . \frac{A - a}{2}$. Aus diesen Proportionen folgt

$$\alpha = a + \frac{x\,(A - a)}{h} \text{ und } \beta = b + \frac{x\,(B - b)}{h}:$$

so wie, wenn diese Werthe in (I) gesetzt werden, nach gehörigem Zusammenziehen und Ordnen:

$$\mathfrak{V} = \frac{(A - a)\,(B - b)}{3\,h^2}\, x^3 + \left[\frac{b\,(A - a) + a\,(B - b)}{2\,h}\right] x^2 + abx.$$

Ist nun Q das Pontongewicht, einschliesslich der Belastung desselben, so folgt, wegen $Q = \mathfrak{V}\gamma$:

---

[1]) Der körperliche Inhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas, Fig. 36, in welche sich unser Ponton zerlegen läßt, besteht aus dem Inhalte einer Pyramide, wovon das Rechteck $ABCD$ Grundfläche und NO Höhe ist, deren Inhalt also beträgt, wenn $AB = DC = k$, $AD = BC = m$ und $NO = EM = e$ gesetzt wird: $mk \cdot \frac{e}{3}$; ferner aus einer zweiten Pyramide, wovon das Dreieck DEC Grundfläche und $NE = n$ die Höhe ist, dessen Inhalt demnach sein muß: $\frac{ke}{2} \cdot \frac{n}{3}$. Daher der Inhalt beider Pyramiden oder des Prismas: $\frac{mke}{3} + \frac{nke}{6} = \frac{1}{6}\, ke\,(2m + n) = \frac{ke}{2}\left(\frac{2m + n}{3}\right)$.

Fig. 36.

I. $\frac{Q}{\gamma} = \frac{(A-a)(B-b)}{3h^2} x^3 + \left[\frac{b(A-a)+a(B-b)}{2h}\right] x^2 + abx$, sowie

II. $x^3 + \frac{3}{2} h \left[\frac{b(A-a)+a(B-b)}{(A-a)(B-b)}\right] x^2 + \frac{3abh^2}{(A-a)(B-b)} x$

Beispiel. Die eisernen Pontons zum Transporte der Röhren der Menai-Brücken[1]) hatten folgende Dimensionen: $A = 98$ Fuß (englisch), $B = 31'$, $a = 93'$, $b = 26'$, $h = 8\frac{3}{4}'$ und die Einsenkung $= x$ betrug, wenn die Pontons mit einer der größten Röhren (472 Fuß Länge) belastet waren, 6 Fuß. Wie groß berechnet sich hiernach die Totalbelastung eines dieser Pontons, wenn $\gamma = 62{,}5$ ℔ engl. gerechnet wird.

Auflösung. $Q = 984719{,}388$ ℔ $= 439{,}607$ Tons. Die ganze Tragfähigkeit für $x = h$ ergiebt sich ferner zu 1489596,255 ℔ $=$ 665 Tons.

Zusatz. Die sogenannten Fähren auf den meisten deutschen Flüssen bilden Pontons, wobei die langen Seitenwände auf den Böden normal stehen. In diesem Falle wird $B = b$ und statt I. wird

$$\frac{Q}{\gamma} = \frac{b(A-a)}{2h} x^2 + abx \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{2ah}{(A-a)} x - \frac{Q}{\gamma} \cdot \frac{2h}{b(A-a)} = 0.$$

Beispiel. Wie tief sinkt eine Flußfähre von 2700 Kilogr. Gewicht ein, wobei $A = 12^m{,}20$, $a = 9^m{,}15$, $B = b = 3^m{,}66$ und $h = 1^m{,}0$ ist, wenn 90 Menschen, von je 70 Kilogr. Durchschnittsgewicht für einen Jeden, darin Platz nehmen.

Auflösung. Zuerst ist $Q = 2700 + 90 \,.\, 70 = 9000$, ferner $\frac{2ah}{A-a} = 6{,}3$; $\frac{2h}{b(A-a)} = 0{,}178$ und sonach, da $\gamma = 1000$ Kil. ist:

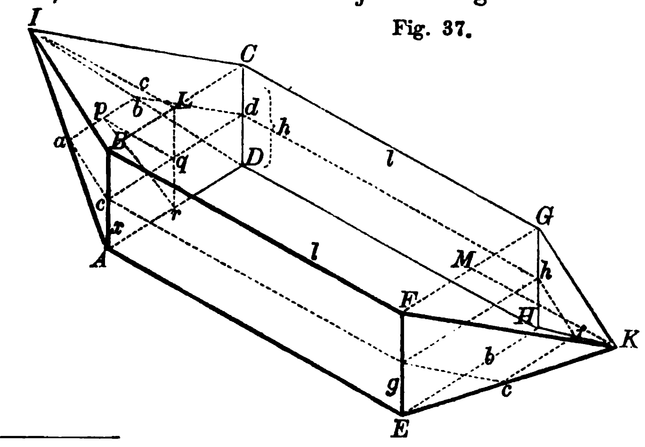
$$x^2 + 6{,}30\, x = 1{,}602, \text{ woraus folgt:}$$

$$x = 0{,}16 \text{ Meter.}$$

§. 34.

Aufgabe 4. Man soll die Tiefe der Einsenkung eines Schiffes bestimmen, dessen isometrische Projection Fig. 37 darstellt.

Fig. 37.



[1]) Clark, The Tubular Bridges, p. 503, 558, 587 etc.

Auflösung. Das Mittelstück $ACEG$ bilde ein gerades Parallelepipedum, wovon die Länge $AE = BF = CG = l$, die Breite $AD = BC = EH = b$, die Tiefe $AB = CD = EF = h$ sein mag. Jeder der beiden gleichen Schnäbel bilde eine vierseitige Pyramide mit rectangulärer Basis, die Länge $IL = KM$ jedes Schnabels sei $= c$. Die punktirten Linien $acgefhdba$ mögen die Durchschnittsfläche des Schiffes mit der Schwimmebene bezeichnen, die Eintauchungstiefe $cA = dD = gE = hH$ werde $= x$ gesetzt. Der Cubikinhalt des eingetauchten Theiles vom Mittelstücke ist hiernach $= xbl$. Die eingetauchten Theile der Schnäbel bilden schief abgeschnittene dreiseitige Prismen $abcdAD$ und $efghEH$, wovon jede der parallelen Seiten ab und $ef = \frac{b}{h}(h - x)$, die beiden andern $cd = gh = b$, die normalen Querschnitte $pqr = \frac{1}{2}\frac{c}{h}x^2$, [1]) mithin der Cubikinhalt beider dreiseitigen Prismen zusammen

$$= \frac{1}{3}\frac{bc}{h^2}(3h - x)x^2 \text{ ist.}$$

Bezeichnet daher W das Gewicht des leeren Schiffes und P das der Ladung, so erhält man:

$$\text{I.} \quad P + W = \gamma blx + \frac{1}{3}\gamma\frac{bc}{h^2}(3h - x)x^2, \text{ und hieraus}$$

$$\text{II.} \quad x^3 - 3hx^2 - 3\frac{h^2 l}{c}x + \frac{3h^2}{\gamma bc}(P + W) = 0.$$

Beispiel. Die Holzschiffe auf der Moldau und Oberelbe haben eine ganz ähnliche Gestalt, wie Fig. 37, und nachbemerkte Dimensionen: [2])

$l = 15^m,2$; $b = c = 3^m,8$; $h = 1^m,3$ und ihr Gewicht beträgt unbelastet $= 6183$ Kilogr., es fragt sich, zu welcher Tiefe dieselben in letztgedachtem Zustande einsinken?

Aufgabe. Die Gleichung II giebt, wenn $P = 0$, $W = 6183$ und $\gamma = 1000$ gesetzt wird:

$$x^3 - 3{,}9\,x^2 - 20{,}28\,x + 2{,}17 = 0.$$

Hieraus aber

$$x = 0^m{,}10.$$

Anmerkung. Es dürfte hier der geeignetste Ort sein, Einiges über die Ausmessung der Fluß- und Seeschiffe anzuführen.

Die Ausmessung der Schiffe (Aichen, Eichen der Schiffe, Jaugeage, Measurement of Ships) geschieht aus einem doppelten Grunde. Einmal um durch dieselbe dem Rheder und Schiffer einen Anhaltspunkt für die Belastung zu geben, damit Ueberladungen und dadurch Gefahren für

---

[1]) Es verhält sich $BC : ab = AB : Bc$, d. i. $b : \overline{ab}\ h : h - x$ und $\overline{ab} = \frac{b}{h}(h - x)$; ferner ist $\triangle\overline{pqr} = \frac{\overline{pq}\,.\,\overline{qr}}{2}$, so wie $IL : Lr = pq : qr$, oder $c : h = \overline{pq} : x$, mithin $\Delta\overline{pq}r = \frac{cx\,.\,x}{2h} = \frac{cx^2}{2h}$.

[2]) Gerstner, Handbuch der Mechanik, Bd. I, S. 57.

Leben und Eigenthum vermindert werden; zweitens um die öffentlichen Abgaben zu reguliren, welche der Schiffer unter höchst verschiedenen Namen, sowohl im eigenen Lande wie auswärts, zu leisten hat.

Zur Zeit geschieht dies Ausmessen und Rechnen überall nach praktischen Regeln, die meistentheils unendlich weit entfernt von den mathematischen Theorien liegen, auf welche sich streng genommen derartige Meßverfahren und Rechnungen gründen müßten.

Für gegenwärtigen Zweck wird es hinreichend sein, die für das Deutsche Reich seit dem 1. Januar 1873 in Kraft getretene Aichungsmethode oder Schiffsvermessungs-Ordnung hier mitzutheilen[1]). Nach dem Reichsgesetzblatte Nr. 23 vom 5. Juli 1872 sind die betreffenden Bestimmungen folgende:

I. Allgemeine Bestimmungen[2]).

§. 1. Die nachstehenden Vorschriften finden Anwendung auf alle Schiffe, Fahrzeuge und Boote, welche nach ihrer Bauart ausschließlich oder vorzugsweise zum Verkehr auf See, oder auf den Buchten, Haffen und Watten derselben bestimmt sind, mit alleiniger Ausnahme derjenigen ausschließlich zur Fischerei bestimmten Fahrzeuge, welche mit durchlöchertem Fischbehälter versehen sind.

§. 2. Zur Ermittelung der Ladungsfähigkeit der Schiffe wird deren Raumgehalt durch Vermessung festgestellt. Die Vermessung erfolgt nach metrischem Maaß und erstreckt sich auf sämmtliche innere Räume des Schiffes und der auf demselben fest angebrachten Aufbauten.

Das Ergebniß der Vermessung aller Räume eines Schiffes, in Körpermaaß ausgedrückt, heißt der Brutto-Raumgehalt des Schiffes und, nach Abzug der Logisräume der Schiffsmannschaft (§. 15), sowie der etwa vorhandenen Maschinen-, Dampfkessel- und Kohlenräume (§. 16), der Netto-Raumgehalt desselben.

§. 3. Die Vermessung erfolgt nach dem in den §§. 4 bis 11 vorgeschriebenen vollständigen Verfahren.

Ausnahmsweise kann jedoch nach Maaßgabe der §§. 12 und 13 ein abgekürztes Verfahren zur Anwendung gebracht werden, wenn das Schiff ganz oder theilweise beladen ist, oder Umstände anderer Art die Vermessung nach dem vollständigen Verfahren verhindern.

II. Das vollständige Vermessungs-Verfahren.

§. 4. Dasjenige Deck, welches in Schiffen mit weniger als drei Decken das oberste und in Schiffen mit drei und mehr Decken das zweite von unten ist, heißt das Vermessungs-Deck.

Die unter dem Vermessungs-Deck befindlichen Schiffsräume werden als ein zusammenhängendes Ganze betrachtet und vermessen.

---

[1]) Die englischen und französischen Meßmethoden werden u. A. mitgetheilt in dem von dem Vereine „Hütte“ herausgegebenen Taschenbuche des Ingenieurs. Elfte Auflage, Berlin 1877, S. 438 und 439.

[2]) Das gegenwärtige deutsche Schiffsvermessungsverfahren ist unter dem Namen der Moorson'schen Aichungsmethode bekannt und hat in Nordamerika und allen europäischen Staaten, mit Ausnahme von Rußland, Griechenland und der Türkei, gesetzliche Gültigkeit. Bemerkt zu werden verdient noch, daß in den Schlußbestimmungen der deutschen Schiffsvermessungs-Ordnung (§. 38) ausdrücklich hervorgehoben wird, daß eine Tonne von 1000 Kilogramm gleich 2,12 Cubikmeter, eine Last von 4000 Pfund gleich 4,24 Cubikmeter, eine Last von 5200 Pfund gleich 5,52 Cubikmeter, und eine Last von 6000 Pfund gleich 6,37 Cubikmeter gerechnet wird.

Die über dem Vermessungs-Deck befindlichen Räume, mögen sie durch ein drittes oder ein weiteres Deck, oder durch Aufbauten auf dem obersten Deck gebildet sein, werden als selbstständige Räume behandelt und ein jeder für sich vermessen.

§. 5. Die Messung des inneren Schiffsraumes unter dem Vermessungs-Deck geschieht durch Aufnahme der Länge und einer je nach der Länge verschieden großen Anzahl von Querschnitten (§. 6).

§. 6. Die Länge wird auf dem Vermessungs-Deck in gerader Linie gemessen und zwar von der inneren Fläche der Binnenbords-Bekleidung (in mittlerer Dicke) neben dem Vordersteven bis zu der inneren Fläche des mittelsten Heckstützens, oder der mittschiffs am Heck befindlichen Bekleidung (in mittlerer Dicke).

Von dieser Länge wird ein Abzug gemacht, bestehend in dem Fall des Bugs in der Dicke des Decks, in dem Fall des Heckstützens in der Dicke des Decks und in dem Fall des Heckstützens in einem Drittel der Deckbalkenbucht.

Die auf diese Weise gefundene Länge wird in eine Anzahl gleicher Theile getheilt, und zwar:

1) eine Länge bis zu 15 Meter in 4 gleiche Theile;
2) eine Länge über 15 Meter und bis zu 37 Meter in 6 gleiche Theile;
3) eine Länge über 37 Meter und bis zu 55 Meter in 8 gleiche Theile;
4) eine Länge über 55 Meter und bis zu 69 Meter in 10 gleiche Theile;
5) eine Länge über 69 Meter in 12 gleiche Theile.

§. 7. Auf jedem dieser Theilungspunkte wird ein Querschnitt des unter dem Vermessungs-Deck befindlichen Schiffsraumes in folgender Weise gemessen:

Die Tiefe jedes Querschnittes wird zwischen zwei Punkten gemessen, von denen der obere Punkt in einem Abstand von einem Drittel der Deckbalkenbucht unter dem Vermessungs-Deck und der untere Punkt in der oberen Fläche der Bodenwrange an der inneren Seite des Füllungsganges liegt. Fällt ein solcher Querschnitt in eine Erhöhung oder Vertiefung des Deckes, so wird der obere Punkt in der verlängert gedachten Fluchtlinie des Deckes ermittelt. Von der so gefundenen Tiefe wird die mittlere Dicke der zwischen der Kimmwegerung und dem Füllungsgange befindlichen Binnenbords-Bekleidung in Abzug gebracht.

Beträgt die nach dem Vorstehenden bestimmte Tiefe des durch den mittelsten Theilungspunkt der Länge gelegten Querschnittes nicht mehr als 5 Meter, so wird die Tiefe eines jeden Querschnittes in vier gleiche Theile getheilt. Durch jeden der drei mittleren Theilungspunkte, sowie durch den oberen und unteren Endpunkt der Tiefe, werden sodann die inneren Breiten jedes Querschnitts rechtwinklig zur verticalen Kielebene gemessen, indem jedes Maaß bis zur mittleren Dicke desjenigen Theiles der Binnenbords-Bekleidung genommen wird, welcher zwischen den Vermessungspunkten liegt.

Zum Zwecke der Berechnung des Flächeninhalts der Querschnitte werden die fünf gemessenen Breiten eines jeden Querschnitts in der Weise numerirt, daß die oberste Breite mit 1, die nächstfolgenden Breiten mit 2, 3, 4, und die unterste Breite mit 5 bezeichnet wird. Die Summe nun, welche sich ergiebt, wenn die zweite und vierte Breite mit 4, die dritte Breite mit 2 multiplicirt wird und hierzu die erste und die fünfte Breite addirt werden, wird mit dem dritten Theile des gemeinsamen Abstandes der Breiten von einander multiplicirt. Das Product ergiebt sodann den Flächeninhalt des Querschnitts.

Beträgt jedoch die nach dem zweiten Absatze dieses Paragraphen bestimmte Tiefe des durch den mittelsten Theilungspunkt der Länge gelegten Querschnitts mehr als 5 Meter, so wird die Tiefe eines jeden Querschnitts anstatt in vier, in sechs gleiche Theile getheilt, so daß anstatt fünf Breiten sieben Breiten der Querschnitte zu messen sind. Die Messung geschieht übrigens in derselben Weise und auch die Art und Weise der Berechnung bleibt dieselbe. Es werden nämlich die zweite, vierte und sechste Breite mit 4, die dritte und fünfte Breite

mit 2 multiplicirt, die Producte addirt und zur Summe derselben die erste und die siebente Breite hinzugezählt. Die Gesammtsumme wird mit dem dritten Theil des gemeinsamen Abstandes der Breiten von einander multiplicirt und das Product ergiebt sodann den Flächeninhalt des Querschnitts.

§. 8. Aus dem nach den Vorschriften des §. 7 ermittelten Flächeninhalt aller einzelnen Querschnitte wird der Inhalt des unter dem Vermessungs-Deck befindlichen Schiffsraumes in folgender Weise berechnet:

Die Querschnitte werden nach einander mit 1, 2, 3 u. s. w. in der Art numerirt, daß mit 1 der durch den Anfangspunkt der Länge am Bug und mit der letzten Nummer der durch den Endpunkt der Länge am Heck gelegte Querschnitt bezeichnet wird. Die Summe, welche sich ergiebt, wenn jeder mit einer geraden Nummer bezeichnete Querschnitt mit 4, jeder mit einer ungeraden, mit Ausnahme der ersten und letzten Nummer, bezeichnete Querschnitt mit 2 multiplicirt wird und hierzu die mit der ersten und der letzten Nummer bezeichneten Querschnitte — sofern diese überhaupt einen Flächeninhalt ergeben haben — addirt werden, wird mit dem dritten Theil des gemeinsamen Abstandes der Querschnitte von einander multiplicirt. Das Product ergiebt sodann den Inhalt des unter dem Vermessungs-Deck befindlichen Schiffsraumes.

§. 9. Hat das Schiff über dem Vermessungs-Deck noch ein drittes Deck, so wird der Inhalt des Raumes zwischen dem dritten Deck und dem Vermessungs-Deck folgendermaßen bestimmt:

Die innere Länge des Raumes wird auf halber Höhe desselben von der Bekleidung neben dem Vordersteven bis zur Bekleidung der Inhölzer am Heck gemessen. Diese Länge wird in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt, in welche die auf dem Vermessungs-Deck gemessene Länge getheilt worden ist (§. 6). An jedem dieser Theilungspunkte, sowie an den Endpunkten der Länge, am Bug und am Heck, werden die inneren Breiten gemessen und zwar ebenfalls auf halber Höhe.

Die Breiten werden nach einander mit 1, 2, 3 u. s. f. in der Art numerirt, daß die Breite am Bug als Nr. 1 bezeichnet wird. Die zweite und alle anderen, mit geraden Nummern bezeichneten Breiten werden mit 4, die dritte und alle anderen, mit ungeraden Nummern bezeichneten Breiten, mit Ausnahme der ersten und der letzten Breite, werden mit 2 multiplicirt. Die Summe der Producte und der ersten und letzten Breite wird mit dem dritten Theile des gemeinsamen Abstandes der Breiten von einander multiplicirt. Das Product ergiebt den Flächeninhalt der mittleren wagerechten Durchschnittsfläche und dieser, mit der mittleren Höhe des Raumes multiplicirt, den Inhalt des gemessenen Raumes.

§. 10. Hat das Schiff mehr als drei Decke, so werden die über dem Vermessungs-Deck befindlichen Zwischendeck-Räume, ein jeder für sich, in der in §. 9 beschriebenen Weise vermessen.

§. 11. Befinden sich Kajüten, Hütten, Deckhäuser, Backe oder sonstige, fest angebrachte Aufbauten auf dem obersten Deck, welche zur Aufnahme von Gütern oder Vorräthen, oder zur Unterbringung oder sonstigen Bequemlichkeit der Passagiere oder der Schiffsbesatzung, einschließlich des Schiffsführers, dienen, so wird der Raumgehalt derselben in folgender Weise festgestellt:

Es wird die innere mittlere Länge eines jeden solchen Raumes gemessen und in zwei gleiche Theile getheilt. In halber Höhe desselben werden ferner drei innere Breiten gemessen, und zwar je eine Breite durch jeden der beiden Endpunkte, und die dritte durch die Mitte der gemessenen Länge. Zur Summe der beiden Endbreiten wird sodann das Vierfache der mittelsten Breite addirt und die Gesammtsumme mit einem Drittel des gemeinsamen Abstandes der Breiten von einander multiplicirt. Das Product ergiebt den Flächeninhalt der mittleren wagerechten Durchschnittsfläche, und dieser, mit der mittleren Höhe des Raumes multiplicirt, den körperlichen Inhalt desselben.

III. Das abgekürzte Vermessungsverfahren.

§. 12. Die Länge wird auf dem obersten Deck gemessen, von der Außenfläche der Außenhaut neben dem Vordersteven bis zur hinteren Fläche des Hinterstevens. Von dieser Länge wird der Abstand zwischen der hinteren Fläche des Hinterstevens und demjenigen Punkte der Sponung im Hintersteven, in welchem die Gillungsplanke dieselbe schneidet oder die Sponung in die Gillungslinie übergeht, in Abzug gebracht.

Es wird ferner die größte Breite des Schiffes gemessen zwischen den Außenflächen der Außenbords-Bekleidungen oder der Berghölzer. Auf der größten Breite wird sodann die Höhe des obersten Deckes außenbords an beiden Seiten vermerkt und mittelst einer, in senkrechter Richtung zum Kiel straff um das Schiff herum gezogenen Kette diejenige Linie gemessen, welche den einen der vermerkten Punkte unter dem Kiel hindurch mit dem anderen gegenüberliegenden Punkte verbindet. Zur Hälfte des so ermittelten äußeren Umfangs wird die Hälfte der größten Breite addirt. Die sich ergebende Summe wird mit sich selbst multiplicirt, sodann mit der nach Absatz 1 dieses Paragraphen ermittelten Länge des Schiffes multiplicirt und das Product wird nochmals, und zwar, wenn das Schiff zumeist von Eisen erbaut ist, mit 0,18 (achtzehn Hundertstel), wenn es zumeist von Holz erbaut ist, mit 0,17 (siebenzehn Hundertstel) multiplicirt. Die gefundene Zahl ergiebt den Inhalt des unter dem obersten Deck befindlichen Schiffsraumes in Cubikmetern.

§. 13. Befinden sich Cajüten, Hütten, Deckhäuser, Backe oder sonstige, fest angebrachte Aufbauten auf dem obersten Deck, so wird der Inhalt dieser Räume in der Weise ermittelt, daß die mittlere Länge, mittlere Breite und mittlere Höhe derselben mit einander multiplicirt wird.

IV. Die Vermessung offener Fahrzeuge.

§. 14. Bei Bestimmung des Brutto-Raumgehaltes offener Fahrzeuge bezeichnet die Oberkante des obersten Plankenganges die Grenzfläche des zu vermessenden Raumes.

Die Tiefen werden von denjenigen Querlinien ab gemessen, welche von Oberkante zu Oberkante des obersten Plankenganges durch die Theilungspunkte der Länge gezogen sind.

Im Uebrigen kommen die Vorschriften des zweiten bezw. dritten Abschnittes zur Anwendung.

V. Die Abzüge vom Brutto-Raumgehalt.

§. 15. Bei allen Schiffen wird der Raumgehalt der vollständig und ausschließlich zum Gebrauch der Schiffsmannschaft dienenden Räume, nach ihrer durch Messung ermittelten Größe, jedoch höchstens bis zum zwanzigsten Theile des Brutto-Raumgehaltes des Schiffes, von dem letzteren in Abzug gebracht.

Für die Vermessung der erwähnten Räume gelten die im §. 11 gegebenen Vorschriften.

§. 16. Bei Schiffen, welche durch Dampf oder durch eine andere künstlich erzeugte Kraft bewegt werden, wird der Inhalt der Räume, welche von der Maschine und den Dampfkesseln thatsächlich eingenommen werden und für die wirksame Thätigkeit derselben abgeschieden sind, sowie ferner der abgeschlossene Raum solcher Kohlenbehälter, welche dauernd hergerichtet und derartig angebracht sind, daß aus ihnen die Kohlen unmittelbar in den Maschinenraum geschüttet werden können, je nach der durch Messung ermittelten Größe dieser Räume, jedoch höchstens bis zur Hälfte des Brutto-Raumgehaltes des Schiffes, von dem letzteren in Abzug gebracht.

Bei Schlepp-Dampfschiffen, welche ausschließlich zum Schleppen anderer Schiffe dienen, wird der Inhalt sämmtlicher Maschinen-, Dampfkessel- und Kohlenräume ohne Beschränkung auf die Hälfte des Brutto-Raumgehaltes des Schiffes

in Abzug gebracht, sobald diese Räume den im ersten Absatze dieses Paragraphen enthaltenen Bestimmungen entsprechen.

Bei Schrauben-Dampfschiffen gehört auch der von dem Wellentunnel eingenommene Raum zu den in dem ersten Absatze dieses Paragraphen bezeichneten Räumen.

§. 17. Für die Vermessung der im §. 16 erwähnten Räume gelten folgende Vorschriften:

1) Es wird die mittlere Länge des Maschinenraumes einschließlich der in der vorgeschriebenen Weise eingerichteten Kohlenbehälter gemessen. Ferner werden in Gemäßheit der Bestimmungen des §. 7 drei Querschnitte gemessen bis zur Höhe des Deckes des Maschinenraumes oder des unmittelbar über dem Maschinenraume befindlichen Deckes, und zwar ein Querschnitt an jedem der beiden Endpunkte und ein Querschnitt in der Mitte der Länge. Zur Summe der beiden Endquerschnitte wird das Vierfache des Mittelquerschnitts addirt und die Gesammtsumme mit einem Drittel des gemeinsamen Abstandes zwischen den Querschnitten multiplicirt. Das Product ergiebt den Inhalt des fraglichen Raumes.
2) Ist das unter Nr. 1 erwähnte, über dem Maschinenraum befindliche Deck nicht das oberste Deck des Schiffes, so wird der Inhalt des Raumes zwischen dem bereits gemessenen und dem obersten Deck, soweit er für die Maschine oder für den Zutritt von Licht und Luft abgeschieden ist, in der Weise ermittelt, daß die mittlere Länge, mittlere Breite und mittlere Tiefe mit einander multiplicirt werden. Der Inhalt dieses Raumes wird sodann dem Inhalt des übrigen Maschinenraumes zugerechnet.

   Das Gleiche gilt von dem Inhalt der in der vorgeschriebenen Weise angebrachten Kohlenbehälter, welche durch zwei Decke gehen.
3) Befinden sich die Maschine, die Dampfkessel oder die Kohlenbehälter in selbstständigen Abtheilungen, so werden diese in der unter Nr. 1 und 2 angegebenen Weise einzeln vermessen und die Summe des Raumgehaltes derselben gilt als der Inhalt des ganzen Raumes.
4) Zur Ermittelung des körperlichen Inhalts des von dem Wellentunnel in Schrauben-Dampfschiffen eingenommenen Raumes wird die mittlere Länge, mittlere Breite und mittlere Tiefe des Tunnels mit einander multiplicirt.

§. 18. Werden diejenigen Räume eines Schiffes, welche bei der Vermessung desselben vom Brutto-Raumgehalte in Abzug gebracht worden sind, in anderer Weise als in den §§. 15 und 16 vorgesehen, später nutzbar gemacht, so müssen sie dem Netto-Raumgehalte des Schiffes sofort zugezählt werden. Ob zu diesem Zwecke die Neuvermessung des Schiffes erforderlich ist oder nicht, bestimmt die Vermessungs-Behörde.

§. 35.

Bei allen Schiffen, deren Theile nicht auf die eine oder andere der einfachen geometrischen Körperformen zurückzuführen sind, wie dies bei allen größern Flußschiffen, insbesondere aber bei allen See-, Segel- und Dampfschiffen der Fall ist, benutzt man zur Inhaltsberechnung des eingetauchten Schiffkörpers mit ganz entschiedenem Vortheile die Simpson'sche Regel[1]). Hierzu denkt man sich den betreffenden Körper durch (zur Schwimmebene) horizontale oder verticale Schnittebenen in eine den Umständen entsprechende An-

---

[1]) Eine ganz vorzügliche Abhandlung über die „Simpson'sche Regel“ findet sich in Navier-Wittstein's „Lehrbuche der Differential- und Integral-Rechnung“. Zweiter Band, S. 215 (Vierte Auflage), unter der Ueberschrift „Angenäherte Quadraturen“.

zahl von Theilen zerlegt, wovon man zuerst die Inhalte der ebenen Begrenzungsflächen, sodann aber durch abermalige Anwendung der gedachten Regel, die Körperräume berechnet.

Um hierüber vollständige Einsicht zu erlangen, benutzen wir zu den gedachten Berechnungen nachstehende von Redtenbacher (Resultate für den Maschinenbau, Sechste Auflage, S. 309) aus Tredgold's Werke über die Dampfmaschinen (Anhang *A* und *B*) zusammengestellte Tabelle, welche die Verhältnisse des englischen Dampfschiffes Rainbow angiebt. Zur ferneren Erläuterung dienen die Figuren 38 und 39.

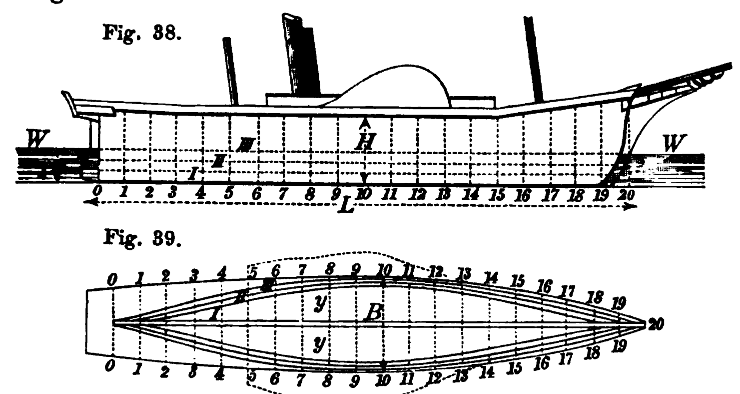


Fig. 38.

Fig. 39.

Dabei ist die $= L$ gesetzte Länge des Schiffes zwischen den sogenannten Perpendicularen in 20 gleiche Theile getheilt, die Tauchung $= T$, für die normale Belastung in 6 gleiche Theile (wovon, um nicht undeutlich zu werden, in der Figur nur vier gezeichnet sind) und die größte Breite (die des Hauptspannten) in der Schwimmebene $= B$ gesetzt.

Die Verticalreihen der Tabelle sind die Ordinatenwerthe der Begrenzungscurve des jedesmaligen Horizontalschnittes, wenn man die größte Breite in der Schwimmebene gleich 2000 setzt, so daß diese Werthe mit $\frac{B}{2000}$ [1]) multiplicirt werden müssen, um ihre wahren Größen zu erhalten. Die Horizontalreihen sind eben so die Ordinaten der einzelnen Querprofile etc.

---

[1]) Setzt man die (halbe) wirkliche Ordinate $= \eta$, so verhält sich

$$\eta : y = B : 2000, \text{ d. i. } \eta = \frac{yB}{2000} \text{ u. s. w.}$$

Hinterschiff.							Vorderschiff.						
Nr. des Querschnitts	Ordinaten der Horizontalschnitte.						Nr. des Querschnitts	Ordinaten der Horizontalschnitte.					
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
0	20	20	20	20	20	20	10	770	860	930	950	980	990
1	75	110	150	200	260	336	11	745	850	900	940	960	980
2	165	250	325	385	455	520	12	710	810	860	910	940	960
3	280	400	480	530	590	640	13	640	750	810	845	870	900
4	400	530	610	665	710	750	14	545	665	730	760	800	830
5	515	640	700	750	790	830	15	440	550	620	660	700	735
6	610	710	770	820	860	890	16	320	460	530	570	610	645
7	680	770	830	880	910	930	17	200	300	350	390	430	460
8	730	820	880	910	945	960	18	90	160	210	230	260	290
9	760	860	910	940	970	990	19	30	35	55	70	80	90
10	770	860	930	950	980	990	20	—	—	—	—	—	—

Zusatz 1. Berechnung des Volumens $= \mathfrak{V}$ der verdrängten Flüssigkeit aus den Horizontalschnitten. Es bezeichnet K den relativen Flächeninhalt eines der Horizontalschnitte, oder das Verhältniß des wahren Inhaltes $= F$ zum Inhalte des der Schwimmfläche umschriebenen Rechteckes, d.i. $k = \frac{F}{BL}$, $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{19}$ die Ordinatenwerthe der Tabelle, so daß die wahren Ordinatenwerthe also: $\frac{y_0 B}{2000}, \frac{y_1 B}{2000}$ etc. . . . $\frac{y_{19} B}{2000}$, so ergiebt sich nach der Simpsonschen Regel ohne Weiteres

$$k = \frac{F}{BL} = \frac{1}{20000} \cdot \frac{1}{3} \left\{ y_0 + y_{20} + 2(y_2 + y_4 \ldots y_{18}) + 4(y_1 + y_3 \ldots y_{19}) \right\}.$$

Daher für den ersten Schnitt:

$$y_0 + y_{20} = 20,$$

$$\begin{array}{ll} y_2 = 165 & y_1 = 75 \\ y_4 = 400 & y_3 = 280 \\ y_6 = 610 & y_5 = 515 \\ y_8 = 730 & y_7 = 680 \\ y_{10} = 770 & y_9 = 760 \\ y_{12} = 710 & y_{11} = 745 \\ y_{14} = 545 & y_{13} = 640 \\ y_{16} = 320 & y_{15} = 440 \\ y_{18} = 90 & y_{17} = 200 \\ \overline{4340 \times 2 = 8680;} & y_{19} = 30 \\ & \overline{4365 \times 4 = 17460;} \text{ also} \end{array}$$

$$k_1 = \frac{1}{60000}(20 + 8680 + 17460) = 0{,}436.$$

Auf dieselbe Weise verfahren, erhält man (den 0ten Schnitt = Null gesetzt):

$$k_0 = 0;\; k_1 = 0{,}4360;\; k_2 = 0{,}526833;\; k_3 = 0{,}582167;\; k_4 = 0{,}620667;$$
$$k_5 = 0{,}656333;\; k_6 = 0{,}687567.$$

Hieraus endlich:

$$\frac{\mathfrak{B}}{LBT} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{6} \left\{ k_0 + k_6 + 2\,(k_2 + k_4) + 4\,(k_1 + k_3 + k_5) \right\}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{LBT} = 0{,}53781 \text{ und}$$

$$\mathfrak{B} = 0{,}53781 \,.\, LBT.$$

Zusatz 2. Begreiflicher Weise muß sich $\mathfrak{B}$ auch aus den Verticalschnitten berechnen lassen, was zur Beurtheilung der Uebereinstimmung geschehen mag.

Zuerst erhält man, den relativen Flächeninhalt der Verticalschnitte mit r bezeichnet, d. h. $r = \frac{F}{TB}$ gesetzt, wenn die betreffenden Ordinaten durch z ausgedrückt werden:

$$r = \frac{F}{TB} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{1000} \left\{ z_0 + z_6 + 2\,(z_2 + z_4) + 4\,(z_1 + z_3 + z_5) \right\}.$$

Daher für den Verticalschnitt, weil hier $z_0 + z_1 = 20$; $2\,(z_2 + z_4) = 80$; $4\,(z_1 + z_3 + z_5) = 240$ ist,

$$r_0 = \tfrac{1}{18000}\,(20 + 80 + 240) = 0{,}018889.$$

So fortgefahren ergiebt sich überhaupt:

$r_0 = 0{,}018889$	$r_5 = 0{,}646111$	$r_{10} = 0{,}851667$	$r_{15} = 0{,}566389$
$r_1 = 0{,}160889$	$r_6 = 0{,}717222$	$r_{11} = 0{,}832222$	$r_{16} = 0{,}474722$
$r_2 = 0{,}309444$	$r_7 = 0{,}772778$	$r_{12} = 0{,}802222$	$r_{17} = 0{,}320000$
$r_3 = 0{,}438889$	$r_8 = 0{,}81333$	$r_{13} = 0{,}742778$	$r_{18} = 0{,}183889$
$r_4 = 0{,}556667$	$r_9 = 0{,}841667$	$r_{14} = 0{,}665556$	$r_{19} = 0{,}053333$

Ferner ist $\frac{\mathfrak{B}}{BLT} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{20} \left\{ r_0 + r_{20} + 2\,(r_2 + r_4 \ldots r_{18}) + 4\,(r_1 + r_3 \ldots r_{19}) \right\}$,

also wenn man vorstehende Zahlenwerthe substituirt:

$$\frac{\mathfrak{B}}{BLT} = 0{,}53781 \text{ oder}$$

$$\mathfrak{B} = 0{,}53781 \,.\, BLT.$$

So weit sich die bestimmten Zahlenwerthe von B, L und T aus den Zeichnungen des oben citirten Tredgold'schen Werkes entnehmen lassen, ist $L = 182{,}50$ Fuß (engl.), $B = 24',75$ und $T = 6',00$, d. i. $\mathfrak{B} = 14575{,}33$ Cubikfuß [1]).

Das Totalgewicht $Q = \gamma \,.\, \mathfrak{B}$ des Schiffes (Schale, Maschine und Kessel, Ausrüstung inclusive Takelage und Fracht) betrug daher, wenn man γ das Gewicht eines Cubikfußes Seewasser 1,024 mal so groß als ein Cubikfuß Süßwasser, also für englische Maaße

$$\gamma = 62{,}5 \times 1{,}024 = 64 \text{ Pfund englisch}^{2)} \text{ rechnet:}$$

$$Q = 14575{,}33 \times 64 = 932821{,}12 \text{ Pfd.},$$

oder in englischen Tonnen à 2240 Pfd:

$$Q = 416{,}4 \text{ Tons.}$$

---

[1]) Die Höhe $= H$ der Schiffschale des Rainbow beträgt, nach den bereits erwähnten Tredgold'schen Zeichnungen, $H = 12$ Fuß engl.

[2]) In englischen Tonnen ausgedrückt beträgt für Seewasser:

$$\gamma = \frac{64}{2240} = \frac{1}{35}.$$

§. 36.

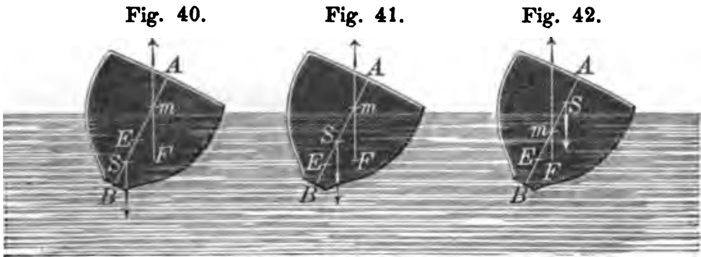
Stabilität schwimmender Körper.

Für die technische Mechanik noch besonders wichtig ist die Aufsuchung der Bedingungen, unter welchen ein Körper mit Stabilität, Instabilität oder mit völliger Gleichgültigkeit schwimmt.

Hierzu nehmen wir an, daß der im Wasser schwimmende Körper nicht gleichartig ist, vielmehr in seinem Innern eine Substanz (Ladung) enthält, deren Dichte größer als die des Wassers ist, und folglich der Schwerpunkt des eingetauchten Körpertheils nicht mit dem des verdrängten Wassers zusammenfällt.

Fig. 40 bis 42 mögen sodann drei schwimmende Körper vorstellen, welche durch irgend eine Kraft aus der ursprünglich aufrechten Gleichgewichtslage in eine neue schiefe Lage gebracht wurden, ohne daß letztere ein Gleichgewicht an sich zuläßt. Auftriebs- und Schwerkraftsrichtungen also nicht in derselben Verticalen liegen.

Fig. 40. Fig. 41. Fig. 42.



In allen drei Figuren bezeichnet S den Schwerpunkt des ganzen Körpers (einschließlich der Ladung), E den Schwerpunkt des verdrängten Wassers bei aufrechter und F bei geneigter Stellung.

Jeder dieser Körper ist sodann (ähnlich wie bereits §. 28 erörtert wurde) der Wirkung zweier Kräfte unterworfen, die ihn veranlassen, zwei verschiedene Bewegungen anzunehmen, nämlich eine fortschreitende, vertical aufwärts durch den Schwerpunkt S gerichtete, und eine Drehbewegung um eine durch diesen Schwerpunkt gehende horizontale Achse, welche letztere rechtwinklig auf der Verticalebene steht.

Die fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes kann für die hier folgenden Untersuchungen außer Acht bleiben, wenn man nur berücksichtigt, daß bei aufrechter und schiefer oder geneigter Stellung des Körpers, unter sonst allerlei Umständen, stets ganz gleiche Wasservolumen verdrängt werden müssen, was nothwendiger Weise, für die meisten Fälle, eine Veränderung der Drehachsenlage voraussetzt und in die betreffenden Rechnungen mit einführt.

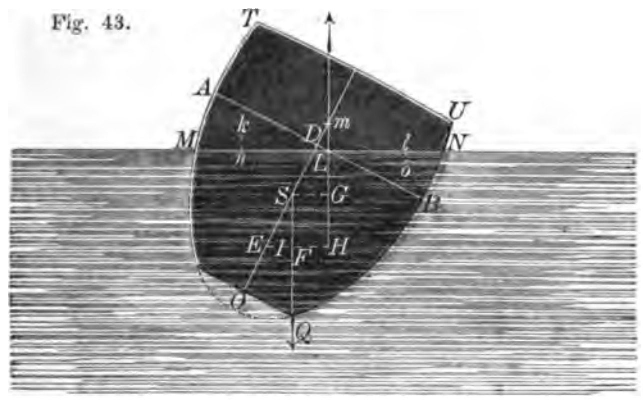
Sodann läßt sich aus der nähern Betrachtung der Figuren unmittelbar entnehmen, daß, wenn die Lage der Punkte F und S die von Fig. 40 und 41 ist, der Körper ein Bestreben besitzt, in seine ursprüngliche Stellung zurückzukehren; dagegen wenn die gedachten Punkte die Lage von Fig. 42 haben, dieses Bestreben darin besteht, den Körper immer mehr von der ersten Stellung zu entfernen, d. h. solchen endlich umzuschlagen.

Verlängert man, zur weiteren Untersuchung, die durch F gehende Auftriebsrichtung, bis solche die vorher verticale Achse AB des Körpers in einem Punkte m schneidet, so ergiebt sich leicht, daß der Körper mit Stabilität schwimmt, sobald dieser Punkt höher als der Schwerpunkt S liegt, dagegen umschlägt, mit Instabilität schwimmt, wenn m unter S liegt, so wie endlich, daß der Zustand völliger Gleichgültigkeit eintritt, sobald m mit S zusammenfällt. Gedachten Punkt m nennt man das Metacentrum des schwimmenden Körpers[1]).

§. 37.

Es mag jetzt gezeigt werden, wie man die Stabilität eines schwimmenden Körpers, für jeden besondern Fall, durch Rechnung zu bestimmen im Stande ist, wobei wir jedoch nur Formen voraussetzen, wie sie beim Schiffsbaue vorkommen, d. h. solche Körper, welche beim aufrechten Stande von einer durch die Schwimmebene und Längenachse gelegten Verticalebene (Mastenebene) in zwei völlig symmetrische Theile getheilt werden. Außerdem werde vorerst angenommen, es bilden alle Querschnitte des betreffenden Schiffes ähnliche gleiche Figuren, so daß Flächen als mit Volumen gleichgeltend aufgeführt werden können.

In Fig. 43 sei TOU das schwimmende Schiff, S dessen Schwerpunkt (einschließlich Ballast und Ladung), AOB das verdrängte



Wasservolumen (Deplacement) bei aufrechter Stellung und MNO dasselbe nach der Drehung des Schiffes, um den beliebigen Winkel OSQ, SQ vertical vorausgesetzt. Bei der ersten Stellung sei E der Schwerpunkt des Deplacements, bei der zweiten liege derselbe in der noch unbestimmten Verticalen HL.

Zieht man nun vom unveränderlichen Schwerpunkte S die Linie SG rechtwinklig gegen die Auftriebsrichtung HL, so erkennt man leicht, daß Alles auf die Bestimmung von SG, als Hebelarm des Auftriebes, ankommen wird, um das Drehungs- oder Stabilitätsmoment angeben zu können.

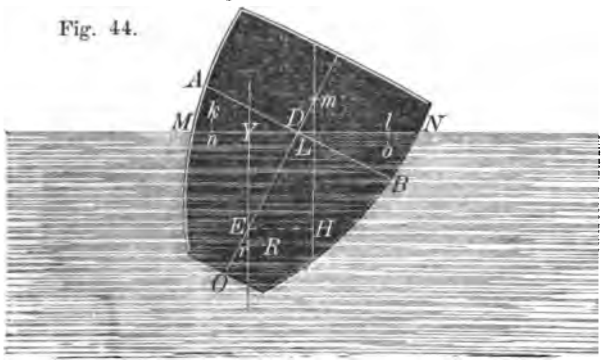
---

[1]) Von Μετά jenseits und Κέντρον Mittelpunkt.

Hierzu werde vorerst in Erinnerung gebracht, daß, um welchen Winkel das Schiff (bei gleichbleibender Ladung) auch gedreht werden mag, das Deplacement stets dasselbe bleiben, folglich ALM für alle Fälle gleich BLN sein wird, wobei L den Durchschnittspunkt der ersten Schwimmebene AB mit der neuen MN bezeichnet, ein Punkt, dessen Lage, wie aus dem später Folgenden zu entnehmen, besonders durch die Gestalt der oberen Seitenwände des Schiffes bestimmt wird.

Sodann mögen die Schwerpunkte von AML und BLN respective in k und o liegen und von diesen auf MN die Senkrechten kn und lo gefällt sein. Zieht man ferner von E auf die neue Auftriebsrichtung die Normale EH, so wird letztere durch die Proportion bestimmt $MON : BLN = nl : EH$.

Denn bezeichnet in Fig. 44 R den Schwerpunkt des Volumen-



theiles $MOBLM$, so erhält man für das Gleichgewicht, in Bezug auf eine durch E gelegte Verticalebene EY, die Momentengleichung:

$$(1) \quad MON \times EH = MOBLM \times rR + LBN \times lY,$$

ferner aber auch $AOB \times \text{Null} = MOBLM \times rR + ALM \times (-Yn)$,

d. i. $MOBLM \times rR = ALM \times Yn$, daher aus (1)

$$MON \times EH = ALM \times nY + LBN \times Yl \text{ und}$$

wegen $MAL = LBN$,

$$MON \times EH = LBN\,(nY + Yl) = LBN \times nl.$$

Demnach ist überhaupt $EH = \frac{BLN}{MON} \,.\, nl$, oder wenn das Volumen $BLN = \mathfrak{v}$, das $MON = \mathfrak{V}$ und $nl = b$ gesetzt wird

$$(2) \quad \overline{EH} = \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{V}} \,.\, b.$$

Wird nun angenommen, daß der Abstand der Punkte S und E, Fig. 43, bekannt und gleich e ist und bezeichnet φ den Neigungswinkel $OSQ = BLN$, so folgt $EI = ES \sin . \varphi = e \sin \varphi$. Wird sodann letzterer Werth von (2) abgezogen, so erhält man, weil $IH = SG$,

$$(3) \quad SG = \frac{\mathfrak{v}b}{\mathfrak{V}} - e \sin \varphi.$$

Bezeichnet daher Q das Gewicht des Deplacements oder das

Gewicht des ganzen Baues, so ergiebt sich das Stabilitätsmoment $M = Q\overline{SG}$ (Fig. 43) zu

$$M = Q\left[\frac{\mathfrak{v}b}{\mathfrak{B}} - e\sin\varphi\right].$$

Im Falle sehr kleiner Schwingungen kann man mit dem Bogen φ statt mit $\sin\varphi$ rechnen, da ferner auch statt dem Gewichte Q des ganzen Baues $\gamma\mathfrak{B}$ zu setzen ist, so wird aus I:

$$M = \gamma\mathfrak{B}\left[\frac{\mathfrak{v}\,.\,b}{\mathfrak{B}} - e\,.\,\varphi\right], \text{ oder auch}$$

$$\text{II.}\quad M = \gamma\left[\mathfrak{v}b - e\mathfrak{B}\,.\,\varphi\right].$$

Fig. 45.

Bezeichnet man jetzt mit $2y$ (Fig. 45) die Schiffsbreite CD in der Schwimmebene gemessen und zwar in der Entfernung $= z$ vom Hintertheile B des Schiffes, so ergiebt sich leicht:

$$\mathfrak{v}\,.\,b = \int\left(\frac{y^2\,.\,\varphi}{2}\right)dz\,.\left(\frac{4}{3}\,y\right) = \varphi\int\frac{2}{3}\,y^3\,dz + C.$$

Letzteres Integral ist aber nichts anderes als das Trägheitsmoment der ganzen Schwimmfläche in Bezug auf deren Längenachse, so daß, wenn dies Trägheitsmoment mit μ bezeichnet wird, aus II. überhaupt folgt:

$$\text{III.}\quad M = \gamma\,[\mu - e\mathfrak{B}]\,\varphi.$$

Bezeichnet man ferner in Fig. 43 die Entfernung des Schwerpunktes S vom Metacentrum mit e_1, so ergiebt sich auch, wegen $\overline{SG} = e_1 \sin\varphi$:

$$M = Qe_1 \sin\varphi = \gamma\mathfrak{B}e_1 \sin\varphi,$$

oder in dem vorbemerkten besonderen Falle:

$$\text{IV.}\quad M = \gamma\mathfrak{B}e_1\,.\,\varphi.$$

Aus III. und IV. erhält man noch besonders:

$$\text{V.}\quad e < \frac{\mu}{\mathfrak{B}}$$

als Bedingung der Stabilität des Schiffes und

$$\text{VI.}\quad e + e_1 = \overline{Em} = \frac{\mu}{\mathfrak{B}},$$

als Höhe des Metacentrums über den Schwerpunkt des Deplacements oder des ganzen Baues.

Zusatz 1. Der für den rationellen Schiffsbau wichtige Ausdruck III. dürfte es verdienen, hier noch eine kurze (praktische) Ableitung desselben zu notiren:

Verschafft man sich nämlich den nachstehenden mit (3) bezeichneten Hülfssatz, so ergiebt sich III. fast unmittelbar.

Hierzu repräsentire das Rechteck $ABCD$, Fig. 46, das Gewicht des ganzen Baues, also den Werth $Q = \gamma\mathfrak{B}$.

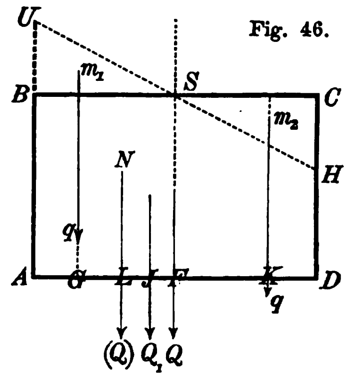


Fig. 46.

Ferner stelle die Fläche $ABSHDKFA$ ein Gewicht Q_1 dar und endlich sei eben so q das Gewicht der Dreieckfläche CHS.

Wird hierauf A zum Momentenpunkte gewählt, so hat man:

$$(1) \quad Q \,.\, \overline{AF} = Q_1 \overline{AI} + q \,.\, \overline{AK}.$$

Denkt man sich ferner die ganze Figur $ABCD$ um S gedreht und zwar so, daß $\Delta BUS = \Delta CHS$ wird (dabei BC als Schwimmebene gedacht), so läßt sich ferner setzen, das Gewicht Q jetzt in der Verticalen LN wirkend angenommen:

$$(2) \quad Q \,.\, \overline{AL} = Q_1 \overline{AI} + q \overline{AG}.$$

Zieht man endlich (2) von (1) ab, so folgt:

$$(3) \quad Q \,.\, \overline{LF} = q \,.\, \overline{GK}.$$

Bei einiger Aufmerksamkeit erkennt man aber leicht, daß, mit Bezug auf Fig. 43, geschrieben werden kann:

$$Q \,.\, \overline{LF} = Q \,.\, \overline{EH}\, \gamma \mathfrak{B} (e + e_1) \sin \varphi \text{ und}$$

$$q \,.\, \overline{GH} = \gamma \mathfrak{v} b = \gamma \varphi \mu, \text{ so daß aus (3) wird:}$$

$$\gamma \mathfrak{B} (e + e_1) \sin \varphi = \gamma \varphi \mu \text{ oder}$$

$$\gamma \mathfrak{B} e \,.\, \sin \varphi = \gamma \varphi \mu - \gamma \mathfrak{B} e_1 \sin \varphi, \text{ d. i.}$$

$$M = \gamma (\mu \varphi - \mathfrak{B} e \sin \varphi) \text{ oder } \varphi \text{ statt } \sin \varphi \text{ eingeführt:}$$

$$M = \gamma (\mu - e \mathfrak{B}) \varphi, \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz 2. Mit Hülfe des Werthes III. läßt sich leicht die Oscillation des Schiffes um eine durch den Schwerpunkt S (Fig. 43) des ganzes Baues gehende mit der Kiellinie parallele Achse, d. h. das sogenannte Schlingern berechnen.

Man erhält nämlich, da nach bekannten Sätzen die Bogenacceleration = Statisches Moment dividirt durch das Trägheitsmoment ist und wenn dabei die Schwingungszeit mit t und mit λ das Trägheitsmoment des ganzen Baues (bei Dampfschiffen incl. Maschine, Kessel etc.) bezeichnet wird:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{\gamma (\mu - e \mathfrak{B})}{\lambda} \,.\, \varphi,$$

woraus sich die Zeit = $\mathfrak{T}$ einer ganzen Oscillation ergiebt zu[1]):

$$\text{VII.} \quad \mathfrak{T} = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma (\mu - e \mathfrak{B})}}.$$

Zusatz 3. Streng genommen würde hier der Ort sein, wo auch die sogenannte „Dynamische Stabilität" der Schiffe, im Gegensatze der vorher behandelten „Statischen Stabilität", erörtert werden müßte.

Umfang und Zweck unserer Hydrodynamik gebieten jedoch, daß

---

[1]) Specielles in Bezug auf Ableitung der Gleichung VII, so wie ferner ein Zahlenbeispiel, findet sich in dem vom Verfasser (1859) geschriebenen Artikel „Dampfschiff" in den von Karmarsch herausgegebenen Supplementen der Prechtl'schen „Technologischen Encyklopädie", Bd. II, S. 449.

sich der Verfasser auf folgende Notizen, so wie auf die Angabe betreffender literarischer Quellen beschränkt.

Redtenbacher[1]) erörtert diesen Gegenstand Folgendermaßen: Die Wirkungsgröße, welche erforderlich ist, um ein Schiff um einen Winkel α aus seiner aufrechten Lage abzulenken, ist nach Gleichung III, wenn die Bewegung ganz langsam erfolgt:

$$\int_0^\alpha \gamma\,(\mu - e\mathfrak{V})\,\varphi d\varphi = \tfrac{1}{2}\gamma\,(\mu - \mathfrak{V})\,\alpha^2.$$

Hierzu bemerkt der genannte Autor Folgendes: Ebenso groß würde auch die zu einer rascher vor sich gehenden Ablenkung eines Schiffes erforderliche Wirkungsgröße sein, wenn das Schiff die Form eines halben Cylinders hätte, dessen Achse durch den Schwerpunkt des Schiffes ginge, weil die Drehung eines solchen Schiffes um die durch seinen Schwerpunkt gehende Längenachse keine Bewegung in dem das Schiff umgebenden Wasser verursachen würde. Allein die Schiffe und insbesondere die Dampfschiffe haben Formen, die von jenen eines halben Cylinders sehr bedeutend abweichen; insbesondere gilt dies von den Endtheilen, weniger von dem mittleren Theile. Eine rasche Drehung des Schiffes um eine durch den Schwerpunkt gehende Längenachse setzt daher das das Schiff umgebende Wasser in Bewegung, wozu eine gewisse Wirkungsgröße $= W$ erforderlich ist.

Die totale Wirkung, welche erforderlich wird, um ein Schiff um einen Winkel α abzulenken und ihm gleichzeitig eine gewisse Winkelgeschwindigkeit zu ertheilen, ist demnach:

$$\tfrac{1}{2}\gamma\,(\mu - \mathfrak{V}e)\,\alpha^2 + W.$$

Nach dem Betrage dieses Werthes ist die dynamische Stabilität eines Schiffes zu beurtheilen.

Nach diesen Erörterungen entwickelt Redtenbacher (in der angegebenen Quelle) einen Werth für W unter der Voraussetzung, daß der Schwerpunkt des ganzen Baues nur wenig über der Wasserfläche liegt.

Anmerkung 1. Die Ausdrücke V. und VI. hat zuerst Bouguer in seinem (1746 in Paris erschienenen) Werke „Traité du Navire", Pg. 272, angegeben. Den Mangel derselben erkennt man leicht, da die Voraussetzung eines unendlich kleinen Neigungswinkels höchstens für Flußschiffe zulässig wäre.

Dennoch benutzt man diesen Ausdruck für gewöhnliche praktische Fälle seiner Einfachheit wegen und letzteres werde auch hier als Grund genommen, denselben zur betreffenden Berechnung des englischen Dampfschiffes Rainbow (§. 35) zu verwenden.

Zuerst erhält man, weil y vorstehender Formel durch $\frac{By}{2000}$ ersetzt werden muß, ferner statt dz der Differenzwerth $\Delta z = \frac{L}{20}$ eingeführt werden kann, nach VI:

$$E\bar{m} = \frac{B^3 \,.\, L\Sigma\,(y^3)}{240\,000\,000\,000 \,.\, \mathfrak{B}}.$$

[1]) „Der Maschinenbau". Dritter Band (1865), S. 145.

Zufolge der Tabelle, §. 35, ist aber

$$\Sigma y^3 = [20^3 + 336^3 \ldots + 290^3 + 90^3] = 9683585556,$$

ferner war $\mathfrak{B} = 0{,}53781 \,.\, BLT$, daher die Metacentrumhöhe:

$$Em = \frac{0{,}9683585556}{24 \,.\, 0{,}53781} \,.\, \frac{B^2}{T},$$

$$Em = 0{,}075023 \,\frac{B^2}{T}.$$

Endlich speciell für das Dampfschiff Rainbow, wo $B = 24',75$, $T = 6',00$ ist:

$$Em = 7{,}65938 \text{ Fuß englisch.}$$

Anmerkung 2. Zur völligen Beantwortung betreffender Stabilitätsfragen ist noch die Lage des Schwerpunktes E der verdrängten Flüssigkeit zu bestimmen nöthig.

I. Höhe $= Z$ des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit über dem Kiel des Schiffes.

Unter Beibehaltung der Bezeichnung §. 34 und mit Zuziehung von §. 75 (S. 192) der Mechanik des Verfassers ergiebt sich ohne Weiteres:

$$Z = \tfrac{1}{6}\, T \left\{ \frac{0 \,.\, k_0 + 1 \,.\, 4k + 2 \,.\, 2k_2 + 3 \,.\, 4k_3 + 4 \,.\, 2k_4 + 5 \,.\, 4k_5 + 6k_6}{k_0 + 4k_1 + 2k_2 + 4k_3 + 2k_4 + 4k_5 + k_6} \right\}.$$

Für die Zahlenwerthe in §. 35:

$$Z = \frac{T}{6} \,.\, \frac{33{,}054733}{9{,}68034} = 0{,}56909 \,.\, T.$$

Endlich für das Schiff Rainbow, wo $T = 6{,}00$:

$$Z = 3{,}41454 \text{ Fuß.}$$

II. Horizontalabstand $= X$ des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit vom hintern Ende des Kieles.

Auf ganz gleichem Wege wie vorher, mit den Bezeichnungen von §. 34, ergiebt sich sofort:

$$X = \frac{L}{20} \left\{ \frac{0 r_0 + 1 \,.\, 4 \,.\, r_1 + 2 \,.\, 5 \,.\, r_2 \ldots .\, 19 \,.\, 4 \,.\, r_{19} + 20 r_{20}}{r_0 + r_{20} + 2\,(r_2 + r_4 \ldots r_{18}) + 4\,(r_1\, r_3 \ldots r_{19})} \right\}.$$

Nach §. 35 läßt sich aber der Nenner durch $\frac{60\,v}{BLT}$ ersetzen, so wie ferner ist, wenn man die Tabellenwerthe §. 35 substituirt:

$$X = \frac{L}{1200}\, \frac{309{,}873552}{0{,}53781} = 0{,}480147 \,.\, L.$$

Speciell für das Schiff Rainbow also, wo $L = 182',5$,

$$X = 87{,}626 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung 3. Eine andere Formel zur Schwerpunktsbestimmung für Flächen vorher betrachteter (symmetrischer) Gestalt läßt sich wie folgt ableiten: Mit Bezug auf nebenstehende Figur 47 erhält man, den Inhalt der Fläche $= F$ gesetzt,

$$FX = \begin{cases} \frac{a\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{4} \\ + \frac{b\alpha}{2} \cdot \frac{3\alpha}{4} + \frac{b\alpha}{2} \cdot \frac{5\alpha}{4} \\ + \frac{c\alpha}{2} \cdot \frac{7\alpha}{4} + \frac{c\alpha}{2} \cdot \frac{9\alpha}{4} \\ + \frac{d\alpha}{2} \cdot \frac{11\alpha}{4} + \frac{d\alpha}{2} \cdot \frac{13\alpha}{4} \text{ etc., d. i.} \end{cases}$$

$$FX = \frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{a}{2} + 4b + 8c + 12d \ldots\right).$$

Fig. 47.

Eine noch andere von Bouguer in dessen Werke „de la mâture des vaissaux", p. 126, Paris 1727) angegebene Regel erhält man folgendermaßen:

Jede der von zwei parallelen Geraden AA, BB etc. eingeschlossenen Flächen wird in ein Rechteck und in zwei congruente Dreiecke zerlegt, z. B. Fläche $ABBA$ in das Rechteck vom Inhalte $= a\alpha$ und in die beiden Dreiecke vom Inhalte $\frac{b-a}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}$ etc., alsdann ergiebt sich leicht:

$$F.X = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{6}(\ a + \ 2b), \\ \frac{\alpha^2}{6}(\ 4b + \ 5c), \\ \frac{\alpha^2}{6}(\ 7c + \ 8d), \\ \frac{\alpha^2}{6}(10d + 11e), \\ \frac{\alpha^2}{6}(13e + 14f) \text{ etc., d. i.} \end{cases}$$

$$F.X = \alpha^2\left(\frac{a}{6} + b + 2c + 3d + 4e + \tfrac{14}{6}f\right).$$

Beide Formeln stehen an Genauigkeit denen nach, welche aus der Simpson'schen Regel abgeleitet wurden.

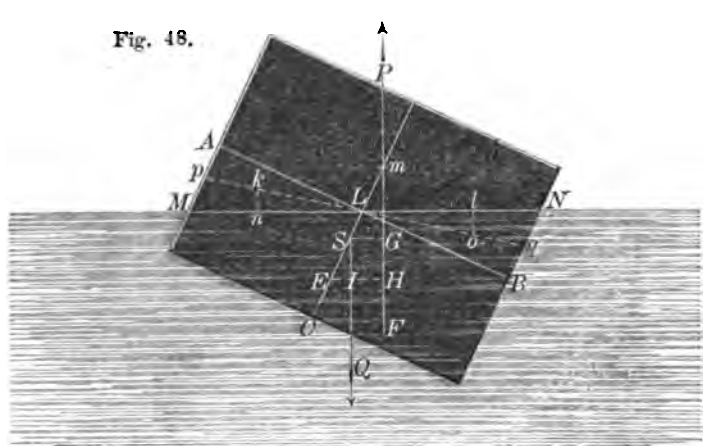
§. 38.

Für die Anwendung der vorstehenden allgemeinen Ausdrücke mögen hier einige specielle Aufgaben folgen.

Aufgabe 1. Das Schiff, Fig. 48, habe lauter rectanguläre Querschnitte, und gegeben sei das Gesammtgewicht Q, das Deplacement $AOB = MON = V$, die Breite $AB = t$, der Abstand der beiden Schwerpunkte S und $E = d$ und der Winkel, um welchen das Schiff geneigt werden soll, d. i. $\angle OSQ = \varphi$. Die Länge des Schiffes sei der Einheit gleich.

Auflösung. Der Gestalt der Seiten nach ist hier anzunehmen, daß der Querschnittspunkt L der beiden Schwimmebenen

Fig. 48.



AB und MN im Halbirungspunkte derselben liegt[1]). Deßhalb ergiebt sich $v = BLN = \frac{t^2 \operatorname{tg} \varphi}{8}$, $b = nl = \frac{t}{3}$ (sec φ + cos φ) und somit das Stabilitätsmoment, nach I. des vorigen Paragraphen:

$$(1) \quad M = Q \left\{ \frac{t^3 \operatorname{tg} . \varphi}{24\, V} (\sec . \varphi + \cos . \varphi) - d . \sin . \varphi \right\},$$

ferner die Höhe des Metacentrums m über E, nach III.

$$(2) \quad Em = \frac{t^3}{24} \, \frac{(\sec . \varphi + \cos . \varphi)}{V . \cos . \varphi}.$$

Ist für einen besonderen Fall $t = AB = 100$, $d = 13$, $V = 3600$, $Q = 1000$ Tonnen[2]), so erhält man aus (1) $M = 2841{,}7$ Tonnen. In der Entfernung $= 50$, in der Mastebene von der Drehungsachse, kann daher eine Kraft, (z. B. der Wind) von $\frac{2841{,}7}{50} = 56{,}8$ Tonnen wirken, und gegen die aufrechte Stellung eine Neigung von 15° veranlassen, ohne daß das Schiff umschlägt, vielmehr wird dasselbe, wenn gedachte Kraft zu wirken aufhört, nach einigen Schwingungen in die erste, aufrechte Stellung von selbst zurückkehren.

Das Metacentrum liegt dabei nach (2) über E in der Höhe $Em = 23{,}9$.

---

[1]) Zieht man durch die Schwerpunkte k und o der Dreiecke AML und LBN die Grade pq, so erhält man $NB = \frac{t . \operatorname{tg} . \varphi}{2}$, folglich $qB = \frac{t . \operatorname{tg} . \varphi}{4}$ mithin $Lq = \frac{t \sqrt{4 + \operatorname{tg} . \varphi^2}}{4}$. Ferner verhält sich $Lq : Nq = \sin . LNq : \sin . NLq$, daher $\sin . NLq = \frac{\sin . \varphi}{\sqrt{4 + \operatorname{tg} . \varphi^2}}$ und $\cos^2 . (NLq) = \frac{2 + \sec . \varphi^2 + \cos . \varphi^2}{4 + \operatorname{tg} . \varphi^2}$ oder, weil $2 \sec . \varphi \cos . \varphi = 2$ ist, $\cos^2 . (NLq = \frac{(\sec . \varphi + \cos . \varphi)^2}{4 + \operatorname{tg} . \varphi^2}$ d. i. $\cos . NLq = \frac{\sec . \varphi + \cos . \varphi}{\sqrt{4 + \operatorname{tg} . \varphi^2}}$ da nun $Ll = Lo . \cos . NLq = \frac{2}{3} Lq . \cos . NLq$, so folgt $Ll = \frac{t}{6} (\sec . \varphi + \cos . \varphi)$ und hieraus endlich $b = nl\ 2\, Ll$, wie oben angegeben.

[2]) Eine englische Tonne = 1051,649 Kilogramm = 2240 ℔ engl.; eine französische Tonne = 1000 Kilogramm.

Aufgabe 2. Die Querschnitte des Schiffes bilden lauter Trapeze $ABCD$, Fig. 49. Gegeben sei die Breite in der Schwimmebene beim aufrechten Stande $AB = a$, ferner $CD = c$, die Eintauchungstiefe $KO = h$, so wie der Neigungswinkel $OSQ = \varphi$.

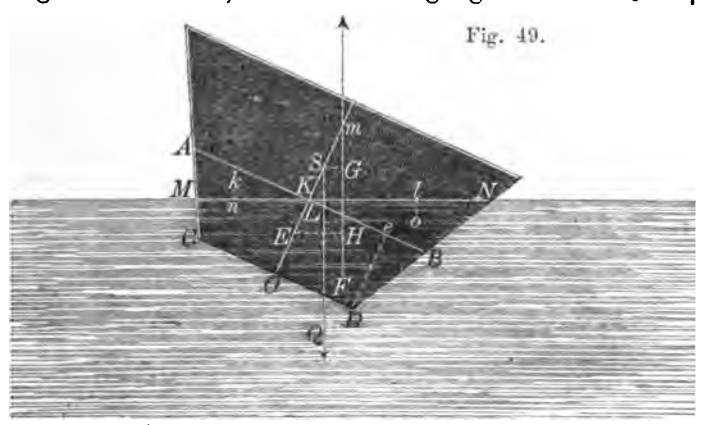


Fig. 49.

Auflösung. Vorerst ist die Lage des Punktes L anzugeben, durch welchen die Durchschnittslinie der ersten Schwimmebene AB mit der neuen MN geht, welcher Punkt hier (wegen der Gestalt der Seiten AM und BN) nicht im Halbirungspunkte von AB mit MN liegen kann. Wie unten in der Note gezeigt ist[1]), kann aber gedachte Bestimmung auf höchst einfachem geometrischen Wege geschehen, worauf also die Größe v der allgemeinen Formeln, ferner die Schwerpunkte k und o so wie $ln = b$ zu finden sind. Eben so leicht kann mit Hülfe bekannter Sätze der Geostatik die Entfernung $= d$ der beiden Schwerpunkte E und S berechnet werden[2]), worauf, weil auch $V = Q$ bestimmt werden können, die Aufgabe als gelöst zu betrachten ist.

§. 39.

Es bleibt nunmehr noch übrig, zu zeigen, wie das Stabilitätsmoment für den Fall bestimmt werden kann, wenn alle Querschnitte des Schiffes (merklich) verschieden von einander sind.

---

[1]) Da $\triangle ALM = \triangle BLN$ sein muß, so folgt $BL \times LN = AL \times ML$, und wenn vorerst $LB = x$ gesetzt wird (1) $x \,.\, LN = (a - x)\, ML$. Zur Bestimmung von LN und LM, werde von D auf AB die Normale De gefällt, $\angle DBe$ mit ψ und $\angle BNL$ mit χ bezeichnet. Sodann ist $Be = \frac{a-c}{2}$, $\operatorname{tg}. \psi = \frac{h}{Be}$ und $\chi = \psi - \varphi$, folglich wegen $BL : LN = \sin. \chi : \sin. \psi$, $LN = \frac{x \sin. \psi}{\sin. \chi}$, sowie $ML = \frac{(a-x) \sin. \psi}{\sin. (\varphi + \psi)}$. Durch Substitution letzterer beiden Werthe in (1) wird aber x und somit die Lage des Punktes L gefunden.

[2]) Ueber eine praktische Bestimmung von $ES = d$ sehe man den Anhang zu diesem Buche unter Nr. 1.

Hierzu nehmen wir vorerst an, daß die Längenachse des Schiffes in entsprechende Theile getheilt ist, durch letztere rechtwinklig zur genannten Achse Verticalebenen gelegt sind und Form und Inhalt der betreffenden Querschnittsflächen bekannt ist; ferner das Deplacement in gleicher Weise vorher berechnet wurde.

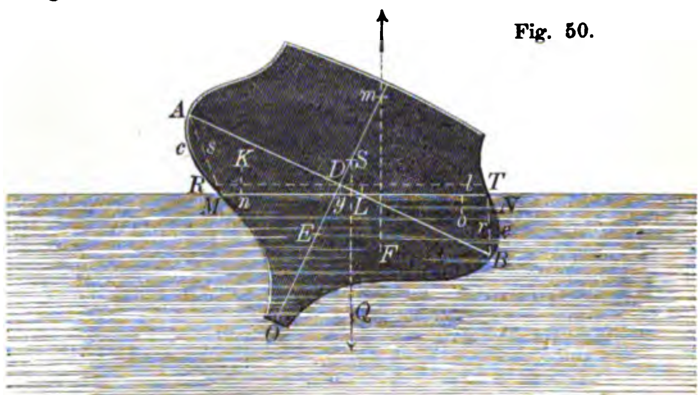


Fig. 50.

Fig. 50 stelle irgend einen der gedachten Querschnitte (z. B. den größten) dar, wobei *AB* die Schwimmebene bei aufrechter, *MN* die bei geneigter Lage des Schiffes bezeichnen mag. Vorerst ist hier zu bemerken, daß der Punkt *L*, in welchem sich letztgenannte Ebenen schneiden, nicht auf die Weise bestimmt werden kann, wie solches in der zweiten Aufgabe des vorigen Paragraphen geschah, dadurch nämlich, daß in irgend einem einzelnen Querschnitte Fläche *MLA* der Fläche *BLN* gleich angenommen oder gemacht wurde, indem nach gegenwärtiger Voraussetzung das in das Wasser und aus dem Wasser getretene Volumen nicht den respectiven Flächen selbst proportional ist, wie solches bei durchaus ähnlich gleichen Figuren der Fall war. Wie verschieden aber auch die gleichliegenden Flächen *AML* und *BLN* in den verschiedenen Querschnitten sein mögen, so wird doch immer noch das zwischen ihnen enthaltene Volumen in der ganzen Längenausdehnung des Schiffes, d. h. das respective aus und in das Wasser getretene Total-Volumen, gleich groß sein.

Auf eine für die Praxis hinreichend genaue Weise kann die Auflösung der fraglichen Aufgabe wie folgt geschehen. Man theile *AB* in zwei gleiche Theile und lege durch den Theilpunkt *D* eine Parallelebene *RT* zu *MN*. Der Abstand *DL* muß dann, wie leicht zu ermessen, in allen Querschnitten derselbe sein. Mit Zuziehung von Simpson's Regel berechne man ferner in jedem Querschnitte den Inhalt der Fläche *BDTe* und hieraus das zwischen den Ebenen *BD* und *DT* enthaltene Volumen; auf gleiche Weise ermittele man das zwischen den Ebenen *AD* und *RD* enthaltene Volumen *ADRc*. Ersteres Volumen werde mit p, letzteres mit q bezeichnet, außerdem mag $p > q$ gefunden, auch der Inhalt $= a$ der durch *RT* gelegten horizontalen Schnittfläche bekannt sein. Sodann ergiebt sich

$DL = \frac{p-q}{a \sin . \varphi}$,[1]) wobei φ den Neigungswinkel des Schiffes bezeichnet. Ist aber L bekannt, so kann man für jeden Querschnitt die Fläche LBN, mithin das ganze eingetauchte Volumen (was hierbei annähernd dem aus dem Wasser getretenen Volumen gleich sein wird) also überhaupt die Größe v der allgemeinen Formeln berechnen.

Um die zweite Größe $nl = b$ zu erhalten, bestimme man in allen Querschnitten die statischen Momente der Flächen $BrNe$ und BLN, bezogen auf eine durch L gelegte Verticalebene, addire solche sämmtlich und dividire die Summe durch v, so giebt der Quotient die Entfernung lL; auf gleiche Weise verfahre man, um Ln aufzufinden, wonach sodann $ln = Ln + Ll$ bekannt ist.

Die Lage des Schwerpunktes S hängt sowohl von der Construction als Ausrüstung und Ladung des Schiffes ab, welche Umstände fast immer die Bestimmung der Lage desselben, sowie weiter die Größe $ES = e$ zulassen. Als Annäherungswerth kann man zuweilen $ES = \frac{1}{8}$ der größten Breite des Schiffes, in der Schwimmebene gemessen, annehmen.

Specielle Aufgaben, namentlich Zahlenbeispiele für vorstehende Fälle hier aufzuführen, gestattet der Raum nicht, weßhalb wir auf ausführlichere Werke verweisen müssen[2]).

§. 40.

Bestimmung der specifischen Gewichte fester und nicht zusammendrückbar flüssiger Körper.

Bezeichnet s das specifische Gewicht eines beliebigen Körpers, P dessen absolutes Gewicht und p das absolute Gewicht eines Wasserkörpers von gleichem Volumen, so erhält man unmittelbar nach §. 28

$$(1) \quad s = \frac{P}{p}.$$

Bezeichnet ferner γ die Dichte oder das Gewicht einer Cubikeinheit Wasser und $\mathfrak{V}$ das vorausgesetzte gleiche Volumen, so ist $p = \gamma \mathfrak{V}$, also auch

$$(2) \quad s = \frac{P}{\gamma \mathfrak{V}}, \text{ so wie}$$

---

[1]) Es sei $fl . BLNe = fl . ALMc = e$, $fl . NLDT = m$, $fl . MLDR = n$, so wird man setzen können $BDTe = e + m$, $ADR = e - n$, folglich die Differenz beider Letzteren, d. i. $MNTR = m + n = u$. Ist Dy der Abstand der Parallelen MN und RT, so folgt auch $u = MN \times Dy = MN \times DL \sin . \varphi$, mithin $DL = \frac{u}{MN . \sin . \varphi}$, woraus der obige Ausdruck leicht abgeleitet werden kann.

[2]) Atwood, A Disquisition on the Stability of Ships; in den Phil. Transact. vom Jahre 1798, p. 287. Scott Russel, The modern system of naval architecture. London 1865. 3 Vol. in gr. Fol. Rankine, Shipbuilding, theoretical and practical. London 1866.

(3) $P = \gamma s \mathfrak{V}$, oder, wenn Δ die Dichte des Körpers P ausdrückt. (4($P = \Delta . \mathfrak{V}$. Haben sodann für irgend einen anderen Körper die Größen $P', p', s', \mathfrak{V}'$ dieselbe Bedeutung, so erhält man folgende Proportionen:

$$s : s' = \frac{P}{p} : \frac{P'}{p'} = \frac{P}{\mathfrak{V}} : \frac{P'}{\mathfrak{V}'} \text{ etc., und hieraus}$$

für $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}'$,

$$(5) \quad s : s' = P : P',$$

für $P = P'$,

$$(6) \quad s : s' = \mathfrak{V}' : \mathfrak{V} \text{ etc.}$$

Gleichungen und Proportionen, welche sich leicht in Worten ausdrücken lassen.

Zusatz 1. Die Bestimmung specifischer Gewichte fester und nicht zusammendrückbar flüssiger Körper, unter Anwendung der Formeln des vorigen Paragraphen, macht meistentheils, zur Herleitung der dort vorkommenden Größen, verschiedene Hülfsmittel nothwendig, wovon die hauptsächlichsten die hydrostatische Waage, Glasgefäße (Flaschen) mit eingeschliffenem Stöpsel und die sogenannten Senkwaagen (Aräometer) sind.

Die hydrostatische Waage ist nichts anderes als eine doppelarmige gleicharmige Waage von großer Genauigkeit und Empfindlichkeit, die so eingerichtet ist, daß man damit Körper unter Wasser abwägen kann. Zu diesem Zwecke ist unter einer der Schalen ein Häkchen angebracht, woran ein feiner Faden (Draht, Haar) befestigt ist, an welchem der betreffende Körper aufgehangen werden kann.

A. Ist sodann der Körper, dessen specifisches Gewicht bestimmt werden soll, ein fester im Wasser unauflöslicher und zugleich specifisch schwerer als letzteres, so ermittelt man vorerst sein absolutes Gewicht $= P$ in der Luft, sodann am Faden aufgehangen, sein absolutes Gewicht $= q$ im Wasser, wonach zufolge §. 28 das Gewicht des gleichgroßen Wasservolumens $p = P - q$ und nach (1) dieses Paragraphen das specifische Gewicht erhalten wird zu

$$s = \frac{P}{P - q}.$$

B. Ist der feste Körper specifisch leichter als Wasser, so hat man ihn mit einem anderen Körper mechanisch derartig zu verbinden, daß beide vereint vollkommen ins Wasser tauchen. Das Weitere ergiebt sich aus Folgendem.

Das absolute Gewicht des specifisch schwereren Körpers sei $= P$, das des leichteren $= Q$; im Wasser wiege ersterer $= q$, die Verbindung beider $= W$. Sodann ist für den ersten Körper der Auftrieb $= P - q$, für die Verbindung $P + Q - W$, folglich für den leichteren Körper allein $(P + Q - W) - (P - q) = Q + q - W$, mithin

$$s = \frac{Q}{Q + q - W}.$$

C. Vermag der Körper Wasser in seinen Poren aufzunehmen, so wiegt man ihn zuerst in trockenem Zustande in der Luft, läßt ihn sodann ganz mit Wasser ansaugen, wiegt ihn nochmals, erhält hierdurch das

Gewicht des aufgenommenen Wassers, bestimmt endlich seinen Gewichtsverlust im Wasser etc.

D. Löst sich der Körper im Wasser auf, so wendet man eine Flüssigkeit an, in welcher er unauflöslich und deren spec. Gewicht bekannt ist. Durch Ermittelung seines Gewichtsverlustes in gedachter Flüssigkeit und nachheriger Anwendung der Proportion (5) ergiebt sich das spec. Gewicht.

E. Ist das spec. Gewicht einer Flüssigkeit zu bestimmen, so taucht man einen geeigneten festen Körper einmal in diese, ein anderes Mal ins Wasser, worauf man ebenfalls unter Anwendung der Proportion (5) das gesuchte spec. Gewicht erhält. Obwohl die hydrostatische Waage streng genommen der genaueste und sicherste Apparat zur Bestimmung der spec. Gewichte, insbesondere fester Körper genannt werden muß, so verdienen doch einige andere mindestens hier der Erwähnung, was in nachstehenden Zusätzen geschehen soll[1]).

Fig. 51.

d m a b c

Zusatz 2. Aräometer[2]) (Senkwaagen, Schwimmwaagen) sind frei schwimmende Körper von entsprechender Gestalt, durch deren Einsenkung in Flüssigkeiten sowohl das spec. Gewicht dieser, als auch fester Körper bestimmt werden kann. Ihr Constructions-Princip beruht entweder auf Proportion (5) oder (6) §. 40 und hiernach nennt man sie Gewichts-Aräometer oder Scalen- (Volumen-) Aräometer.

Fig. 52.

d m g

Will man mittelst dieser Aräometer nur das spec. Gewicht flüssiger Körper bestimmen, so kann man ihnen (nach Fahrenheit) im Allgemeinen die Gestalt von Fig. 51 geben. Dabei ist *ab* ein aus Glas oder Blech verfertigter, hohler, cylinder- oder birnförmiger Körper, der unterhalb eine mit Bleischrot oder Quecksilber gefüllte Kugel *c* trägt, oberhalb auf einem sehr dünnen Halse mit einem Schälchen *d* versehen ist, um Gewichte auflegen zu können. Am gedachten Halse ist ein Zeichen (Marke, Strich) *m* angebracht, bis zu welchem das Instrument beim Gebrauche stets einsinken muß.

Soll dies Aräometer gleichzeitig auch für feste Körper brauchbar sein, so bringt man (nach Nicholsen) statt der Kugel *c* ein Eimerchen *g*, Fig. 52, an, welches zur Aufnahme des zu untersuchenden Körpers dient. Bemerktes Eimerchen läßt sich auch (nach Charles) durch ein Drahtkörbchen ersetzen, wobei sich weniger Luft, ohne gesehen zu werden, anhängen kann.

---

[1]) Ueber die Bestimmung des spec. Gewichtes der Flüssigkeiten mittelst der Waage nach einer neuen Methode sehe man: Mohr's „Lehrbuch der pharmaceutischen Technik“, und hieraus Pouillet-Müller, „Lehrbuch der Physik und Meteorologie“. Achte (1876) von Prof. Pfaundler besorgte Ausgabe, S. 123 ff. unter der Ueberschrift „Anwendung des Archimedischen Princips zur Bestimmung des spec. Gewichts fester und flüssiger Körper“. Höchst beachtenswerth ist endlich noch der Abschnitt „Bestimmung des specifischen Gewichtes der Körper“ in Grashof's „Theoretischer Maschinenlehre“. Erster Band, S. 374, §. 68 u. f.

[2]) Von ἀραιός locker, dünn und μέτρον Maaß.

Zusatz 3. Denkt man sich bei dem Aräometer, Fig. 51, das Schälchen *d* hinweg, den Hals *am* verlängert und an diesem eine Scala angebracht, so erhält man die Form der gewöhnlichen Scalen-Aräometer, Fig. 53, die für die Praxis bei weitem wichtiger als die vorbeschriebenen sind.

Fig. 53.

Hierbei kann die Entwerfung der Scala mit Zuziehung folgender Rechnung erfolgen:

Es sei P das absolute Gewicht des Aräometers, v das Volumen, um welches dasselbe im Wasser einsinkt, γ das Gewicht der Cubikeinheit des letzteren, so ist zuerst (1) $P = \gamma v$. Senkt man das Instrument in eine Flüssigkeit vom spec. Gewichte $s < 1$ und ist a der Querschnitt des Halses, Fig. 53, b die Einsenkungstiefe in die letztgedachte Flüssigkeit, so erhält man für's Gleichgewicht: $P = \gamma s v + \gamma s a b$ und wegen (1) $P = Ps + \gamma s a b$, woraus (2) $b = \frac{P}{\gamma a}\left(\frac{1-s}{s}\right)$ folgt. Der Querschnitt a kann sodann dadurch bestimmt werden, daß man das Aräometer wieder in Wasser einsenkt, ein Zulagegewicht p beifügt und hierbei die Einsenkungstiefe $= c$ bemerkt, wonach $p = \gamma a c$, folglich $b = \frac{cP}{p}\left(\frac{1-s}{s}\right)$ erhalten wird. Für den Fall, daß $s > 1$, findet sich auf gleichem Wege: $b = \frac{cP}{p}\left(\frac{s-1}{s}\right)$.

Endlich ergiebt sich noch:

$$s = \frac{1}{1 + \frac{bp}{cP}}, \text{ wenn } s < 1$$

$$s = \frac{1}{1 - \frac{bp}{cP}}, \text{ wenn } s > 1.$$

Die Genauigkeit wird um so größer, je bedeutender die Entfernung eines Theilstriches vom andern ist, was zufolge des Werthes b in (1) einen kleinen Querschnitt a, d. h. einen sehr dünnen Hals des Instrumentes voraussetzt[1]).

Zusatz 4. Bei der praktischen Bestimmung gegenwärtigen Buches dürfte es nicht unangemessen sein, der Aräometer mit willkürlicher Scala zu gedenken, obwohl dieselben keinen wissenschaftlichen Werth haben, da sie weder das specifische Gewicht, noch den Procentgehalt irgend einer Flüssigkeit angeben.

Die drei gebräuchlichsten dieser Aräometer sind zur Zeit das von Baumé, Cartier und Beck[2]).

---

[1]) Weiteres über diese Gegenstände findet sich in folgenden Werken: Meißner „Aräometrie etc." Wien 1816. — Baumgartner „Aräometrie für Chemisten und Technologen". Wien 1820. — Liebig, Handwörterbuch der reinen und angewandten Chemie. Bd. I, S. 474. — Kohlrausch, Praktische Regeln zu genaueren Bestimmungen des specifischen Gewichtes. Marburg 1856.

[2]) Nach dem Handbuche der Gewerbkunde von Karmarsch und Heeren, 2. Aufl., Bd. 1, S. 57.

Das Baumé'sche hat, je nachdem es für schwerere oder leichtere Flüssigkeiten bestimmt ist, ganz verschiedene Graduirung.

a) Für schwerere Flüssigkeiten bereitet man eine Auflösung von 15 Gewichtstheilen trockenem Kochsalz in 85 Theilen destillirtem Wasser, läßt das Instrument darin schwimmen und bezeichnet den Punkt, bis zu welchem es einsinkt, mit der Zahl 15; hierauf wird der Punkt, bis zu welchem es in reinem Wasser einsinkt, mit Null bezeichnet, der Abstand zwischen beiden Punkten in 15 gleiche Theile getheilt und dieselbe Theilung, soweit die Länge der Röhre gestattet, etwa bis zu 70 Graden noch weiter fortgesetzt. Die Null, dem specifischen Gewichte des Wassers entsprechend, bildet den oberen Anfang der Scala.

b) Für leichtere Flüssigkeiten löst man 1 Theil Kochsalz in 9 Theilen Wasser und bezeichnet den Punkt, bis zu welchem das Instrument in diese Lösung einsinkt, welcher Punkt am unteren Ende der Scala liegen muß, mit Null; sodann den Punkt, bis zu welchem es in reines Wasser einsinkt, mit 10; theilt den Zwischenraum in 10 gleiche Theile und trägt noch mehr solcher Theile bis zum oberen Ende der Scala.

Die Cartier'sche Scala ist durch eine willkürliche, noch dazu ganz unzweckmäßige Abänderung der Baumé'schen entstanden. Cartier vergrößerte die Grade ein wenig, so daß 15 seiner Grade = 16 Baumé'schen (für leichtere Flüssigkeit) wurden, ferner verrückte er die Scala in der Art, daß am Wasserpunkt $10\frac{3}{4}$ zu stehen kam. Diese Scala würde ihrer unsinnigen Einrichtung wegen verdienen der Vergessenheit anheimzufallen, sie hat sich aber dennoch in Frankreich als Branntweinwaage sehr verbreitet.

Weit vernünftiger und zweckmäßiger ist die Scala von Beck in Bern, nach Bentely's Angaben construirt. Der Wasserpunkt, welcher ziemlich in der Mitte der Scala liegt, ist mit Null bezeichnet; ein zweiter Punkt, bis zu welchem das Instrument in einer Flüssigkeit von 0,85 specifischem Gewichte einsinkt, mit der Zahl 30. Der Zwischenraum beider Punkte wird in 30 gleiche Theile getheilt und gleich große Grade werden noch oberhalb und unterhalb aufgetragn. Die Scala gilt für die Normaltemperatur von $+10^{\circ}$ R.

Folgende Tabelle giebt eine Zusammenstellung der Baumé'schen, Cartier'schen und Beck'schen Aräometer-Scalen, und der den Graden dieser Scalen entsprechenden specifischen Gewichte für Flüssigkeiten, welche leichter sind als Wasser:

Grade.	Baumé.	Cartier.	Beck.	Grade.	Baumé.	Cartier.	Beck.
0			1,0000	30	0,8788	0,8707	0,8500
5			0,9714	35	0,8530	0,8421	0,8292
10	1,0000		0,9444	40	0,8287	0,8153	0,8095
15	0,9666	0,9697	0,9189	45	0,8057		0,7907
20	0,9355	0,9343	0,8947	50	0,7839		0,7727
25	0,9063	0,9014	0,8717	60	0,7438		0,7391

§. 41.

Vorstehendem Paragraphen werde hier eine tabellarische Zusammenstellung spec. Gewichte solcher Körper beigefügt, welche direct und indirect für die technische Mechanik von Wichtigkeit sind.

Sobald das Gegentheil nicht angegeben, ist überall eine mittlere Temperatur von 15 bis 20° C., ferner das specifische Gewicht des reinen oder destillirten Wassers = 1 vorausgesetzt.

I. Specifische Gewichte fester Körper[1]).

Namen der Körper.	Specifische Gewichte. Grenzen.	Mittelwerth.
Ahornholz, frisch	0,843 — 0,944	0,893
— lufttrocken	0,612 — 0,750	0,681
Alabaster (körniger Gyps)	2,260 — 2,40	2,330
Aluminium	2,56 — 2,67	2,615
Anhydrit	2,80 — 3,00	2,900
Antimon	6,656 — 6,860	6,758
Apfelbaumholz, frisch	0,960 — 1,137	1,048
— lufttrock.	0,674 — 0,793	0,733
Basalt	2,415 — 3,30	2,857
Birke, frisch	0,851 — 0,987	0,919
— lufttrocken	0,591 — 0,738	0,664
Birnbaum, lufttrocken	0,646 — 0,732	0,689
Blei	11,207 — 11,445	11,326
Buchenholz (Rothbuche), frisch	0,852 — 1,109	0,980
Buchenholz (Rothbuche), lufttrocken	0,590 — 0,852	0,721
Buchsbaumholz, lufttr.	0,912 — 1,103	0,971
Chloritschiefer	2,70 — 3,0	2,850
Dachschiefer	2,670 — 3,50	3,085
Diorit (Grünstein)	2,790 — 3,0	2,895
Dolerit	2,720 — 2,930	2,825
Dolomit (körniger)	2,80 — 3,0	2,900
Ebenholz (schwarz), lufttr.	1,187 — 1,331	1,259
Eichenholz, frisch	0,885 — 1,062	0,973
— lufttrocken	0,650 — 0,920	0,785
Eis, bei 0°	— —	0,926
Eisen, Stabeisen	7,352 — 7,912	7,600
— Gußeisen, (weiß)	7,056 — 7,889	7,500
— — (grau)	6,635 — 7,572	7,100
— — (halbirt)	6,631 — 7,480	7,100
Erde, Gartenerde	1,630 — 2,336	1,984
Erlenholz, frisch	0,809 — 0,994	0,901
— lufttrocken	0,423 — 0,680	0,551
Eschenholz, frisch	0,773 — 0,927	0,852
— lufttrocken	0,540 — 0,845	0,692
Feldstein-Porphyr	2,430 — 3,389	2,909
Fichtenholz (Rothtanne), frisch	0,794 — 0,993	0,893
Fichtenholz (Rothtanne), lufttrocken	0,376 — 0,481	0,428
Föhrenholz (Kiefer) frisch	0,811 — 1,005	0,908
— — lufttr.	0,463 — 0,763	0,613
Gabbro	2,880 — 3,30	3,090
Glas	2,370 — 3,70	3,305
Glimmerschiefer	2,60 — 3,0	2,800
Gneiß (Gneus)	2,50 — 2,90	2,700
Gold, gegossen	19,258 — 19,50	19,379

Namen der Körper.	Specifische Gewichte. Grenzen.	Mittelwerth.
Gold, gehämmert	19,361 — 19,650	19,505
Granit	2,50 — 3,063	2,781
Grauwacke	?	2,700
Grauwackensandstein	?	2,660
Grünstein (Diabas)	2,770 — 3,080	2,925
Grünstein-Porphyr (Aphanit)	2,80 — 3,10	2,950
Hornblendeschiefer	2,909 — 3,153	3,031
Hornblendefels (-Gestein)	2,90 — 3,10	3,000
Jakarandaholz, lufttr.	?	0,908
Kalkmörtel	1,638 — 1,859	1,748
Kalkstein	2,0 — 2,720	2,360
Kalk, gebrannt	2,30 — 3,179	2,739
Keupersandstein (dichter)	2,580 — 2,60	2,590
Kieselkalkstein	2,60 — 2,80	2,70
Kieselschiefer	2,50 — 2,80	2,65
Kirschbaumholz, frisch	?	0,982
— lufttr.	0,577 — 0,715	0,646
Klingstein (Phonolith)	2,512 — 2,700	2,606
Kreide (weiße)	?	2,640
Kork	?	0,240
Kupfer	8,580 — 8,950	8,765
Lava	2,348 — 2,880	2,614
Lärchenholz, frisch	0,694 — 0,924	0,809
— lufttrocken	0,473 — 0,565	0,519
Leuzitfels	?	2,50
Lindenholz, frisch	0,710 — 0,878	0,799
— lufttrocken	0,439 — 0,604	0,522
Mahagoni, lufttrocken	0,563 — 1,063	0,813
Marmor (körniger Kalk)	2,516 — 2,862	2,689
Messing	7,820 — 8,730	?
Melaphyr (Augitporphyr)	2,770 — 3,10	2,935
Menschlicher Körper		1,111
Mühlsteinquarz, porös	1,242 — 1,285	1,263
— dicht	2,485 — 2,613	2,549
Nagelfluhe	?	2,090
Neusilber (Argentan)	8,40 — 8,70	8,50
Pappelholz, frisch	0,785 — 0,956	0,857
— lufttrocken	0,353 — 0,591	0,472
Pechstein	2,049 — 2,669	2,359
Pflaumenbaumholz, lufttrocken	0,854 — 0,872	0,863
Platin	21,00 — 21,74	21,37
Pockholz, lufttrocken	1,263 — 1,342	1,302
Porphyr	2,70 — 2,80	2,750
Quarzfels (körn. Quarzgestein)	2,560 — 2,750	2,655
Roßkastanienholz	0,551 — 0,610	0,580

1) Die meisten dieser Angaben sind entweder Karmarsch mechanischer Technologie entnommen, oder durch die besondere Güte dieses Herrn für gegenwärtige Zwecke mitgetheilt worden.

Namen der Körper.	Specifische Gewichte. Grenzen.	Mittelwerth.	Namen der Körper.	Specifische Gewichte. Grenzen.	Mittelwerth.
Sand, fein und trocken	1,399 — 1,638	1,518	Tannenholz, lufttrocken	0,435 — 0,746	0,60
— feucht	1,90 — 1,945	1,922	Talkschiefer	?	2,74
Sandstein	1,900 — 2,699	2,30	Thonschiefer	2,60 — 3,50	3,05
Serpentinfels	2,30 — 2,894	2,597	Töpferthon	1,80 — 2,00	1,90
Speckstein	2,614 — 2,880	2,747	Tombak	8,515 — 9,00	?
Silber	10,50 — 10,620	10,560	Trachit (Trapporphyr)	2,40 — 2,60	2,50
Stahl	7,40 — 8,10	7,70	Ulmenbaumholz, frisch	0.878 — 0,941	0,909
— cementirt	7,580 — 7,798	7,689	— lufttr.	0,568 — 0,671	0,619
— gefrischt	7,50 — 7,782	7,641	Weidenholz, frisch	0,715 — 0,855	0,785
— raffinirt	7,763 — 7,825	7,764	Weißbuchenholz, frisch	0,939 — 1,137	1,038
— gegossen	7,826 — 8,092	7,959	Ziegelstein, Mauerstein	1,870 — 2,0	1,935
Steinkohlen	1,210 — 1,331	1,270	— Klinker	1,520 — 2,290	1,905
Syenit	2,50 — 3,0	2,750	Zink	6,850 — 7,30	7,075
Tannenholz (weiß) frisch	?	0,894	Zinn	7,050 — 7,580	7,315

Specifische Gewichte fester Körper mit Rücksicht auf die leeren Zwischenräume derselben.

A. Getreidearten, Sämereien und Hülsenfrüchte.[1]

Getreidearten etc.	Grenzen.	Mittelwerth.
Weizen	0,707—0,809	0,785
Roggen	0,685—0,788	0,786
Gerste	0,618—0,697	0,657
Dinkel (Spaltgerste)	0,406—0,468	0,418
Hafer	0,430—0,537	0,483
Hirse	0,616—0,695	0,655
Mohnsamen	0,568—0,687	0,627
Leinsamen	0,657—0.758	0,707
Hanfsamen	0,507—0,565	0,536
Kleesamen	0,757—0,854	0,805
Weiße Bohnen	0,841—0,880	0,860
Pferde-Bohnen	0,793—0,838	0,815
Erbsen	0,827—0,879	0,853
Wicken	0,798—0,881	0,839
Kartoffeln, eben gefüllt gemessen	?	0,611
— gehäuft	?	0,833
Weizenmehl, regelmäßig eingemessen		0,379
— zusammengerüttelt		0,640

B. Brennmaterialien.[2]

Brennmaterialien	Grenzen.	Mittelwerth.
Steinkohlen, englische	0,704—0,797	0,750
Cokes	0,350—0,500	?
Torfziegel[3], lufttrocken		
weißer oder gelber	0,116—0,250	0,183
brauner und schwarzer	0,240—0,600	0,420
Erdtorf	0,562—0,905	0,733
Pechtorf	0,639—1,031	0,835
Torfcokes[4]	0,250—0,300	0,275
Buchenholz[5] (Rothbuche) in großen Scheiten	—	0,400
Buchenholz (Rothbuche), sehr trocken, in Knüppel geschnitten, sorgfältig aufgesetzt	—	0,440
Eichenholz, Angabe der Pariser Holzhändler	0,421—0,584	0,501
Eichenholz, 80 Jahre alt, in Scheiten von 1m Länge und 0m,05 — 0m,15 Dicke, gewöhnlich geklaftert	—	0,525
Eichenholz, geflößt	—	0,416
Fichtenholz	0,300—0,340	0,320
Tannenholz	0,303—0,380	0,341
Holzkohle, hartes Holz[6]	0,180—0,250	0,215
— weiches Holz	0,130—0,177	0,153

1) Nach Hofrath Wild durch Noback's Taschenbuch der Maass- und Gewichts-Verhältnisse. Seite XXXV. Leipzig, 1851.
2) Notizblatt des hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins. Bd. II. S. 357.
3) Nach Karmarsch. Mittheilungen des Gewerbe-Vereins für das Königreich Hannover 1840. Liefer. 21. S. 63.
4) Richard, Aide-Mémoire. Paris 1848. Première Partie, p. 377.
5) Ebendaselbst p. 365.
6) Ebendaselbst p. 366.

C. Baumaterialien.[1]

Baumaterialien.	Mittelwerthe.	Bemerkungen.
Grauwacke.		
Steinschlag von 4 Cubikzoll Größe im Durchschnitt . . .	1,387	Ohne Zwischenräume, für die compacte Gesteinmasse, das specifische Gewicht: = 2,701.
dicht aufgeruthet	1,466	
Keupersandstein.		
Steinschlag von 4 Cubikzoll Größe durchschnittlich	1,287	Ohne Zwischenräume = 2,584.
dicht aufgeruthet	1,896	
Sand.		Die Zwischenräume des Sandes werden angegeben:
gegraben und feucht	1,174—1,306	a. von Röder zu 0,302—0,384 resp. für feinen und groben Sand,
gelagert, im natürlichen Zustande	1,503—1,879	b. von Wolfram 0,388 der ganzen Masse.
		Das Raumverhältniß zwischen gewachsenen und gegrabenen Boden, aus Lehmsand, Grand und reinem Sand bestehend, fand Bockelberg wie 1 zu 1,281.

Specifische Gewichte mit Wasser vollkommen gesättigter Hölzer.[2]

Holzarten.	Specifisches Gewicht.		Zunahme in Procenten		
	trocken	naß	des Volumens	des absoluten Gewichts	des specifischen Gewichts
Laubholz	0,659	1,110	8,8	83	69
Nadelholz	0,453	0,839	5,5	102	91
Eichenholz	0,680	1,125	6,8	77	66
Rothbuchenholz	0,700	1,119	10,9	70	60
Pappel	0,353	1,021	8,5	214	189

II. Specifische Gewichte tropfbarflüssiger Körper.[3]

Alkohol, absoluter, bei 20° C.	0,792	Quecksilber, bei 0° gegen Wasser, bei 0° (nach Regnault)	13,59593
Bier, Münchener Lagerbier .	1,915—1,017	Salzsoole, 26$\frac{12}{48}$ (nach Karsten)	1,2046
Honig	1,450	Salpetersäure, bei 12° R. .	1,522
Milch	1,031	Salzsäure, bei 15° R.	1,192
Oele; fette Oele, als Baumöl, bei 12° R.	0,9176—0,9190	Schwefelsäure, engl., bei 13$\frac{1}{2}$° R.	1,850
Olivenöl	0,9153	Schwefelsäure, nordhäuser .	1,896
Leinöl (bei 12° R.) . . .	0,9347—0,9400	Schwefelsäure, wasserfreie, bei 20° R.	1,970
Mandelöl (bei 15° R.) . .	0,9180	Seewasser (Meerwasser) . .	1,020 — 1,029
Mohnöl (bei 15° R.) . . .	0,9243—0,9250		
Rüböl (bei 15° R.) . . .	0.9130		
Hanföl	0,9276		

1) Versuchsresultate des Herrn Geheimen Regierungs- und Baurathes Bockelberg in Hannover. Bei Steinschlag von 1,5 Cubikzoll Grösse im Durchschnitte, betrug der Rauminhalt des Steinmateriales 0,5, während der der leeren Zwischenräume 0,5, also ebenfalls die Hälfte des ganzen Volumens wie oben ausmachte.

2) Nach Weisbach in den polytechnischen Mittheilungen von Volz und Karmarsch. Bd. 2, S. 50. — Ferner empfehlenswerth ist eine betreffende Arbeit des Oberbaurath Laves über das Quellen des Holzes in den Mittheilungen des hannoverschen Gewerbe-Vereins. Jahrgang 1837. Lief. 12. S. 293.

3) Vorzüglich nach Noback a. a. O. Seite XXXVII.

Spiritus:		**Wein:**	
absoluter Alkohol 12$\frac{4}{9}$ ^{0}R	0,7946	Hochheimer	0,9890
von 90 % Tralles	0,8338	Rheinwein, überh.	0,9925—1,0020
— 70 % —	0.8900	Madeira	1,0380
— 50 % —	0,9343	Malaga	1,0150
Wein:		Mosel	0,9160
Bordeauxwein	0,9940	Portwein	0,9970
Burgunder	0,9915	Weißer franz. Wein (Graves)	0,9806
Champagner	0,9620	Franzbranntwein	0,9345

Zusatz-Capitel.

Ausdehnung der Körper durch die Wärme.[1])

§. 42.

Der Erfahrung nach dehnen sich alle Körper beim Erwärmen aus und ziehen sich beim Erkalten zusammen[1]). Die Größe der Ausdehnung und Zusammenziehung, für eine bestimmte Temperatur, ist dabei hauptsächlich von dem Aggregatzustande der Körper abhängig, nämlich kleiner bei festen als bei wasserförmigen, und bei luftförmigen größer als bei jenen beiden. Dehnen sich aber feste und flüssige Körper durch die Wärme nicht nach einerlei Verhältniß aus, so folgt zunächst in Bezug auf die Sätze der letzteren Paragraphen des vorigen Capitels, daß dieselben auch bei verschiedenen Temperaturen verschiedene spec. Gewichte haben und somit die früheren desfallsigen Bestimmungen eine entsprechende Correction erfahren müssen.

Hat man auch bei gewöhnlichen technischen Untersuchungen nicht gerade nöthig, in aller Strenge hierauf Rücksicht zu nehmen, indem daselbst die Annahme einer mittleren Temperatur gewöhnlich ausreicht, so eignet sich das nähere Eingehen auf diesen Gegenstand doch in so fern für uns, als wir dabei eine passende Veranlassung finden, andere für den Techniker wichtige Fragen in Betracht zu ziehen.

Wir handeln daher zuerst von der Ausdehnung der Körper im Allgemeinen und kommen sodann (gelegentlich) auf den Temperatureinfluß bei der Bestimmung spec. Gewichte zurück.

Auf der Ausdehnung der Körper durch die Wärme beruhen auch die gewöhnlichen Instrumente, Thermometer, welche man

---

[1]) Es ist von größter Wichtigkeit für den wissenschaftlich gebildeten Techniker, schon hier recht kräftig hervorzuheben, daß die Ansicht ein völlig überwundener Standpunkt genannt werden kann, daß die Wärme ein besonderer Stoff sei, welcher in den Körpern in größerer oder geringerer Menge vorhanden ist und hierdurch ihre höhere oder tiefere Temperatur bedingt werde. Vielmehr weiß man jetzt ganz sicher, daß Wärme in einer Bewegung der kleinsten Körper- und Aethertheilchen besteht und daß die Quantität der Wärme das Maaß der lebendigen Kraft dieser Bewegung ist. (Clausius „Die mech. Wärmetheorie". Zweite Aufl., 1876, S. 22).

zum Messen der Temperatur verwendet, deren Einrichtung, Verfertigung u. s. w. jedoch hier als bekannt vorausgesetzt werden muß [1]).

Zusatz. Um sehr hohe Grade von Wärme zu messen, wo Quecksilberthermometer nicht mehr zu brauchen sind, z. B. den Schmelzpunkt der Metalle, die Temperatur eines Porzellanofens, der Hochofen, Schornsteine etc., erhitzter Gase u. d. m., bedient man sich eigener Werkzeuge, welche Pyrometer genannt werden. Zur Zeit existirt noch kein Pyrometer, was zuverlässig und einfach genug ist, um praktischen Zwecken vollkommen zu genügen. Ueber ältere Pyrometer von Wedgewood, Guyton de Morveau, Daniell u. A. belehrt am besten der Artikel „Pyrometer" in Gehler's physikalischem Wörterbuche, ferner auch Karmarsch in der „Einleitung zu seiner Geschichte der Technologie". Ueber neue Pyrometer, insbesondere über das von Gauntlett, von Bock, von Oechsle, von Lamy, Siemens und Andern finden sich Abhandlungen in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1873, S. 544 und Jahrg. 1874, (Siemens' Pyrometer) S. 39. Endlich wird eine gute Uebersicht über neuere Pyrometer (Codazza, Regnault, Lamy etc.) geliefert in Ferrini's „Technologie der Wärme", Deutsch von Schröder, Seite 18 bis mit 28. Jena 1878, bei Costenoble.

Wir beschränken uns hier auf die Angabe folgender Schmelzpunkte technisch wichtiger Metalle, die wir dem Lehrbuche der mechanisch-metallurgischen Technologie von Ledebur (Braunschweig 1877, S. 90) entnehmen:

	Schmelzpunkt.	
Gußstahl	1375°	Celsius.
Graues Roheisen	1275	„
Weißes Roheisen	1075	„
Kupfer	1200	„
Silber	1000	„
Gold	1200	„
Zink	415	„
Zinn	238	„
Wismuth	267	„
Blei	326	„

§. 43.

Ausdehnung fester Körper durch die Wärme.

Auch die Ausdehnung der Körper unter sich steht streng genommen in keinem constanten Verhältniß zu den Temperaturveränderungen, so daß sich z. B. Kupfer, Eisen, Platin, Glas von 0° bis 300° C. mehr als dreimal so stark ausdehnen, als solches von 0° bis 100° C. der Fall ist. Innerhalb der letztgedachten Grenzen ist indeß der Unterschied so gering, daß die Ausdehnung geradezu der Wärmezunahme proportional gesetzt werden kann.

---

[1]) Bezeichnet R eine beliebige Anzahl Grade nach Réaumur, C und F respective die correspondirenden nach Celsius und Fahrenheit, so ist

$$R = \tfrac{4}{5}C = \tfrac{4}{9}(F-32);\quad C = \tfrac{5}{4}R = \tfrac{5}{9}(F-32);$$
$$F = \tfrac{9}{4}R + 32 = \tfrac{9}{5}C + 32.$$

Aehnlich verhält es sich mit der Frage, ob sich die festen Körper durch die Wärme nach allen drei Dimensionen des Raumes hin um gleich viel ausdehnen, oder nicht. Nach den bisherigen Erfahrungen hierüber möchte anzunehmen sein, daß ersteres stets dann erfolgt, wenn die Theile (Atome) eines Körpers nach allen Richtungen gleich angeordnet sind, letzteres aber, wenn diese Anordnung nach verschiedenen Richtungen ebenfalls verschieden ist[1]).

Bei festen Körpern, wo man die Ausdehnung nach allen Seiten hin gleich groß voraussetzen kann, muß sich aus der Verlängerung nach einer Dimension (der linearen Ausdehnung) die nach zwei oder drei Dimensionen (die cubische Ausdehnung) ohne Weiteres ableiten lassen.

Aus letzterem Grunde ermittelte man bisher, durch Versuche, gewöhnlich nur die lineare Ausdehnung fester Körper, wobei die hierzu angewandten Methoden, im Allgemeinen, in den sorgfältigsten (mikrometrischen) Messungen der Verlängerungen bestanden, welche Stangen, aus den betreffenden Körpern gebildet, bei verschiedenen Temperaturen erfuhren. Ausnahmen hiervon machen allein die Versuche von Dulong und Petit, welche unmittelbar die Ermittelung der cubischen Ausdehnung fester Körper zur Absicht hatten[2]).

§. 44.

Bezeichnet man, unter vorgenannten Voraussetzungen, die Ausdehnung der Längeneinheit eines Körpers von 0° bis 100° C. mit a und ebenso die Ausdehnung, welche einem einzigen Grad C entspricht (die eigenthümliche oder specifische Längenausdehnung) mit e, so ist $e = \frac{a}{100}$ zu setzen.

Sind daher L_0 und L die Längen eines Körpers respective bei 0° und t^0 C, so ist offenbar

$$(1)\quad L = L_0 + e \,.\, L_0 t = L_0\,(1 + et)$$

ebenso für einen Körper desselben Stoffes, welcher bei der Temperatur t_1 die Länge L_1 besitzt

$$L_1 = L_0\,(1 + et_1), \text{ woraus}$$

$$\frac{L_1}{L} = \frac{1 + et_1}{1 + et}, \text{ oder genau genug}$$

$$(2)\quad L_1 = L\,[1 + e\,(t_1 - t)] \text{ folgt.}$$

Bezeichnen F und F_1 Flächen von Körpern gleichen Stoffes, so ist nach geometrischen Gründen zu setzen: $\frac{F_1}{F} = \frac{L_1^2}{L^2}$, daher

---

[1]) Vollständig erwiesen ist diese Annahme bei den Krystallen, wo man bestimmt weiß, daß sich nur diejenigen nach allen Richtungen gleichmäßig ausdehnen, welche zum regelmäßigen Systeme gehören und keine doppelte Strahlenbrechung zeigen.

[2]) Ausführlicheres hierüber findet man in dem Wörterbuche der Physik von Gehler und in dem Handwörterbuche der Chemie von Liebig, Poggendorf, Wöhler etc. im Artikel „Ausdehnung". Ferner ist hier der Abschnitt „Verhalten fester Körper" (Ausdehnung fester Körper durch die Wärme) im ersten Bande der Grashof'schen „Theoretischen Maschinenlehre", Bd. 1, §. 23 etc. zum Studium zu empfehlen.

$\frac{F_1}{F} = \frac{(1 + et_1)^2}{(1 + et)^2}$, oder ebenfalls hinlänglich genau

$$(3)\quad F_1 = F[1 + 2e(t_1 - t)].$$

Sind endlich V und V_1 die Volumen gedachter Körper, so erhält man, wegen $\frac{V_1}{V} = \frac{L_1^3}{L^3}$,

$$(4)\quad V_1 = V[1 + 3e(t_1 - t)];$$ oder, wenn man hier die Ausdehnung der Cubikeinheit, d. i. $3e = K$ setzt,

$$(5)\quad V_1 = V[1 + K(t_1 - t)].$$

§. 45.

Von den Resultaten der in §. 43 gedachten Messungen stellen wir die Ausdehnungen der für die Mechanik wichtigen festen Körper in folgender Tabelle zusammen.

Die Länge der Körper ist bei 0° $C = 1$ gesetzt.

Name der Körper.	Ausdehnung von 0° bis 100° C. ($a. = 100 . e$).		Beobachter.
Blei	0,002719	$\frac{1}{368}$	Morveau.
„	0,002848	$\frac{1}{351}$	Lavoisier und Laplace.
„	0,003086	$\frac{1}{324}$	Berthoud.
Bronze	0,001817	$\frac{1}{550}$	Smeaton.
Eisen, Stab	0,001167	$\frac{1}{857}$	Bessel.
„ „	0,001267	$\frac{1}{790}$	Dulong und Petit.
„ „	0,001220	$\frac{1}{819}$	Lavoisier und Laplace.
„ Draht	0,001140	$\frac{1}{877}$	Troughton.
„ Guß	0,001072	$\frac{1}{933}$	Daniell.
„ „	0,001109	$\frac{1}{901}$	Roy.
Glas, weißes	0,000861	$\frac{1}{1161}$	Dulong und Petit.
„ „	0,000944	$\frac{1}{1059}$	Herbert.
„ Röhren [2])	0,000921	$\frac{1}{1085}$	Horner.
„ „	0,000776	$\frac{1}{1288}$	Roy.
Gold, feines (de départ)	0,001466	$\frac{1}{682}$	Lavoisier und Laplace.
Granit	0,000789	$\frac{1}{1267}$	Adie.
„	0,000868	$\frac{1}{1152}$	Bartlett.
Hartloth (2 Kupfer und 1 Zink)	0,002058	$\frac{1}{486}$	Smeaton.
Kupfer	0,001841	$\frac{1}{543}$	Dulong und Petit.
„	0,001919	$\frac{1}{521}$	Troughton.
Marmor, weißer (carrarisch)	0,001072	$\frac{1}{932}$	Dunn und Sang.

[1]) Höchst empfehlenswerth, neben reichhaltigen Literaturangaben, zum speciellen Studium dieses Gegenstandes, ist der Abschnitt „Ausdehnung der Körper durch die Wärme" im dritten Bande des Lehrbuchs der Elementarphysik von Prof. Wüllner, am K. Polytechn. in Aachen, wobei wir noch ganz besonders auf §. 16 (S. 118) aufmerksam machen möchten, welcher Paragraph die Ueberschrift trägt: „Berücksichtigung der Temperatur bei Wägungen und Dichtigkeitsbestimmungen".

[2]) Nach Hallström gilt für die lineare Ausdehnung von Röhren aus Kaliglas folgende Formel (die Temperatur in C. Graden)

$$L = 1 + 0{,}00000196\, t + 0{,}000000105\, t^2.$$

Name der Körper.	Ausdehnung von 0° bis 100° C. ($a . = 100 . e$).		Beobachter.
Marmor, schwarzer.........	0,000426	$\frac{1}{2374}$	Dunn und Sang.
Messing, gegossen	0,001875	$\frac{1}{533}$	Smeaton.
„ 0,25 Zink und 0,75 Kupfer	0,002144	$\frac{1}{466}$	Daniell.
„ gewalzt (Tafel).........	0,001920	$\frac{1}{510}$	Stampfer.
„ Draht	0,001885	$\frac{1}{531}$	Herbert.
Platin....................	0,000984	$\frac{1}{1016}$	Dulong und Petit.
Sandstein.................	0,001174	$\frac{1}{851}$	Adie.
„	0,001716	$\frac{1}{582}$	Bartlett.
Silber....................	0,002083	$\frac{1}{480}$	Troughton.
„ (Kapellen)	0,001910	$\frac{1}{524}$	Lavoisier und Laplace.
Stahl, Huntsmann'scher	0,001074	$\frac{1}{931}$	Horner.
„ Fischer'scher	0,001112	$\frac{1}{899}$	„
„ Steyer'scher	0,001152	$\frac{1}{867}$	„
„ gehärteter...........	0,001225	$\frac{1}{816}$	Smeaton.
„ bei 30° angelassen ...	0,001369	$\frac{1}{730}$	Lavoisier und Laplace.
„ bei 65° „ ...	0,001240	$\frac{1}{807}$	„ „
„ weicher.............	0,001079	$\frac{1}{926}$	„ „
Stein (zum Bau) von St. Perron	0,000430	$\frac{1}{2324}$	Destigny.
„ von St. Leu..	0,000646	$\frac{1}{1541}$	„
Weichloth (1 Zinn und 2 Blei)	0,002505	$\frac{1}{399}$	Smeaton.
Weißtanne (faserig)	0,000602	$\frac{1}{1644}$	Struve.
„ „	0,000408	$\frac{1}{2451}$	Kater.
Ziegelstein (gewöhnlich).....	0,000550	$\frac{1}{1818}$	Adie.
Zink, gegossen	0,002968	$\frac{1}{337}$	Horner.
„ gewalzt	0,003381	$\frac{1}{296}$	Bessel.

Die ungewöhnliche Abweichung mancher dieser Angaben für ein und dasselbe Material, rührt theils von Beobachtungsfehlern, vorzüglich aber (wie bei den Festigkeitscoefficienten und den specifischen Gewichten) von der natürlichen Verschiedenheit der chemischen und physikalischen Zustände der Körper her. Bei sehr sorgfältigen Untersuchungen, z. B. bei größeren geodätischen Vermessungen, Pendelversuchen u. s. w. sieht man sich daher gewöhnlich genöthigt, eigene desfallsige Versuche anzustellen.

Beispiel 1. Die Länge der Stephenson'schen Blechbrücke über die Menai-Straits betrug nach Clark[1]) bei 0° C. (32 *F.*) 1510 Fuß $1\frac{1}{2}$ Zoll englisch (460,588 Meter), während diese Länge bei $14\frac{4}{9}$ C. (58° *F.*) um genau $3\frac{1}{4}$ Zoll (85,5 Millimeter) größer geworden war. Es fragt sich, wie groß hiernach die eigenthümliche Längenausdehnung ist?

Auflösung. Man erhält hier mittelst der Formeln §. 44 sofort:

$$1510,3958 = 1510,125\,(1 + 14,44\,.\,e), \text{ d. i.}$$

$$e = 0,00001241,$$

also fast unerwartet mit den Werthen der Tabelle §. 45 stimmend.

Beispiel 2. Bei 12° C. beträgt die Länge einer Eisenbahnschiene 18 Fuß englisch, oder 5,4864 Meter; man soll bestimmen, um

[1]) The Tubular Bridges, p. 715.

wie viel sich dieselbe bei 60° C. ausgedehnt haben wird? Letzter Temperatur wurde dadurch ermittelt, daß man in die Schiene Löcher bohrte, diese mit Quecksilber ausfüllte und in letzteres beim stärksten Sonnenschein die Kugeln von Quecksilberthermometern steckte.

Auflösung. Nimmt man nach Lavoisier und Laplace $e = 0{,}00001235$, so ergiebt sich ohne Weiteres:

$$L = 18\,[1 + 0{,}00001235\,.\,48] = 18' + 1\tfrac{1}{2}''' \text{ oder } 5{,}4896 \text{ Meter.}$$

§. 46.

Ausdehnung nicht zusammendrückbar flüssiger Körper durch die Wärme.

Obwohl für alle flüssigen Körper erwiesen ist, daß sie sich durch die Wärme nach allen Seiten hin völlig gleichmäßig ausdehnen, so lag es doch in der Natur der Sache, daß sich alle deßhalb angestellten Versuche nur auf ihre cubische Ausdehnung beziehen konnten. Auf die Angabe der dabei angewandten Methoden können wir ebenfalls nicht eingehen und verweisen deßhalb wieder besonders auf die bereits citirten Wörterbücher von Gehler und Liebig. Bemerkt mag nur noch werden, daß in dem Nachstehenden allein die (absolute) wahre Ausdehnung der Flüssigkeit in Betracht gezogen ist, d. h. diejenige, welche man beobachten würde, wenn sich das Gefäß, der Behälter der Flüssigkeit, durchaus nicht ausdehnte.

Bei den nicht zusammendrückbar flüssigen Körpern tritt die vorher erwähnte Ungleichförmigkeit der Ausdehnung im Verhältnisse zur Temperatur am meisten hervor und zwar um so bedeutender, je mehr sich die Temperatur dem Punkte nähert, wo die Flüssigkeiten ihren Aggregatszustand ändern [1]).

Am wenigsten ungleichförmig unter allen genannten Flüssigkeiten dehnt sich Quecksilber aus, so daß man die Ausdehnung desselben, zwischen 0° und 100° C als (beinahe) gleichförmig betrachten kann. Nach den sorgfältigen Versuchen von Dulong und Petit beträgt die cubische Ausdehnung des Quecksilbers für die Temperaturerhöhung von 0° bis 100° C: $\frac{1}{55{,}50} = 0{,}018018$, oder für jeden Grad C:

$$\frac{1}{5550} = 0{,}00018018.$$

Die späteren sorgfältigen Bestimmungen Regnault's geben letzteren Werth zu

$$0{,}00018153,$$

also um sehr wenig größer.

Nächst dem Quecksilber zeigen, innerhalb der Grenzen 0° und 100° C, die fetten Oele die wenigste, alle übrigen Flüssigkeiten aber, wie Wasser, Alkohol, Salzlösungen u. s. w., eine um so bedeutendere ungleichförmige Ausdehnung. Für unseren Zweck beschränken wir

---

[1]) Die Analogie läßt wohl vermuthen, daß sich ein ähnliches Verhältniß auch bei der Ausdehnung fester Körper zeigen würde, wenn man sie bis zum Schmelzpunkte erhitzte.

uns indeß darauf, die älteren und neuesten Ergebnisse über die cubische Ausdehnung des reinen Wassers hier noch aufzuführen.

Nach Hallström, gestützt auf eigene Versuche, so wie auf die von Munke und Stampfer, läßt sich das Volumen $= \mathfrak{V}_t$ des reinen Wassers, von der Temperatur $= t$, bei $0^\circ\ C = 1$ gesetzt, durch folgende Gleichungen ausdrücken:[1])

Für Temperaturen von 0° bis 30° C,

$$\mathfrak{V}_t = 1 - 0{,}000057577\,t + 0{,}000075601\,t^2 - 0{,}000003509\,t^3.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich überdies, daß das reine Wasser sein kleinstes Volumen und mithin seine größte Dichte bei $+ 3{,}92^\circ\ C$ besitzt[2]).

Für Temperaturen von 30° bis 100° C:

$$\mathfrak{V}_t = 1 - 0{,}0000094178\,t + 0{,}00000533661\,t^2 - 0{,}0000000104086\,t^3.$$

Kopp[3]) fand neuerdings, aus mit musterhafter Sorgfalt angestellten Versuchen, daß sich die Ausdehnung des Wassers von 0° bis 100° am besten durch 4 Gleichungen darstellen läßt.

Zwischen 0° und 25° durch:

$$\mathfrak{V}_t = 1 - 0{,}000061045\,t + 0{,}0000077183\,t^2 - 0{,}00000003734\,t^3.$$

Das Maximum der Dichte, oder das kleinste Volumen, findet sich hieraus zu $t = 4^\circ{,}08$.

Zwischen 25° und 50° durch:

$$\mathfrak{V}_t = 1 - 0{,}000065415\,t + 0{,}0000077587\,t^2 - 0{,}000000035408\,t^3.$$

Zwischen 50° und 75° durch:

$$\mathfrak{V}_t = 1 + 0{,}00005916\,t + 0{,}0000031849\,t^2 + 0{,}0000000072848\,t^3.$$

Zwischen 75° und 100° durch:

$$\mathfrak{V}_t = 1 + 0{,}00008645\,t + 0{,}0000031892\,t^2 + 0{,}0000000024487\,t^3.$$

§. 47.

Für Anwendung vorstehender Sätze folgen hier noch einige Aufgaben.

Aufgabe 1. Das specifische Gewicht eines metallenen Körpers ist bei der Temperatur $t = 20^\circ$ C. gegen Wasser $= 1$ von derselben Temperatur bestimmt und $= m$ gefunden; es fragt sich, wie groß dasselbe bei 0° Temperatur sein wird?

Auflösung. Es mögen S und S_1 die spec. Gewichte zweier verschiedener Körper bei Null Grad Wärme und s, s_1 bei einerlei

---

[1]) Gehler's physik. Wörterbuch, Artikel „Wärme" S. 918.

[2]) Nach Desprez (Ann. Ch. Ph. 1840, LXXIII, 296) hat das Wasser seine größte Dichte bei 4° C. Nach Joule und Plaifair (L. Ed. Ph. Mag. 1847, XXX, 41) bei 3°,945 C. Neueres über diesen Gegenstand findet sich u. A., insbesondere für technische Zwecke, in Grashof's „Theoretischer Maschinenlehre". Erster Band, §. 22, S. 123.

[3]) Poggendorf's Annalen, Bd. LXXII und Liebig's Annalen, Bd. XCIII. Ueber noch andere Resultate, nach Versuchen von Jolly, Pierre, Hagen, Matthiessen, Hirn u. A., berichtet Wüllner im Dritten Bande, S. 71 (Dritte Ausgabe) seines „Lehrbuches der Experimental-Physik".

Temperatur $= t$ bezeichnen; ferner V, V_1 und v, v_1 die respectiven Volumen, so wie K, K_1 die Ausdehnungen der Volumeneinheiten.

Sodann ist $v = VK$, $v_1 = K_1 V_1$ und wegen $v = \frac{VS}{s}$ und $v_1 = \frac{V_1 S_1}{s_1}$, $S = Ks$, $S_1 = K_1 s_1$. Durch Division und Reduction erhält man aber aus letzteren beiden Gleichungen

$$S_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{s_1}{s} \cdot S.$$

Setzen wir nun für unseren Fall $S = 1$, so ist $\frac{s_1}{s} = m$ und daher

$$S_1 = \frac{K_1}{K} \cdot m = \frac{(1 + 3\,et)m}{K},$$

wo e die eigenthümliche Längenausdehnung des Metallkörpers bezeichnet.

Nach vorigem Paragraphen ist aber, für $t = 20^\circ$, $\frac{1}{K} = 0{,}998411$, folglich

$$S_1 = 0{,}998411\ (1 + 3e\,.\,t\,.)\ m.$$

Hätte man z. B. das specifische Gewicht des Schmiedeeisens bei 20° C. zu 7,6 gefunden, so würde dasselbe bei 0° C. betragen, wenn $e = 0{,}00001235$ angenommen wird:

$$S_1 = 7{,}618.$$

Aufgabe 2. Die Höhe einer in einem genau cylindrischen Glasgefäße befindlichen Quecksilbermasse ist mit Hülfe einer geeigneten Messingscale bei der Temperatur t zu h gefunden; es fragt sich, wie groß gedachte Höhe bei 0° Temperatur ist, wenn zugleich auf die Ausdehnung der Scale Rücksicht genommen wird.

Auflösung. Bezeichnet k die cubische Ausdehnung des Quecksilbers für jeden Grad C und h_1 die Höhe dieser Flüssigkeit bei Null Grad Temperatur ohne Rücksicht auf die Ausdehnung der Scale, so ist zuerst nach §. 44: $h = h_1\ (1 + kt)$.

Geschah die Theilung der Scale bei der Temperatur t_1 und bezeichnet e die eigenthümliche Ausdehnung des Messings, so ist in letzterer Gleichung h_1 durch $\frac{h_1}{1 + e(t_1 - t)}$ zu ersetzen und folglich mit Rücksickt auf beide Correctionen, die Höhe der auf Null Grad Temperatur reducirten Quecksilbersäule: $h = \frac{h_1\,(1 + kt)}{1 + e\,(t_1 - t)}$ und $h_1 = h\ [1 + e\ (t_1 - t)]\ (1 - kt)$ genau genug.

Für $h = 0^m{,}72$ bei $t = -20^\circ$ C. und ferner $t_1 = 16^\circ$ C., so wie $k = 0{,}00018$, $e = 0{,}00001875$ ergiebt sich bei 0° Temperatur:

$$h_1 = 0{,}720487.$$

Aufgabe 3. Eine schmiedeeiserne Stange von $5^m{,}5$ Länge, $0^m{,}06$ Breite und $0^m{,}03$ Dicke, wurde bei der Temperatur $+ 18^\circ$ C. mit beiden Enden in zwei unverrückbaren Ständern befestigt; man soll die Kraft bestimmen, womit die Stange bei einer Temperatur-

erniedrigung bis zu — 20°, vermöge des Bestrebens der Zusammenziehung, gegen gedachte Ständer wirkt.

Auflösung. Nimmt man aus der Tabelle §. 45 für Schmiedeeisen die Mittelzahl $a = 0{,}0012$, also $e = 0{,}000012$, so würde sich bei der Temperatur-Differenz von 38° C. die freiliegende Stange für jeden Meter ihrer Länge um $0{,}000012 \times 38 = 0^m{,}000456$ verkürzen. Da aber letzteres durch die Befestigung der Enden in den Ständern verhindert wird, so müssen diese von einer verhältnißmäßigen Druckkraft $= P$ angeregt werden, die sich mit Hülfe der Gleichung I, §. 116 der Geostatik des Verfassers (Dritte Auflage) berechnen läßt. Man erhält nämlich

$$P = \frac{\lambda}{l} \,.\, EF,$$

wenn $\frac{\lambda}{l}$ die Ausdehnung pro Längeneinheit, E den Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens und F den Querschnitt der Stange bezeichnet, also $\frac{\lambda}{L} = 0{,}000456$, $F = 1800$ und E (für Quadratmillimeter und Kilogramme) $= 2000$ ist, so folgt:

$$P = 0{,}000456 \,.\, 20000 \,.\, 1800 = 16416 \text{ Kilogr.}$$

Hieraus erkennt man zugleich, wie wichtig es ist, bei Metallconstructionen, Röhrenleitungen, den Schienen der Eisenbahnen, Dampfhähnen und Kolben u. s. w. auf die möglichen Verlängerungen und Verkürzungen Rücksicht zu nehmen, welchen diese bei Temperaturveränderungen unterworfen sind.

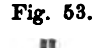
§. 48.

Compensationspendel.

Von der Ungleichheit, mit welcher sich Körper von verschiedenem Stoffe bei gleicher Temperaturveränderung ausdehnen, macht man eine höchst vortheilhafte Anwendung auf die Construction der Uhrpendelcompensationen, worunter man Vorrichtungen versteht, welche dem Einflusse von Wärme und Kälte auf die Längenveränderung der Pendel entgegenwirken. Die Nothwendigkeit einer constanten Länge des Pendels, wenn solches seine Schwingungen stets in gleicher Zeit verrichten soll, darf hier als bekannt vorausgesetzt werden. Man sehe deshalb auch des Verfassers Allgemeine Maschinenlehre, Bd. 1, S. 66 (Zweite Auflage).

Wir betrachten hier nur zwei der bemerkenswerthesten Compensationen, nämlich die sogenannte Rost- und die Quecksilber-Compensation. Eine gebräuchliche Anordnung erster Art (ein Rostpendel) zeigt Fig. 53. Dabei ist p die schmiedeeiserne Pendelstange, welche an dem oberen Ende derartig aufgehangen ist, daß die ganze Zusammenstellung um eine Achse schwingen kann, welche auf der Bildebene der Figur rechtwinklig steht. aa sind zwei gleichfalls schmiedeeiserne Stäbe, deren Enden durch Stifte mit den äußersten Bügeln oder Querstäben bb und cc fest verbunden sind. dd sind zwei Zinkstäbe, welche oberhalb am Querstabe bb,

Fig. 53.





unterhalb aber an einem dritten Querstabe *ff* ebenfalls durch Stifte befestigt sind, während durch diesen Querstab *f* die Stäbe *aa* ganz ungehindert hindurch gehen können, weshalb in *ff* entsprechende Oeffnungen gebildet sind.

Uebrigens wird das Querstück *ff* von der Pendelstange *p* getragen, welche deshalb in der Mitte von *f* gehörig befestigt ist, während diese Stange *p* durch das obere Querstück *bb* frei hindurch tritt.

Die Linse *r* ist fest mit dem unteren Bügel *cc* verbunden, deren höhere und tiefere Stellen (als anderweitiges Regulirungsmittel) durch eine Stellschraube *n* bewirkt werden kann. Wie durch diese Anordnung die Pendellänge bei constanter Länge zu erhalten ist, wird fast von selbst klar. Dehnt sich nämlich die Pendelstange *p* nach unten aus, so werden die Zinkstäbe *dd* eine nach oben gerichtete Ausdehnung veranlassen, weil sie an der unabhängigen Ausdehnung nach unten vom Querstücke *ff* gehindert werden (das ja von *p* getragen wird), einer Ausdehnung der Stäbe *dd* nach oben nichts entgegensteht, als daß sie dabei gezwungen sind, die Stäbe *aa* und mit ihnen die Linse *r* nach aufwärts zu ziehen etc.

Die Ausdehnung der Eisenstäbe *a* nach unten und die größere Ausdehnung der Zinkstäbe nach oben läßt eine genaue Compensation zu, sobald man die Längen der beiden Gattungen von Stäben entsprechend anordnet.

Um letzteres durch Rechnung zu ermitteln, sei L die Entfernung des Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte des Pendels, bei einer bestimmten Temperatur, ferner l die Länge der Pendelstange *p* vom Aufhängepunkte oberhalb bis zum Stege *ff*, λ die Entfernung des obersten Bügels *bb* vom Schwingungspunkte der Linse und endlich x die unbekannte Länge der Zinkstäbe *d*. Sodann ist

$$(1) \quad L = l + \lambda - x.$$

Bezeichnet ferner e die eigenthümliche Längenausdehnung des Eisens, e_1 die des Zinkes, so ergiebt sich für eine um t Grade höhere oder niedere Temperatur eine neue Länge L_t:

$$L_t = (l + \lambda)(1 \pm et) - x(1 \pm e_1 t).$$

Der Anforderung gemäß muß jedoch $L = L_t$ sein, so daß man die Bedingungsgleichung erhält:

$$(2) \quad (l + \lambda) e - x e_1 = 0, \text{ oder wegen (1)}$$

$$(L + x) e - x e_1 = 0, \text{ d. i.}$$

$$(3) \quad x = \frac{e}{e - e_1} \cdot L.$$

Aus der Bedingungsgleichung (2) folgt noch der allgemeine Satz für die Compensation:

Die Gesammtlänge der verticalen Stäbe des gegebenen Metalles verhält sich zur Gesammtlänge des compensirenden Metalles umgekehrt, wie die zugehörigen linearen Ausdehnungen.

§. 49.

Eine der einfachsten Compensationen läßt sich mit Anwendung von Quecksilber herstellen (Quecksilberpendel), indem man nämlich an der Pendelstange, statt der Linse, ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß (gewöhnlich aus Glas) anbringt. Senkt sich hierbei die Pendelstange, so steigt das Quecksilber auf eine größere Höhe, und bei gehöriger Anordnung läßt es sich leicht erreichen, daß hierdurch der Schwingungspunkt eben so viel gehoben wird, als er sich durch die Verlängerung der Pendelstange senkt. Zugleich bietet diese Compensation den Vortheil, daß sich ein damit versehenes Pendel sehr dem einfachen Pendel nähert, da die Masse der Stange im Verhältniß zu der des Quecksilbers sehr gering ist.

Fig. 54. Fig. 55.

Das Specielle der Anordnung eines Quecksilberpendels zeigt Fig. 54 in der Vorder- und Fig. 55 in der Seitenansicht, wobei wohl kaum bemerkt zu werden braucht, daß die Pendelstange p verkürzt gezeichnet ist.

Zur Aufnahme des Quecksilbergefäßes a und respective zur Verbindung desselben mit der Pendelstange p dient ein steigbügelförmiges Gehäuse bcf. Es besteht dies aus den Messingtellern b und c, wovon ersterer als Boden, letzterer als Deckplatte dient. An jedem dieser Teller befinden sich zwei Lappen dd, wovon die bei b zur Befestigung (mittelst Nieten oder Schrauben) der unteren Enden zweier eisernen Tragstangen ee dienen, während die Lappen des Tellers c gedachte Stangen frei hindurchlassen. Oberhalb werden die Stangen ee von den Enden eines Bügels f umfaßt, wobei die Hülsen oder röhrenförmigen Fortsetzungen gg desselben gleichzeitig zum gehörigen Aufdrücken des Tellers c benutzt werden; die Feststellung der gedachten Verbindung wird durch Muttern und Gegenmuttern bewirkt. Um endlich dem Ganzen möglichst viel Stabilität zu geben, ist zwischen b und c noch ein zweitheiliger, durch Nieten vereinigter Ring angebracht. Hinsichtlich der Verbindung der Pendelstange p mit dem Bügel f wird nur zu bemerken sein, daß von den beiden Schraubenmuttern m und n die letztere zugleich als weiteres Regulirungsmittel für den Gang der Uhr dient, und zu diesem Ende auf ihrem Rande eine Theilung befindlich ist, n also überhaupt eine Mikrometer-

schraube bildet. Um bei einer solchen Regulirung die Drehung der Pendelstange zu verhindern, ist an dieser das metallene Querstück o befestigt, an dem Bügel f aber zwei Drähte, welche frei durch die Enden von o hindurchgehen.

Zur Berechnung der nothwendigen Dimensions- und Gewichtsgröße des Quecksilberkörpers wollen wir der Einfachheit wegen annehmen, daß sich der Schwingungspunkt des Pendels (nahe genug) in der Mitte des Quecksilberkörpers befindet [1]). Sodann bezeichne L die Entfernung des Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte des Pendels, a den Abstand des oberen Endes m des Bügels f von demselben Punkte, b die verticale Höhe des ganzen Gehäuses von m bis zur Platte b gemessen, sowie $2x$ die zu suchende Höhe des Quecksilberkörpers.

Für die bestimmte Temperatur, wobei letztere Größen gemessen sind, erhält man

$$(1) \quad L = a + b - x.$$

Für eine um t Grad höhere Temperatur dagegen, wenn e die eigenthümliche Längenausdehnung des Eisens, und $2x^1$ die verhältnißmäßig veränderte Höhe des Quecksilberkörpers bezeichnet

$$(2) \quad L^1 = (a + b)\ (1 + et) - x^1.$$

Wie früher muß aber auch hier $L = L^1$ sein, weßhalb aus (1) und (2) folgt

$$(3) \quad o = (a + b)\ et + x - x^1.$$

Um zunächst x^1 zu finden, sei v das Quecksilbervolumen bei der vorherbemerkten Normaltemperatur, k die eigenthümliche cubische Ausdehnung dieser Flüssigkeit, r der innere Halbmesser des auf einen Kreiscylinder reducirten Querschnittes vom Glasgefäße, und e^1 die eigenthümliche lineare Ausdehnung des Glases. Sodann ist anfänglich

$$(4) \quad v = r^2\pi \,.\, 2x, \text{ nachher aber}$$

$$(5) \quad v\,(1 + kt) = \pi r^2\,(1 + e^1 t)^2\, 2x^1.$$

Dividirt man (5) durch (4), so ergiebt sich

$$(1 + kt) = \frac{(1 + e^1 t)^2\, x^1}{x},$$

woraus für x^1 der angenäherte, hinlänglich genaue Werth zu reduciren ist:

$$x^1 = x + x\,(k - 2e^1)t.$$

Durch Subst. in (3) erhält man daher

$$0 = (a + b)\ et - x\,(k - 2e^1)\,t \text{ und in Bezug auf (1)}$$

$$0 = (L + x)\ e - x\,(k - 2e^1), \text{ demnach}$$

$$x = \frac{e}{k - 2e^1 - e} \,.\, L.$$

Hier endlich nach Dulong und Petit, zufolge §. 45 und 46 $e = 0{,}00001182$, $k = 0{,}00018018$ und $e^1 = 0{,}000008613$ gesetzt, giebt

$$x = 0{,}0782 \,.\, L$$

[1]) Welcher Fehler bei dieser Annahme begangen wird, läßt sich leicht abschätzen.

und die ganze Höhe des Quecksilberkörpers

$$2x = 0{,}1564 \,.\, L.$$

Für den besonderen Fall, daß $L = 0^m{,}9935$, ist sonach

$$2x = 0^m{,}1554.$$

Nimmt man hierbei den Querschnitt des Gefäßes = 0,002 Quadratmeter und Quecksilber von spec. Gewichte = 13,560 an, so erhält man für das Gewicht = Q des Quecksilbers:

$$Q = 1000 \,.\, 13{,}56 \,.\, 0{,}002 \,.\, 0{,}1554 = 4{,}214 \text{ Kil.}$$

Eine nach solcher Berechnung angeordnete Quecksilbercompensation macht indeß, für einen sehr genauen Gang der betreffenden Uhr, immer noch das Anbringen anderweitiger Regulirungsmittel nothwendig (in Fig. 54 und 55 die Mikrometerschraube n), was allein schon aus unserer Annahme von ganz bestimmten Ausdehnungscoefficienten erklärbar ist.

In Betreff anderer Compensations- und Regulirungsmethoden muß auf ausführlichere Werke über diese Gegenstände verwiesen werden [1]).

---

[1]) Gehler's Wörterbuch, Artikel „Compensation" und „Pendel". Rees' Encyclopädie, Artikel „Horology", Vol. II, Plate XXXIX and XL. Ferner die neueren Werke über Uhrmacherkunst von Jürgens, Martens, Heidner, Georgi u. A., worüber ausführliche Literatur in des Verfassers Allgem. Maschinenlehre, Bd. 1, Zweite Auflage, S. 34, 45, 54 und 66 zu finden ist.

Zweite Abtheilung.

Aërostatik.

---

§. 50.

Die Gleichgewichtsgesetze wasserförmiger Flüssigkeiten und deren Verhalten gegen feste Flächen und Körper, sind auch für luftförmige Flüssigkeiten gültig, insofern dabei auf die §. 2 hervorgehobenen charakteristischen Eigenschaften der letzteren Rücksicht genommen wird.

Unter Beachtung gedachter Eigenschaften besteht daher auch in der Aërostatik der Satz von der gleichförmigen Druckfortpflanzung[1]), der vom Boden- und Wanddrucke, so wie ferner der Satz (das Princip des Archimedes), daß ein von der luftförmigen Flüssigkeit überall umgebener fester Körper so viel an seinem absoluten Gewichte verliert, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt.

Vollständige Entscheidung über alle hierher gehörige Fragen werden spätere Paragraphen geben, im Voraus diene zur weiteren Verständigung Folgendes.

Sollen tropfbare Flüssigkeiten Drücke ausüben, so müssen sie der Wirkung der Schwerkraft unterworfen sein, oder es müssen äußere Kräfte auf dieselben einwirken. Bei luftförmigen Flüssigkeiten sind für diesen Fall äußere Kräfte nicht erforderlich, vielmehr üben diese schon durch das ihnen innenwohnende stete Ausdehnungsbestreben bestimmte Drücke aus. Vom technischen Standpunkte aus sieht man meistentheils vom absoluten Gewichte luftförmiger Flüssigkeiten ab, so wie man auch den Druck, welchen sie auf die Gefäßwände ausüben, als überall constant betrachtet. Endlich wird gewöhnlich noch angenommen, daß in der ganzen Flüssigkeitsmasse durchaus dieselbe Temperatur stattfindet.

---

[1]) Statt des Wassers oder Oeles zum Betriebe einer hydraulischen Presse könnte daher auch Luft in Anwendung gebracht werden. Die Luft würde nur, bevor sie den auf sie ausgeübten Druck fortpflanzt, so weit zusammenzudrücken sein, bis sie eine der Druckkraft gleiche Spannung angenommen hat. Die Hauptursache, weshalb man bei der gedachten Presse lieber tropfbare Flüssigkeiten als luftförmige zum Druckfortpflanzungsmittel benutzt, liegt hauptsächlich in der Schwierigkeit des nothwendigen Dichthaltens aller betreffenden Theile.

Anders ist dies jedoch bei der Betrachtung luftförmiger Flüssigkeitsmassen von beträchtlicher Ausdehnung, wie insbesondere diejenige ist, welche, überall unsere Erde umgebend, die **Atmosphäre** derselben bildet.

§. 51.

Barometer, Manometer.

Um die Größe der drückenden Kraft (Expansivkraft) in Gefäßen abgesperrter Luft zu messen, benutzt man Instrumente, welche Manometer[1]) genannt werden, während zu gleichen Zwecken, für die freie atmosphärische Luft, das, hier als bekannt vorauszusetzende, Barometer[2]) dient.

Beide Instrumente gründen sich auf den bereits von Toricelli (1643) aufgefundenen Satz:

> „daß der Druck der Luft tropfbare Flüssigkeiten bis zu Höhen erhebt, welche ihrer Dichte umgekehrt proportional sind.“

Hieraus folgt zugleich, daß das Gleichgewichtsgesetz wasserförmiger Flüssigkeiten in communicirenden Gefäßen auch für luftförmige Flüssigkeiten gültig ist.

Beim **Barometer** ist vom communicirenden Gefäße nur ein Schenkel, die oben geschlossene, unten offene, mit Quecksilber gefüllte (und mit der Oeffnung wieder in solches getauchte) Glasröhre vorhanden, während der zweite, unsichtbare Schenkel durch eine Luftsäule von der Höhe der Erdatmosphäre gebildet wird.

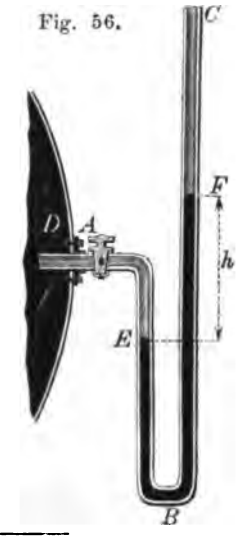


Fig. 56.

Beim **Manometer**, Fig. 56, besteht das communicirende Gefäß (gewöhnlich) aus einer Glasröhre ABC, in beiden Schenkeln Quecksilber oder Wasser befindlich, wovon der kürzere Schenkel AB mit der gepreßten Luft im Gefäße D, der längere, oben offene Schenkel BC dagegen mit der äußeren atmosphärischen Luft in Verbindung steht. Befindet sich im Gefäße D verdünnte Luft, so ist $BF < BE$ etc.[3])

---

[1]) Von μανὸς dünn etc.

[2]) Von βάρος schwer etc.

[3]) Manometer, wobei der längere Schenkel BC geschlossen ist, stehen den beschriebenen an Genauigkeit und Zuverlässigkeit sehr nach und sollen hier (zunächst) unbeachtet bleiben.

§. 52.

Bei einer Temperatur von 0° C. am Spiegel des Meeres und unter mittlerer geographischer Breite beträgt im Barometer die Höhe der Quecksilbersäule, welche den Druck der atmosphärischen Luft mißt, $0^m,76$ (= 28 pariser Zoll = 29,92 engl.).

Da nun nach Regnault[1]) das specifische Gewicht des Quecksilbers bei 0°, verglichen mit Wasser von 4° Temperatur, 13,596 ist, so beträgt dieser Druck = P_m, nach §. 9:

I. $P_m = 1000 \,.\, 13{,}596 \,.\, 0{,}76 = 10333$ Kil. pro □Meter,

oder pro □Centimeter (= P_c)

$$\text{II.} \quad P_c = \frac{10333}{10000} = 1{,}0333 \text{ Kilogramm.}$$

Geht man vom Barometerstande $0^m,7355$ aus, so ergiebt sich P_m zu:

$P_m = 1000 \cdot 13{,}596 \,.\, 0{,}7355 = 9999{,}858$ Kil. pro □Meter,

wofür man offenbar setzen kann:

III. $P_m = 10000$ Kil. pro □Meter, oder

IV. $P_c = 1{,}0$ Kil. pro □Centimeter.

Die Größe dieses Druckes nennt man den Druck einer Atmosphäre und zwar insbesondere in der Beziehung, um denselben als Maaßeinheit bei der Bestimmung des Druckes der Luft und Gase (auch der Wasserdämpfe) überhaupt zu gebrauchen. Aus IV. erklärt sich die im preußischen Staate zum Gesetze erhobene Annahme, durch ein und dieselbe Ziffer die Zahl der Atmosphären und die correspondirende Druckgröße pro □Centimeter zu bezeichnen.

Durch den Manometerstand, d. h. die Differenz der beiden Flüssigkeitssäulen FB und EB im Manometer, Fig. 56, wird der Druckunterschied der im Gefäße D eingeschlossenen Luft und der atmosphärischen Luft gemessen.

Bezeichnet daher P die innere Pressung, pro □Meter in Kilogrammen ausgedrückt, und p die äußere Pressung auf dieselbe Weise ausgedrückt, endlich h den Manometerstand, und nimmt man, um mit möglichst einfachen Zahlen zu rechnen, das specifische Gewicht des Quecksilbers zu 13,60 an, so folgt:

$P - p = 1000 \,.\, 13{,}6 \,.\, h = 13600\, h$, wenn Quecksilber die Manometerflüssigkeit bildet und

$P - p = 1000 \,.\, h$, wenn die Manometerflüssigkeit Wasser ist. Wenn P und p auf 1 □Centimeter bezogen werden, folgt:

$P - p = 1{,}36 \,.\, h$ beim Quecksilbermanometer,

$P - p = 0{,}1 \,.\, h$ beim Wassermanometer.

Zusatz. Wie beispielsweise §. 6, S. 13 bei der hydraulischen Presse für wasserförmige Flüssigkeiten geschah, bestimmt man sehr oft

---

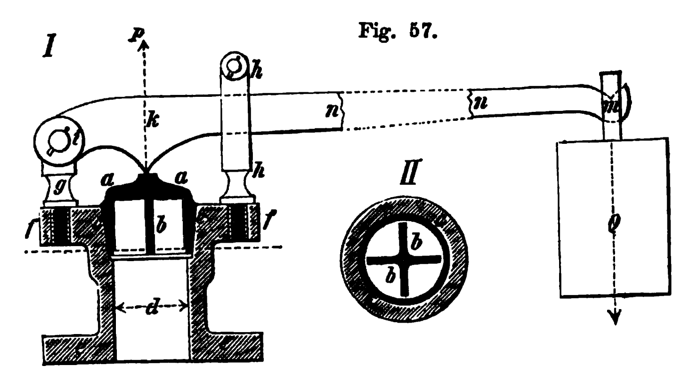
[1]) Mém. de l'Acad. de Paris 1847, T. 21, Pg. 162.

[2]) Es beträgt dieser Druck

pro □Zoll englisch: 14,70 ℔ engl.

" " österreichisch: 12,80 ℔ Wiener etc.

Fig. 57.



auch die Druckkraft elastischer Flüssigkeiten mit Hülfe eines geeigneten (empfindlichen etc.) Ventiles, Figur 57.

Wird dabei der innere Druck gegen die ganze Ventilfläche ab mit P, der äußere (einschließlich des Ventilgewichtes) mit p bezeichnet, ferner die geradlinige Entfernung vom Drehpunkte i des Hebels bis zum Aufhängepunkte eines Gewichtes Q, d. i. $\overline{im} = L$, $\overline{ik} = l$ gesetzt und die Schwerpunktsentfernung des Hebels ikn vom Drehpunkte i mit λ, das Gewicht des ganzen Hebels mit q bezeichnet, endlich der resultirende Druck in i mit R, der Zapfenreibungscoefficient bei i durch f ausgedrückt, so folgt für den Gleichgewichtszustand, nach bekannten Sätzen vom Hebel:

$$Q \,.\, L = (P - p)\, l - q\lambda - fR,$$

woraus Q oder L bestimmt werden können, wenn die übrigen Größen gegeben sind.

Beispiel. Wie groß ist das Gewicht Q zu nehmen, welches am einarmigen Hebel eines Sicherheitsventiles aufgehangen werden muß, wenn der Durchmesser der Ventildruckfläche, d. i. $mn = 0^m,05$, die innere Pressung 4 Atmosphären beträgt, ferner $L = 1^m,0$, $l = 0^m,1$, $\lambda = 0^m,4$, $q = 7,5$ Kil. ist, das Ventilgewicht 1 Kilogramm, und die Zapfenreibung bei A = Null angenommen werden kann[1]).

Auflösung. Hier ist

$$P = 0,785 \,.\, 5^2 \,.\, 1,0333 \,.\, 4 = 81,1140 \text{ Kil.}$$

$$p = \frac{P}{4} + 1 = 21,2844 \text{ Kil., also}$$

$$l\,(P - p) = 5,983 \text{ und}$$

$$Q = \frac{5,983 - 7,5 \,.\, 0,4}{1,0} = 2,983 \text{ Kil.}$$

---

[1]) Weiteres über die Berechnung der Belastung, insbesondere bei Dampfkessel-Sicherheitsventilen, findet sich Bd. 1, S. 623 (Zweite Auflage) der Allgem. Maschinenlehre des Verfassers. Wie gering der Fehler ist, welchen man begeht, wenn, wie oben, die Zapfenreibung vernachlässigt wird, findet sich u. A. nachgewiesen in der 5. Auflage des (von Herrmann bearbeiteten) Weisbach'schen Lehrbuches der Ingenieur-Mechanik, S. 349.

Wegen mancherlei unvorhergesehenen, nicht immer zu beseitigenden Umständen (Porosität der Ventil-Sitzflächen, Unbestimmtheit der Reibungscoefficienten etc.) darf gesetzlich die zulässige Belastung bei Dampfkesselventilen nicht mehr berechnet, sondern muß durch geeignete Versuche ermittelt werden. Man sehe deshalb die Anweisung des preußischen Handelsministers vom 11. Juni 1871, §. 4.

§. 53.

Mariotte-Boyle's und Gay-Lussac's Gesetz.

Von besonderer Wichtigkeit ist für alle weiteren Betrachtungen das Gesetz, welches die Beziehung zwischen Elasticität, Dichte und Volumen der Luft ausdrückt und welches fast gleichzeitig von dem Engländer Boyle (1660) und dem Franzosen Mariotte (1670) aufgefunden wurde. Es lautet dies Gesetz folgendermaßen:

„Die Elasticität und Dichtigkeit der Luft ist der sie zusammendrückenden Kraft direct, das Volumen, oder der Raum, den sie einnimmt, dieser Kraft umgekehrt proportional, vorausgesetzt, daß die Temperatur constant bleibt."

Hat man daher zwei Luftvolumen v_1 und v_2 von gleicher Temperatur, deren respectiven Pressungen p_1 und p_2, so wie Dichten $\varDelta$ und $\varDelta_1$ sind, so stellt sich das Mariotte-Boyle'sche Gesetz durch folgende Proportionen dar:

$$(1) \quad \begin{cases} p_1 : p_2 = v_2 : v_1; \\ p_1 : p_2 = \varDelta_1 : \varDelta_2; \\ v_1 : v_2 = \varDelta_2 : \varDelta_1. \end{cases}$$

Ein zweites wichtiges Gesetz, betreffend die Ausdehnung der Luft durch Wärme, ist das Gesetz Gay-Lussac's (Dalton's), was also lautet:

„Trockne atmosphärische Luft dehnt sich bei gleichem Temperaturzuwachse um gleich viel und zwar für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers um 0,00375 ihres Volumens aus, vorausgesetzt, daß der Druck, unter welchem diese Luftmasse steht, sich nicht verändert."

Die neueren Bestimmungen von Magnus, Regnault u. A.) weichen hiervon etwas ab[1]), insbesondere beträgt die gedachte Volumenausdehnung $= \delta$ für jeden Grad des Intervalls von 0° bis 100° C., nur:

$$\delta = 0{,}003666 = \tfrac{1}{273}.$$

Bezeichnet v_0 ein Luftvolumen von 0° Temperatur, so erhält man für die Voluminas v_1 und v_2 bei t_1 und t_2 Temperatur:

$$v_1 = v_0\,(1 + \delta t) \text{ und } v_2 = v_0\,(1 + \delta t_1)$$

und hieraus:

$$(2) \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t_2}.$$

Aus der Verbindung des Mariotte'schen mit dem Gay-Lussac-schen Gesetze ergeben sich noch folgende besonders wichtige Gleichungen:

$$(3) \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{p_2}{p_1}\,\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t_2};$$

$$(4) \quad \frac{\varDelta_1}{\varDelta_2} = \frac{p_1}{p_2}\,\frac{1 + \delta t_2}{1 + \delta t_1}.$$

---

[1]) Man sehe hierüber den später folgenden mit „Geschichtlichen Notizen" überschriebenen Paragraphen.

§. 54.

Zu besonderen Erörterungen des Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes diene (zunächst) Folgendes.

Das Gewicht eines Liters (Cubikdecimeters) trockener atmosphärischer Luft bei 0° *C* Temperatur, unter der Pressung von $0^m,76$ Quecksilbersäule (einer Atmosphäre) und unter der geographischen Breite von Paris beträgt nach Regnault[1])

1,293187 Gramm, folglich wiegt

1 Cubikmeter = 1,293187 Kilogramm.

Für die geographische Breite $= \varphi$ und h Meter über dem Meere, beträgt dies Gewicht:

$$1{,}292673 \frac{1}{1+\frac{2h}{r}} [1 - 0{,}002836 \,.\, \cos 2\varphi],$$

wobei r den mittleren Erdradius bezeichnet und wofür gesetzt werden kann:

$$r = 6366198 \text{ Meter.}$$

Hiernach erhält man, mit Zuziehung der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen, für das Gewicht eines Cubikmeters atmosphärischer Luft, für die Dichte $= \varDelta$ der letzteren, bei der Temperatur $= t$ und unter dem Drucke $= p$ in Kilogrammen pro Quadratmeter

$$(1) \quad \varDelta = 1{,}293187 \frac{p}{10333} \,.\, \frac{1}{1+\delta t}, \text{ oder}$$

$$(2) \quad \varDelta = \frac{p}{7992{,}655} \,.\, \frac{1}{1+\delta t}.$$

Ferner ergiebt sich für das Gewicht $= w$ eines Volumens v atmosphärischer Luft

$$(3) \quad w = \varDelta \,.\, v = \frac{pv}{7992{,}655\,(1+\delta t)}.$$

Bezeichnet man weiter für $w = 1$ Kilogramm das correspondirende Volumen mit v_0 und die zugehörige Dichte mit $\varDelta_0$, so ergiebt sich für den Fall, daß $p = 10333$ Kil. und $t =$ Null ist:

$$1 = \varDelta_0 v_0, \text{ also}$$

$$(4) \quad v_0 = \frac{1}{\varDelta_0} = \frac{1}{1{,}293187} = 0{,}7733 \text{ Cubikmeter.}$$

Das (unter den bezeichneten Umständen) einem Kilogramme atmosphärischer Luft entsprechende Volumen pflegt man das **specifische Volumen** zu nennen.

Unter Benutzung vorstehender Werthe lassen sich die Gleichungen (3) und (4) des vorigen Paragraphen in andere Gestalt bringen.

Bezeichnet man vorerst Druck und Volumen, welche der Temperatur Null entsprechen, beziehungsweise mit p_0 und v_0, so erhält man

$$(5) \quad pv = p_0 v_0 (1 + \delta t),$$

---

[1]) Mémoire de l'academie royale de sciences de l'Institut de France, Tome XXI, p. 157. Paris 1847. Ferner Karsten, Fortschritte der Physik, Jahrg. II, S. 88.

und wenn man den echten Bruch $\delta = 0{,}003665 = \frac{1}{273} = \frac{1}{a}$ setzt,

$$pv = \frac{p_0 v_0}{a}(a + t).$$

Schreibt man ferner zur Abkürzung

$$\frac{p_0 v_0}{a} = R \text{ und } a + t = T,$$

so ergiebt sich

$$(6) \quad pv = RT.$$

Die von $- a$ ($- 273^\circ$ C) an gezählte Temperatur T pflegt man die absolute Temperatur zu nennen[1]). Außerdem erkennt man leicht, daß R eine Constante ist, welche von der Beschaffenheit (Natur) des Gases abhängt. Für atmosphärische Luft und für die Temperatur t = Null, also für die absolute Temperatur $T_0 = 273$, erhält man folglich:

$$R = \frac{p_0 v_0}{T_0}, \text{ d. i.}$$

mit Bezug auf (4)

$$(7) \quad R = \frac{10333 \,.\, 0{,}7733}{273} = 29{,}27.$$

Für ein Volumen atmosphärische Luft von M Kilogramm Gewicht ist statt (6) zu setzen:

$$(8) \quad pv = MRT.$$

Interessante (neue) Erörterungen der Gleichungen (6) und (8) hat kürzlich A. Ritter in Aachen geliefert, welche sich abgedruckt finden in der neuen Folge der (Poggendorf'schen, jetzt Wiedemann'schen) Annalen der Physik und Chemie, Monat Juni 1877, S. 273 ff.

Schließlich noch folgende Bemerkungen:

1) Da unter Voraussetzung constant bleibender Temperatur für die Beziehung zwischen Druck und Volumen eines Gases das Mariotte'sche Gesetz gilt, so läßt sich letzteres auch ausdrücken durch

$$pv = \text{Const.}$$

---

[1]) Oskar Meyer in seinem schätzbaren Werke „Kinetische Theorie der Gase". Breslau 1877, entwickelt (S. 25) für die Molekulargeschwindigkeit $= G$ der Gase die Formel $G^2 = G_0^2 (1 + \delta t)$. Dieser Werth verschwindet, wenn $1 + \delta t = 0$ wird, d. i. für $t = -\frac{1}{\delta} = -273^\circ$ C.

Ist daher (wie bereits Note 1, S. 93 hervorgehoben wurde) die Wärme nichts anderes als die lebendige Kraft der molekularen Bewegung, so muß der Punkt, wo ein Gas gar keine Wärme mehr enthält, mit dem identisch sein, wo die molekulare Bewegung verschwunden ist und alle Atome und Molekulen in völliger Ruhe verharren. (Weiteres in dem angegebenen Werke.)

Auch die obige Gleichung (5) läßt sich zur Erklärung der absoluten Temperatur benutzen, indem man unter der Voraussetzung von $v = v_0$ denjenigen Werth von t sucht, für welchen der Druck p zu Null wird. Man erhält ebenfalls $1 + \delta t = 0$, $t = \frac{1}{\delta} = - a = - 273$.

Eine Gleichung, welche einer gleichseitigen, in einer Ebene liegenden Hyperbel entspricht, sobald diese die rechtwinkligen Coordinatenachsen zu Asymtoten hat. Unter solchen Umständen nennt man diese krumme Linie die isothermische Curve.

In einem späteren Paragraphen kommen wir unter der Rubrik isothermische Compressions- und Expansions-Arbeit auf diesen Gegenstand zurück.

2) Die geometrische Darstellung der Gleichung

$$pv = RT,$$

als die Vereinigung des Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes liefert eine hyperbolische Paraboloidfläche.

Auch hierüber hat A. Ritter in Aachen im Dec.-Hefte 1877 der Poggend.-Wiedemann'schen Annalen etc. interessante Erörterungen geliefert.

§. 55.

Einige technisch wichtige Anwendungen der Hauptsätze vorstehender Paragraphen.

I. Taucherglocke.

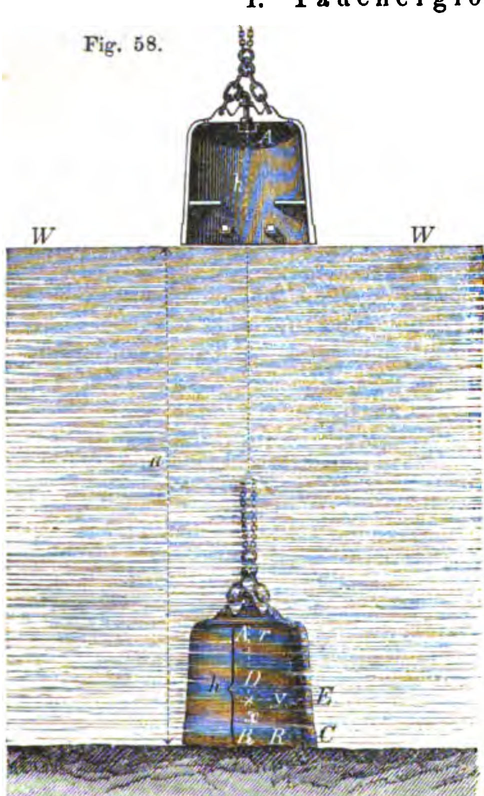


Fig. 58.

Bei der Taucherglocke, Fig. 58, soll zuerst die Frage beantwortet werden, bis zu welcher Höhe $DB = x$ Wasser in dieselbe dringt, wenn ihre Dimensionen, so wie die Tiefe $= a$ bekannt ist, in welcher sie unter dem Oberwasserspiegel aufgestellt wird. Gedachter Fall kann eine Beachtung erfordern, wenn durch ungünstige Umstände veranlaßt, die Druckpumpe (Compressionspumpe) eine Zeit lang außer Thätigkeit gesetzt ist, mittelst welcher sonst durch die Oeffnung A in elastischen Röhren (Schläuche) frische zum Einathmen der Arbeiter geeignete Luft eingeführt wird, die auch zugleich das Wasser aus der Taucherglocke entfernt.

Des ersten Verständnisses wegen werde angenommen, daß die Taucherglocke einen mit der Grund-

fläche parallel abgekürzten Kegel bildet (wie beispielsweise eine bei den Hafenarbeiten in Cherbourg benutzte Taucherglocke[1]), dessen Höhe h ist, während R und r die Radien der kreisförmigen Endflächen sind. Die den Atmosphärendruck messende Wassersäule werde b (= $10^m,333$) und der veränderliche Radius der Glocke $DE = y$ gesetzt.

Da die Volumina der in der Glocke befindlichen Luft

$$\text{über dem Wasser: } \frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr),$$

$$\text{in der Tiefe } a\text{: } \frac{(h-x)\pi}{3}(y^2 + r^2 + ry) \text{ sind,}$$

ferner auch

$$y = R - \frac{R-r}{h} \cdot x \text{ ist,}$$

so erhält man nach dem Mariotte'schen Gesetze die Proportion:

$$b : (a + b - x) = (h - x)(y^2 + r^2 + ry) : h(R^2 + r^2 + Rr).$$

Wird hier $h(R^2 + r^2 + Rr) = k$, $\frac{R-r}{h} = n$ und $a + b = m$ gesetzt, so erhält man zur Bestimmung von x folgende Gleichung:

$$\text{I. } (R - nx)^2 (h - x)(m - x) + r(R - nx)(h - x)(m - x) + r^2 (h - x)(m - x) = bk.$$

Bildet die Glocke einen Cylinder, so wird $R = r$, $n =$ Null, $k = 3hr^2$, folglich aus I:

$$(h - x)(m - x) = bh \text{ und}$$

$$x = \frac{a + b + h}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{a + b + h}{2}\right)^2 - ah}.$$

Hinsichtlich der mechanischen Arbeit, welche aufzuwenden ist, um die Luft bei a Wassertiefe der Glocke mit Hülfe einer Druckpumpe (Compressionspumpe) auszutreiben und gleichzeitig diese Luft zum Einathmen für die Arbeiter geeigneter zu machen, muß auf [§. 58] verwiesen werden.

Beispiel. Bei der erwähnten Cherbourger Glocke ist

$$h = 1^m,594;\; R = 0^m,8805;\; r = 0^m,8075;$$
$$a = 15^m,0, \text{ also } m = 15 + 10,333 = 25^m,333;$$
$$n = \frac{R-r}{h} = 0,045797;\; k = 3,40623;$$
$$b = 10^m,333. \text{ Daher wird aus I:}$$

$$0,00209734\,x^4 - 0,1741092\,x^3 + 5,39072\,x^2 - 62,3350\,x + 51,1493 = 0, \text{ oder}$$

$$x^4 - 83,0137\,x^3 + 2570,26235\,x^2 - 29720,9482\,x + 24387,6673 = 0, \text{ woraus}$$

$$x = 0^m,88661.$$

---

[1]) Bulletin d'encouragement, 19 Année (1820), p. 198, Pl. 193. Andere Taucherglocken (gußeiserne mit fast rectangulären Querschnitten) finden sich beschrieben und abgebildet in folgenden Werken: Armengaud Publication Indust. 4e Vol., Pl. 7. — Papers of Royal Engineering, Vol. I., Pl. XV—XX. — Cavé. Bateau Plongeur etc. du Nil. Bulletin d'encouragement etc. 48e Année (1849), Pg. 405. — Die Construction der Taucherglocken zur Fundirung der Rheinbrücke bei Hamm. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Jahrg. 1869 (Bd. XIII), S. 186.

§. 56.

II. Heber.

Es ist die Kraft zu bestimmen, womit in einem beliebigen Gefäße MM, Fig. 59, enthaltenes Wasser zum Abfließen durch einen Heber ABC angetrieben wird. Vorausgesetzt wird dabei, daß die Zusammenstellung überall von der atmosphärischen Luft umgeben ist, das Gefäß eben so viel Zufluß erhält, als durch den Heber abfließt, der Spiegel WW also constant bleibt, endlich beide Heberschenkel bereits mit Wasser gefüllt sind, auch C vor dem Beginn des Ausfließens zugehalten wird.

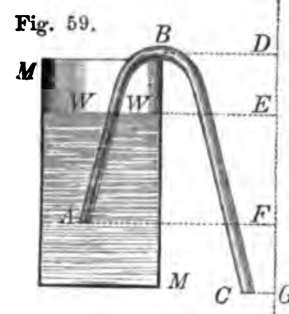


Fig. 59.

Auflösung. Bezeichnet, wie vorher, b die den Atmosphärendruck messende Wassersäule ($10^m,333$), so erfährt die Einheit der Fläche (wenn man zuvor die Horizontalen durch A, B, C etc. zieht) einen Druck in B von links nach rechts: $\gamma\,[b + \overline{EF} - \overline{DF}] = \gamma\,[b - \overline{DE}]$, so wie von rechts nach links: $\gamma\,[b - \overline{DG}]$.

Soll nun ein Fließen von B nach C erfolgen, so muß offenbar ersterer Werth den letzteren übertreffen und zwar muß die Differenz beider, die Resultirende $= p$, wodurch gedachte Bewegung veranlaßt wird, sein:

$$p = \gamma\,[b + \overline{EF} - \overline{DF} - b + \overline{DG}] = \gamma\,.\,\overline{EG}.$$

Die Druckkraft, welche pro Flächeneinheit gegen die Flüssigkeit wirkt und diese zum Fließen bringt, wird also durch das Gewicht einer Flüssigkeitssäule gemessen, welche den Abstand der Ausflußöffnung vom Wasserspiegel im Gefäße zur Höhe hat.

Taucht die Mündung C unter Wasser, so wird die wirksame Druckhöhe $\overline{EG}$ durch den Abstand des Wasserspiegels über C vom Wasserspiegel WW im Gefäße MM bestimmt.

Außerdem ergeben sich noch folgende wichtige Sätze:

1) Es findet so lange ein Abfluß durch den Heber statt, als der Ausflußpunkt C noch tiefer wie der Wasserspiegel WW im Gefäße liegt. Hieraus ergiebt sich überdies, daß der Schenkel $\overline{BC}$ auch kürzer wie der $\overline{AB}$ sein kann, ohne den Ausfluß zu stören.

2) Der Abstand des Wasserspiegels WW im Gefäße vom Scheitel B oder höchsten Punkte des Hebers muß kleiner wie b d. i. kleiner wie $10^m,333$ sein, da der in B von links nach rechts wirksame Druck $\gamma\,(b - \overline{DE})$ nicht negativ sein darf, also $b > \overline{DE}$ erfordert wird.

Zusatz. In dem Gebiete des Maschinenwesens und der Baukunst macht man, um Wasser über Höhen (nicht auf Höhen) zu heben, von dem Heber mannigfachen nützlichen Gebrauch. So benutzt man ihn bei geringen Gefällen zur Zuleitung des Aufschlagwassers der Turbinen, wenn deren Tieferlegung nicht zulässig ist[1]), ferner als selbstfüllenden

[1]) Rühlmann, Allgemeine Maschinenlehre, Bd. I (Zweite Auflage, S. 413).

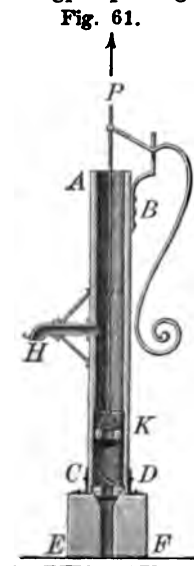
Heber (wie er schon den Alten unter dem Namen „diabetes" bekannt war) zur Hahnsteuerung bei Maschinen etc.[1]) Auch benutzt man den Heber, um überflüssiges Wasser aus Behältern abzulassen (wie beim Canale von Languedoc)[2]), oder Wasser über Höhen zu leiten, wo ein Fortleiten in Röhren durch die Höhen nicht möglich, oder, der örtlichen Umstände wegen, nicht räthlich ist. Eine Anordnung letzterer Art zeigt Fig. 60. Das dort bemerkte Fluthwasser gehört der Schelde an, der Graben *WW*, welcher von diesem Wasser gespeist werden soll, gehört zum Marienfort unterwärts Antwerpen etc.[3]).



Fig. 60.

Der ganze Heber *ABCD* wird von einer gußeisernen $0^m,2$ weiten Röhre gebildet. Um den Heber in Thätigkeit zu setzen, d. h. um die in der Röhre *ABCD* enthaltene Luft auszutreiben und Wasser eintreten lassen zu können, ist auf der höchsten Stelle bei *B* eine entsprechende Saugpumpe angebracht. Die wirksame Druckhöhe ist hierbei $2^m,9$[4]).

Fig. 61.



§. 57.

III. Pumpen (Kolbenpumpen).

Es sei *ABCD*, Fig. 61, der Kolbencylinder (Stiefel) einer Wasserpumpe mit durchbrochnem Kolben *K*, sowie *CEFD* das unterwärts angebrachte (in der Abbildung verkürzte) Saugrohr mit dem Saugventile bei *CD*. Man soll die Größe der in der Kolbenstange anzubringenden Kraft *P* bestimmen, welche, wenn von allen sogenannten passiven Widerständen (auch vom Gewichte des Kolbens) abgesehen wird, den Kolben in einer bestimmten Lage im Gleichgewicht zu halten im Stande ist.

Auflösung. Nehmen wir an, es sei der ganze Raum *GCF* der Pumpe mit Wasser gefüllt, der Kolben *K* im Aufsteigen begriffen und für einen Augenblick in der gezeichneten Stelle festgehalten, die Ventile im Kolben geschlossen, dagegen das Saugventil *CD* geöffnet. Wird dann der Kolbendurchmesser mit *D*, die den Atmosphärendruck messende Wassersäule mit b ($= 10^m,333$) bezeichnet

[1]) Rühlmann, Allgemeine Maschinenlehre, Bd. IV, S. 581.

[2]) Gerstner, Mechanik, Bd. 2, S. 269, Tafel 52.

[3]) Förster, Bauzeitung 1852, S. 260.

[4]) Anwendung des Saughebers zur Wassergewältigung in der Grube „Himmelsbeck" bei Mühlheim und in der Grube „Bergwerkswohlfahrt" bei Clausthal. Kerls, Berg- und Hüttenmännische Zeitung, Jahrg. 1864, S. 367. Die Siphons des Verdon-Canales. Annales des ponts et chaussées 1877, Pg. 370.

und $\frac{\pi}{4} = 0{,}785 = \pi'$ gesetzt, so beträgt, mit Bezug auf die Figur, das auf die obere Kolbenfläche drückende Gewicht:

$$(1) \quad \gamma D^2 \pi^1 \, [b + \overline{GK}],$$

während die untere Kolbenfläche einen Druck erfährt, der gleich ist:

$$(2) \quad \gamma D^2 \pi^1 \, [b - \overline{KF}].$$

Wird (2) von (1) abgezogen, so erhält man für die bestimmende Kraft P den Werth:

$$P = \gamma D^2 \pi^1 \, [\overline{GK} + \overline{KF}], \text{ d. i.}$$
$$P = \gamma D^2 \pi^1 \, . \, \overline{FG}.$$

Die Kraft, welche den Kolben beim Aufgange in jeder beliebigen Lage im Gleichgewicht zu erhalten vermag (oder die Kraft zum Aufziehen bei gleichförmiger Bewegung) ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche den Querschnitt des Kolbens zur Basis und den Abstand des Unterwassers vom Ausgußpunkte zur Höhe hat.

Die Kraft, welche beim Niedergange den Kolben im Gleichgewichte zu erhalten im Stande ist, hat nur die oben bemerkten passiven Widerstände, als Kolbenreibung, Durchgang des Wassers durch die Ventile, Anhängen des Wassers an den Röhrenwänden etc. zu überwinden und, da von diesen Widerständen hier (zunächst) abgesehen werden soll, so kann von einer derartigen Kraft weiter nicht die Rede sein.

Zusatz 1. Für die gewöhnlichen praktischen Fälle läßt sich, mit Beachtung der passiven Widerstände setzen:

$$\text{Aufgang: } P = 1\tfrac{1}{12} D^2 \pi_1 H \text{ bis } 1\tfrac{1}{5} D^2 \pi_1 H;$$
$$\text{Niedergang: } P_1 = \tfrac{1}{12} D^2 \pi_1 H \text{ bis } \tfrac{1}{5} D^2 \pi_1 H.$$

Die pro Sec. aufzuwendenden mechanischen Arbeiten sind daher, wenn v die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens bezeichnet:

$$L = Pv \text{ und } L_1 = P_1 v.$$

Zusatz 2. Eben so interessante als technisch wichtige Fragen sind die nach der Steighöhe des Wassers bei jedem Hube, nach der größten Steighöhe und den Anordnungen, welche man zu treffen hat, um den Nachtheil des sogenannten schädlichen Raumes — d. h. des bei jedem Hube zwischen der unteren Kolbenfläche und dem Stiefelboden verbleibenden Raumes — möglichst herabzuziehen.

Für diese Betrachtungen sei l der Kolbenhub, e der schädliche Raum, A der Stiefel- und a der Saugrohrquerschnitt, λ die Länge des Steigrohres und x_1 die Steighöhe des Wassers am Ende des ersten Kolbenhubes, endlich b wiederum $= 10^m{,}333$.

Bevor noch Wasser in die Pumpe tritt, der Kolben aber bis zum tiefsten Punkte herabgedrückt ist, besitzt die im Raume unter dem Kolben bis zum Unterwasser befindliche Luft

$$(1) \quad \begin{cases} \text{ein Volumen} = \lambda a + eA \text{ und} \\ \text{eine Pressung} = b. \end{cases}$$

Nachdem der Kolben ganz erhoben und das Wasser im Saugrohre auf x_1 Höhe gestiegen ist, hat diese Luft

$$(2)\quad \begin{cases} \text{ein Volumen: } A(l+e)+a(\lambda-x_1) \text{ und} \\ \text{eine Spannung: } b-x_1. \end{cases}$$

Für die Bestimmung von x_1 erhält man daher, nach dem Mariotte'schen Gesetze, ohne Weiteres die Proportion:

$$(3)\quad Ae+a\lambda : A(l+e)+a(\lambda-x_1) = b-x_1 : b.$$

Wird jetzt der Kolben abermals ganz niederwärts bewegt, so verbleibt endlich nach dem Schlusse des Saugrohres zwischen diesem und der unteren Kolbenfläche ein Luftvolumen Ae von der Atmosphärenpressung $= b$. Dagegen verbleibt im Saugrohre ein Luftvolumen $= a(\lambda - x_1)$ von der Pressung $= b - x_1$.

Dies letztere Volumen ist zur Bestimmung der Steighöhe $= x_2$ beim zweiten Kolbenhube, auf ein Volumen $= z$ von der Atmosphärenpressung $= b$ zu reduciren und sodann mit Ae zu vereinigen. Hierzu ist

$$z : a(\lambda - x_1) = (b - x_1) : b, \text{ d. i.}$$

$$z = \frac{a(b-x_1)(\lambda-x_1)}{b}.$$

Daher das von dem zweiten Aufzuge des Kolbens in der Pumpe überhaupt eingeschlossene Luftvolumen von Atmosphärenpressung $= b$:

$$(4)\quad Ae + \frac{a(b-x_1)(\lambda-x_1)}{b}.$$

Ist sodann der zweite Kolbenaufgang vollendet und ist dabei das Wasser in der Saugröhre auf die Höhe x_2 gestiegen, so besitzt die in der Pumpe abgesperrte Luft

$$(5)\quad \begin{cases} \text{ein Volumen: } A(l+e)+a(\lambda-x_2) \text{ und} \\ \text{eine Spannung: } b-x_2. \end{cases}$$

Aus (4) und (5) erhält man daher zur Bestimmung von x_2:

$$(6)\quad \frac{Aeb+a(b-x_1)(\lambda-x_1)}{b} : A(l+e)+a(\lambda-x_2) = b-x_2 : \text{b}.$$

Hieraus wird man leicht erkennen, daß nach dem n^{ten} Kolbenaufgange die Steighöhe $= x_n$ aus der Proportion zu reduciren ist:

$$\text{I.}\quad \frac{Aeb+a(b-x_{n-1})(\lambda-x_{n-1})}{b} : A(l+e)+a(\lambda-x_n) := b-x_n : \text{b}.$$

Die Existenz dieser Proportion ist zunächst an die Bedingung geknüpft, daß $x_{n-1} < b$ sei. Stellt man sich daher unter x_{n-1} die größte Steighöhe $= X$ des Wassers vor, so wird zur Bestimmung von X auch $x_n = X$ zu setzen sein. Führt man letztere Größe in I. ein und reducirt auf dieselbe, so folgt endlich:

$$X = \frac{bl}{e+l} = \frac{b}{1+\frac{e}{l}}.$$

Die größte Saughöhe einer Pumpe kann daher niemals die Höhe einer Säule von der Dichte der zu hebenden Flüssigkeit erreichen, welche dem Drucke einer Atmosphäre das Gleichgewicht hält. Es wird also $X < 10^m{,}333$ für Wasser, $X < 0^m{,}76$ für Quecksilber etc. Ferner tritt, unter sonst gleichen Umständen, der schädliche Raum um so weniger nachtheilig auf, je größer man den Kolbenhub macht.

Für $e = 0^m{,}076$ und $b = 10^m{,}333$ ergiebt sich:

$X = 8^m,26$, wenn $l = 0^m,3$,
$X = 9^m,60$, wenn $l = 1^m,0$ ist.

Zusatz 3. Luftpumpe. Bezeichnet V den Inhalt des Recepienten und v den des Stiefels einer Luftpumpe, so erhält man:

A. Für die Verdünnungspumpe die Dichte $= x_1$ nach dem ersten Zuge aus der Proportion:

$$V : (V + v) = x_1 : b, \text{ d. i.}$$

$$x_1 = b\left(\frac{V}{V+v}\right).$$

Eben so für die Dichte $= x_2$ nach dem zweiten Zuge:

$$V : (V + v) = x_2 : x_1$$

$$x_2 = x_1\left(\frac{V}{V+v}\right) = b\left(\frac{V}{V+v}\right)^2,$$

daher nach dem n^{ten} Kolbenzuge die Dichte x_n:

$$x_n = b\left(\frac{V}{V+v}\right)^n.$$

B. Für die Verdichtungs- (Compressions-) Pumpe ergiebt sich, in ähnlicher Weise verfahren, die Dichte nach n Kolbenzügen zu:

$$x_n = \frac{V + nv}{V}.$$

In beiden Fällen A. und B. ist der schädliche Raum der Pumpen unbeachtet geblieben.

Beispiel. Bei der atmosphärischen Eisenbahn von Kingston nach Dalkey in Irland betrug der cubische Inhalt der 7470 Fuß (engl.) langen und 15 Zoll im Durchmesser haltenden, zwischen den Bahnschienen liegenden Triebröhre (incl. 5$\frac{0}{0}$ wegen Nichtdichten derselben) 9630 Cubikfuß. Der Inhalt des dortigen Luftpumpenstiefels (bei 67 Zoll Durchmesser und 66 Zoll Hub) war gleich 134,66 Cubikfuß. Es fragt sich, wie viel Spiele die Luftpumpe machen mußte, wenn die Luft aus der Triebröhre bis auf 15 Zoll Quecksilbersäule ($\frac{1}{2}$ Atmosphäre Spannung) ausgepumpt werden sollte?

Auflösung. Aus Zusatz 3, A, folgt unmittelbar:

$$n = \frac{\text{Lg } b - \text{Lg } x_n}{\text{Lg}(V+v) - \text{Lg } V} = \frac{\text{Lg } 30 - \text{Lg } 15}{\text{Lg } 9765 - \text{Lg } 9630} = 49{,}95.$$

§. 58.

Isothermische Expansion und Compression.

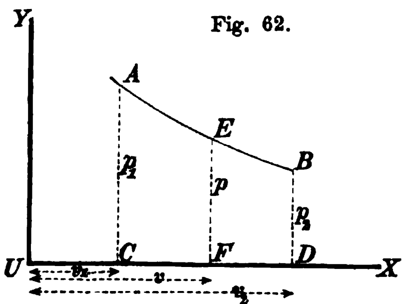


Fig. 62.

Es sei AB, Fig. 62, die Druckcurve nach dem Mariotte'schen Gesetze, also nach §. 54 die isothermische Curve und zwar sei v_1 ein Volumen, welches in einem (cylindrischen) geeigneten Gefäße abgesperrt ist und die Pressung p_1 besitzt. Sodann werde v_1 durch die Abscisse UC und p_1 durch die Ordinate AC der Druckcurve dargestellt.

Das ausgedehnte, nach der Expansion vorhandene Volumen sei v_2 und werde durch die Abscisse UD, die correspondirende (geringere) Pressung p_2 durch die Ordinate BD sichtbar gemacht.

Der Querschnitt des gedachten cylindrischen Gefäßes sei a, der nach einer beliebigen Zeit von einem entsprechenden Kolben zurückgelegte Weg sei s und die correspondirende Pressung auf die Flächeneinheit des Kolbens sei $= p$. Dann erhält man offenbar für die elementare Espansionsarbeit $d\mathfrak{A}_e$:

$$d\mathfrak{A}_e = apds, \text{ oder, wenn}$$

$ads = dv$ gesetzt wird:

$$(1) \quad d\mathfrak{A}_e = pdv.$$

Mit Bezug auf unsere Figur wird aber p durch eine entsprechende Ordinate EF, so wie das correspondirende Volumen durch die zugehörige Abscisse AF dargestellt. Hiernach erhält man aus (1)

$$\mathfrak{A}_e = \int_{v_1}^{v_2} pdv.$$

Hiernach wird die Expansionsarbeit durch den Flächeninhalt des Vierecks $ABDC$ repräsentirt.

Zur Ausführung der Integration hat man nur zu beachten, daß, den Voraussetzungen entsprechend, $p = \frac{p_1 v_1}{v}$ und $\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2}$ ist, also erhalten wird:

$$\text{I.} \quad \mathfrak{A}_e = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \text{ Lgnt } \frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \text{ Lgnt. } \frac{p_1}{p_2}.$$

Die unter gleichen Umständen stattfindende Compressionsarbeit, um ein Volumen v_2 von der Pressung p_2 zum Volumen v_1 mit der Pressung p_1 zu comprimiren, wird eine Arbeit $\mathfrak{A}_c$ erfordert, welche sich aus dem Vorstehenden ergiebt zu:

$$\text{II.} \; \mathfrak{A}_c = -p_2 v_2 \int_{v_2}^{v_1} \frac{dv}{v} = p_2 v_2 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_2 v_2 \text{ Lgnt. } \frac{v_2}{v_1} = p_2 v_2 \text{ Lgnt. } \frac{p_1}{p_2},$$

oder da $p_2 v_2 = p_1 v_1$ ist, auch

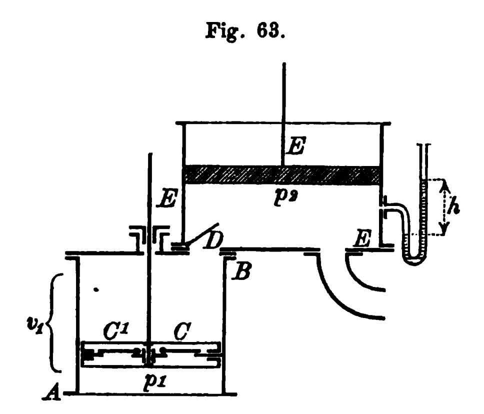
$$\mathfrak{A}_c = p_1 v_1 \text{ Lgnt. } \frac{p_1}{p_2},$$

woraus schließlich $\mathfrak{A}_e = \mathfrak{A}_c$ folgt.

Von den mannigfach praktisch wichtigen Anwendungen, welche von vorstehenden Gleichungen I. und II. gemacht werden können, mag hier zunächst die Platz finden, welche die Frage nach dem theoretischen Arbeitsaufwand zum Betriebe der Cylindergebläse für Metallschmelzöfen betrifft.

Hierzu sei in Fig. 63 AB der zur Aufnahme und Comprimirung bestimmte Cylinder, dessen Inhalt $= v_1$ mit atmosph. Luft von der Pressung p_1 gefüllt ist. Beim Niedergange des gehörig dichtenden Kolbens C wird zuerst ein bestimmter Weg zurückgelegt, während

Fig. 63.



dessen keine Luft aus AB in den Sammelbehälter (Regulator) E tritt, sondern dieselbe nur ein Zusammendrücken erfährt. Erst wenn das ursprüngliche Volumen v_1 auf v_2 von der Pressung p_2 zusammengedrückt wurde, erfolgt das Oeffnen eines (hier gewichtslos gedachten) Ventiles D und der Uebertritt, das Fortschaffen der Luft in dem Sammelbehälter E.

Bei aufmerksamer Betrachtung erkennt man leicht, daß der gesammte Arbeitsaufwand $= \mathfrak{A}$, bei einem Niedergange des Kolbens aus nachbemerkten drei Theilen besteht:

Erstens aus der Arbeit $= \mathfrak{A}_c$ zum Comprimiren des Volumens v_1 von p_1 Pressung auf p_2 d. i. $\mathfrak{A}_c = p_1 v_1 \text{ Lgnt. } \frac{p_2}{p_1}$.

Zweitens aus der Arbeit $= \mathfrak{A}_f$ zum Fortschaffen der auf p_2 zusammen gepreßten Luft vom Volumen v_2, d. i. $\mathfrak{A}_f = p_2 v_2$, und

Drittens aus der Arbeit $= \mathfrak{A}_a$, welche nutzbringend die äußere atmosphärische Luft auf die äußere (untere) Fläche des Kolbens C ausübt, also

$$\mathfrak{A}_a = p_1 v_1.$$

Sonach ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_c + \mathfrak{A} \ - \mathfrak{A}_a, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{A} = p_1 v_1 \text{ Lgnt. } \frac{p_2}{p_1} + p_2 v_2 - p_1 v_1, \text{ d. i.,}$$

weil $p_2 v_2 = p_1 v_1$:

$$\text{III.} \quad \mathfrak{A} = p_1 v_1 \text{ Lgnt. } \frac{p_2}{p_1} = p_2 v_2 \text{ Lgnt. } \frac{p_2}{p_1}.$$

Ganz denselben Ausdruck erhält man für die Arbeit, welche frei wird, wenn man das zusammengedrückte Volumen v_2 von der Pressung p_2 aus dem Reservoire E in einen zweiten Cylinder treten, hier durch Expansion wieder auf einen Kolben wirken und schließlich in die Atmosphäre entweichen läßt. Diese Art der Arbeitsleistung tritt u. A. bei den durch gepreßte atmosph. Luft betriebenen Tunnelbohrmaschinen ein, woselbst der gedachte zweite Cylinder der Bohrmaschine angehört.

Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen ergiebt sich nämlich: [1])

---

[1]) Man sehe hierüber eine höchst werthvolle Arbeit des Herrn Professor Dolezalek am Königl. Polytechnikum zu Hannover, welche im Jahrgange 1878, S. 42 und S. 48 der Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins, unter der Ueberschrift „Bemerkungen über Bohrmaschinen im Gotthardtunnel" abgedruckt ist.

$$\mathfrak{A}_e = p_2 v_2 \text{ Lgnt} . \frac{p_2}{p_1},$$
$$\mathfrak{A}_f = (p_2 - p_1)\, v_2 \text{ (hier Volldruckarbeit genannt) und}$$
$$\mathfrak{A}_a = (v_1 - v_2)\, p_1, \text{ daher}$$
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_e + \mathfrak{A}_f - \mathfrak{A}_a = p_2 v_2 \text{Lgnt}. \frac{p_2}{p_1} + p_2 v_2 - p_1 v_2 - p_1 v_1 + p_1 v_2, \text{ d.i.}$$
$$\mathfrak{A} = p_2 v_2 \text{ Lgnt } \frac{p_2}{p_1}.$$

In vorstehende Gleichungen führt man sehr oft (für hüttenmännische Zwecke) statt der Pressungen p_1 und p_2 die correspondirenden Barometer- und Manometerstände ein. Wird ersterer mit b und letzterer mit h (Fig. 63) bezeichnet, so erhält man, unter Voraussetzung einer Manometerflüssigkeit von der Dichte $\varDelta$:

$$p_1 = \varDelta . b \text{ und } p_2 = \varDelta . (b + \text{h}), \text{ daher}$$
$$\text{IV.} \quad \mathfrak{A} = \varDelta b v_1 \text{ Lgnt} . \frac{b+h}{b}.$$

Ist h recht klein[1]), so läßt sich annäherungsweise

$$\text{Lgnt}. \frac{b+h}{b} = \frac{h}{b} \text{ setzen,}$$

so daß statt IV. erhalten wird:

$$\text{V.} \quad \mathfrak{A} = \varDelta . h . v_1 \text{ }^2).$$

Letztere Gleichung entspricht der bei Fachleuten am meisten angewandten Regel, daß man den erforderlichen theoretischen Arbeitsaufwand eines Gebläses findet, wenn man die bedürftigte Windmenge mit dem Manometerstande und mit der Dichte der Manometerflüssigkeit multiplicirt.

Beispiel 1. Mittelst eines Cylindergebläses soll pro Secunde 1 Cubikmeter Wind von 83 Centimeter Pressung (Quecksilbermanometer) in einen Hochofen geschafft werden und zwar an einer Stelle, wo ein (mittlerer) Barometerstand von 71 Centimeter (Quecksilbersäule) vorhanden ist. Welcher theoretische Arbeitsaufwand ist hierzu erforderlich?

Auflösung. Aus Gleichung IV. ergiebt sich ($\varDelta = 1000 . 13{,}6$ angenommen):

$$\mathfrak{A} = (1000 . 13{,}60) . 0{,}71 . 1{,}0 . \text{Lgnt} . \frac{83}{71}, \text{ d. i.}$$
$$\mathfrak{A} = 9686 . \text{Lgnt} . 1{,}17 = 9686 . 0{,}157 = 1520{,}7^{mk},$$

oder in Maschinenpferdekräften ($= N$) à 75^{mk} ausgedrückt

$$N = \frac{1520{,}7}{75} = 21{,}6.$$

[1]) Bei gewöhnlichen Eisenhochöfengebläsen mit Cokesfeuerung übersteigt h fast niemals $\frac{1}{3}$ Atmosph. oder ist allerhöchstens $h = \frac{0^m{,}76}{3} = 0^m{,}25$. Bei Gebläsen zum Bessemerprocesse kommen dagegen Pressungen von $1\frac{1}{2}$ bis (wohl gar) 2 Atmosphären vor und ist dann im ersteren Falle $h = 1{,}5 . 0{,}76 = 1{,}140$ Meter.

[2]) Bei weitem wissenschaftlichere Effectberechnungen der Gebläse haben Weisbach (Ing.-Mech. Bd. 3, S. 1055 ff.) und besonders Grashof (Zeitschr. des Vereins deutscher Ing. Bd. VIII, S. 47 und 101) geliefert. Man sehe hinsichtlich der von Grashof gefundenen Werthe auch Redtenbacher's Resultate des Maschinenbaues. 6. Auflage, Seite 381.

Die Gleichung V. liefert dagegen:

$$\mathfrak{A} = 1000 \,.\, 13{,}6 \,.\, 0{,}12 = 1632^{mk} \text{ und daher}$$

$$N = \frac{1632}{75} = 20{,}9.$$

Den erforderlichen, reellen Arbeitsaufwand $= \mathfrak{A}r$, welcher sämmtliche vorhandene mechanische und hydraulische Widerstände überwindet, nimmt man bei Gebläsen gewöhnlich zu 0,60 an, d. h. setzt

$$\mathfrak{A}r = \frac{\mathfrak{A}}{0{,}6}$$

und erhält daher im vorberechneten speciellen Falle:

$$\mathfrak{A}r = \frac{p_1 v_1}{0{,}60} \,.\, \text{Lgnt.} \frac{p_2}{p_1}, \text{ oder in Maschinen-Pferdekräften}$$

$$Nr = \frac{p_1 v_1}{75 \,.\, 0{,}60} \,.\, \text{Lgnt.} \frac{p_2}{p_1} \text{ [1]}).$$

Beispiel 2. Zum Betriebe einer der im Gotthardtunnel benutzten (Ferroux'schen) Gesteinbohrmaschinen werden pro Minute 0,58 Cubikmeter atmosphärische Luft von 5 Atmosphären absoluter Spannung benutzt. Es fragt sich, welche (theoretische) mechanische Arbeit $= \mathfrak{A}$ diesem Falle entspricht [2]).

Auflösung. Man erhält ohne Weiteres, mittelst der Gleichung III. die secundliche Arbeit zu

$$\mathfrak{A} = 5 \,.\, 10333 \,.\, \frac{0{,}58}{60} \,.\, \text{Lgnt. } 5, \text{ d. i.}$$

$$\mathfrak{A} = 499{,}43 \,.\, 1{,}609 = 803^{mk}{,}58 \text{ und}$$

$$N = \frac{803{,}58}{75} = 10{,}71.$$

§. 59.

Das potenzirte Mariotte'sche Gesetz.

(Das Laplace'sche oder Poisson'sche Gesetz). [3])

Befindet sich Gas in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle, so daß während einer Volumenänderung des Gases weder Wärme mitgetheilt noch entzogen wird, oder geht die Volumenänderung so schnell vor sich, daß in der entsprechend kurzen Zeit keine (merkliche) Wärmemenge zu oder abströmen kann, so ist das Mariotte'sche Gesetz in seiner ursprünglichen Form nicht

---

[1]) Hierdurch erklärt sich u. A. die in der 6. Auflage, S. 383 von Redtenbacher's Resultaten für den Maschinenbau befindliche Gleichung für den Nutzeffect, welchen eine betreffende Betriebsmaschine, in Pferdekräften ausgedrückt, bei Gebläsen entwickeln muß, die folgende Gestalt hat:

$$Nr = \frac{1{,}70 \,.\, 10333}{75} \,.\, v_1 \text{ Lgnt.} \frac{p_2}{10333}.$$

[2]) Professor Dolezaleck a. a. O. S. 122.

[3]) Daß richtiger hier Laplace statt Poisson genannt wird, erhellt aus einem folgenden mit der Ueberschrift „Geschichtliche Notizen" überschriebenen Paragraphen.

mehr gültig, sondern tritt nach Laplace[1]) und Poisson[2]) unter der Gestalt auf:

$$\text{I.} \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n,$$ [3])

wo für atmosphärische Luft $n = 1,41$ ist. Redtenbacher hat hierfür den passenden Namen des potenzirten Mariotte'schen Gesetzes eingeführt.

Verbindet man hiermit (nach §. 54) die Gleichungen

$$p_1 v_1 = RT_1 \text{ und}$$
$$p_2 v_2 = RT_2,$$

so erhält man noch folgende Werthe:

$$\text{II.} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}.$$

$$\text{III.} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \text{ und}$$

$$\text{IV.} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}, \text{ so wie}$$

$$\text{V.} \quad T_2 p_2^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = T_1 \cdot p_1^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \text{Constante.}$$

Rechnet man mit diesen Gleichungen, so ist es von Nutzen, zu beachten, daß für $n = 1,41$, auch

$$\frac{1}{n} = 0,7093;\ n - 1 = 0,41;\ \frac{n-1}{n} = 0,2908 \text{ und}$$

$$\frac{n}{n-1} = 3,439 \text{ wird.}$$

Stellt man, in gleicher Weise wie §. 54 beim Mariotte'schen Gesetze geschah, auch das Laplace-Poisson'sche Gesetz derartig dar, daß die verschiedenen Werthe der Volumen v die Abscissen und die correspondirenden Pressungen p die Ordinaten bilden, so erhält

---

[1]) Oeuvres de Laplace, V, Pg. 155 (Chapitre III unter der Ueberschrift: „De la vitesse du son et du mouvement des fluides elastiques").

[2]) Traité de mécanique. Paris 1811. Zweite Ausgabe 1833. Deutsche Bearbeitung von Stern (in Göttingen) von 1836, §. 638, Seite 501.

[3]) Clausius leitet dies Gesetz, in höchst sinnreicher, eigenthümlicher Weise, in der 2. Auflage seiner mechanischen Wärmetheorie (S. 65) aus den Fundamentalgleichungen letzterer Wissenschaft ab, so wie er ferner, in derselben Quelle, den Werth des Exponenten n aus der Gleichung berechnet:

$$n = \frac{u^2 \cdot \Delta}{g \cdot p},$$

worin u die Schallgeschwindigkeit bei Null Grad Temperatur bezeichnet, also $u = 332,40$ Meter (nach Bravais und Martius), ferner $\Delta = 1,2932$, $g = 9,809$ und $p = 10333$ ist, so daß erhalten wird:

$$n = \frac{(332,5)^2 \cdot 1,2932}{9,8089 \cdot 10333} = 1,410.$$

man eine krumme Linie, welche man (nach Rankine) die adiabatische Curve[1]) zu nennen pflegt.

Beispiel 1. Wenn man im Beispiele 2 des vorigen Paragraphen voraussetzen wollte, daß bei atmosphärischer Luft in den Bohrmaschinen des Gotthardtunnels weder Wärme ab noch zugeführt wird, so fragt es sich, wie groß die Temperaturerniedrigung am Ende der dort stattfindenden Expansion von 5 auf 1 Atmosphäre sein müßte, wenn die anfängliche Temperatur 10 Grad ist.

Auflösung. Man erhält hier ohne Weiteres, nach III:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = T_1 \left(\frac{1}{5}\right)^{0,2907}, \text{ d. i.}$$

wegen $T_2 = 273 + t_2$ und $T_1 = 273 + 10 = 283$

$$273 + t_2 = 283 \left(\frac{1}{5}\right)^{0,2907}, \text{ d. i.}$$

$$t_2 = -273 + \frac{283}{5^{0,2907}} = 175,5 - 273,0, \text{ also}$$

$$t_2 = -97,5 \text{ Grad Celsius.}$$

Beispiel 2. In einem Cylinder hat man 1 Kilogramm atmosphärische Luft von Null Grad Temperatur und der Pressung = 1 Atmosphäre eingeschlossen, es fragt sich, auf wie viel sich diese Luft erwärmt, wenn dieselbe so zusammengedrückt wird, daß die Spannung das Doppelte, also zwei Atmosphären erreicht?

Auflösung. Hier ist

$$T_1 = T_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \text{ also } 273 + t_1 = 273\,(2)^{0,2908}, \text{ folglich}$$

$$t_1 = 334 - 273 = 61, \text{ d. h.}$$

die Luft erwärmt sich um 61 Grad.

§. 60.

Adiabatische Expansion und Compression.

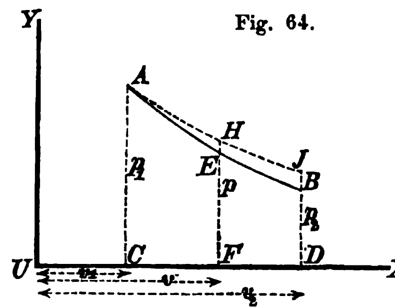


Fig. 64.

Um einen Ausdruck für die Expansionsarbeit eines Gases zu entwickeln, wobei die sogenannte Druckcurve die adiabatische AB Fig. 64 ist[2]), sei, wie in §. 58 das ursprüngliche Volumen v_1 durch die Abscisse UC, die correspondirende Pressung p_1 durch die correspondirende Ordinate AC dargestellt, während die Endwerthe von v und p durch $v_2 = UD$ und $p_2 = DB$ repräsentirt sind.

Zur Ausführung der Integration des Ausdruckes

---

[1]) Vom griechischen Worte διαβαίνειν (diabainein) durchgehen.

[2]) Die punktirte Linie AHJ stellt die correspondirende isothermische Curve dar.

$$(1) \quad d\mathfrak{A}_e = pdv,$$

ist vorstehendem Paragraphen gemäß

$$p = p_1 v_1^n \cdot \frac{1}{v^n},$$

so daß (1) übergeht in

$$\mathfrak{A}_e = p_1 v_1^n \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^n}, \text{ d. i.}$$

$$\text{I.} \begin{cases} \mathfrak{A}_e = \dfrac{p_1 v_1^n}{n-1} \left(\dfrac{1}{v_1^{n-1}} - \dfrac{1}{v_2^{n-1}} \right) \text{ oder auch:} \\ \mathfrak{A}_e = \dfrac{p_1 v_1}{n-1} \left\{ 1 - \left(\dfrac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} \right\}. \end{cases}$$

Oder mit Bezug auf §. 59, indem man beachtet, daß

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{n}} \text{ ist:}$$

$$\mathfrak{A}_e = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right\}.$$

Für die Compressionsarbeit $= \mathfrak{A}_c$ erhält man auf gleichem Wege

$$\text{II.} \quad \mathfrak{A}_c = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left\{ \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\}.$$

Um demnach ein Volumen v_1 atmosphärischer Luft von p_1 Pressung, ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme, erstens bis zur Pressung p_2 zu comprimiren und zweitens aus dem Raume von der Pressung p_1, worin sie das Volumen v_1 hatte, mit dem entsprechend verkleinerten Volumen v_2 in einen Raum von der Pressung p_2 zu versetzen, ist, analog des gleichen Falles §. 58, S. 122 (bei Benutzung des Mariotte'schen Gesetzes) eine Arbeit $= \mathfrak{A}_1$ aufzuwenden, welche sich aus der Gleichung berechnet:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left\{ \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\} + p_2 v_2 - p_1 v_1, \text{ oder wegen}$$

$$p_2 v_2 - p_1 v_1 = p_1 v_1 \left\{ \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} = p_1 v_1 \left\{ \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\};$$

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left\{ \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\} + p_1 v_1 \left\{ \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\}, \text{ d. i. endlich}$$

$$\text{III.} \quad \mathfrak{A}_1 = \frac{n}{n-1} p_1 v_1 \left\{ \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\}.$$

Wird umgekehrt, unter sonst gleichen Umständen, das Volumen v_2 von der Pressung p_2 durch plötzliche Expansion auf das Volumen $v_1 = v_2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}$ zurückgeführt, so wird eine Arbeit $= \mathfrak{A}_2$ frei oder verrichtet:

$$\text{IV.} \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{n}{n-1} p_2 v_2 \left\{1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right\}.$$

Beispiel 1. In einem Windkessel befindet sich ein Luftvolumen v_1 bei einem Drucke $p_1 = 5$ Atmosphären abgesperrt. Es fragt sich, welche Compressionsarbeit $= \mathfrak{A}_c$ erforderlich ist, wenn der Druck bis auf 47,2 Atmosphären gebracht werden soll.

Auflösung. Die Gleichung I. liefert hier ohne Weiteres

$$\mathfrak{A}_c = \frac{5 \,.\, 10333 \,.\, v_1}{0{,}41} \left\{\left(\frac{47{,}2}{5}\right)^{0{,}2908} - 1\right\}, \text{ d. i.}$$

$$\mathfrak{A}_c = 126012{,}2 \,.\, v_1 \left\{(9{,}44)^{0{,}2908} - 1\right\} \text{ und}$$

$$\mathfrak{A}_c = 126012{,}2 \,.\, 0{,}920 \,.\, v_1 = 115931{,}2 \,.\, v_1.$$ [1]

Beispiel 2. Welche Betriebsarbeit $= \mathfrak{A}$ berechnet sich für das bereits Seite 123 betrachtete Gebläse, womit pro Secunde 1 Cubikmeter Luft atmosphärischer Pressung erstens bis auf $\frac{83}{71}$ Atmosphären zusammengedrückt und zweitens einem Windreservoire (Regulator) zugeführt werden sollte, sobald man annimmt, daß die Druckveränderung nach dem Laplace'schen Gesetze vor sich geht?

Auflösung. Mit Hülfe von Gleichung II, erhält man:

$$\mathfrak{A} = 3{,}44 \left\{\left(\frac{83}{71}\right)^{0{,}2908} - 1\right\} 1 \,.\, 10333,$$

$$\mathfrak{A} = 35545{,}52 \left\{(1{,}17)^{0{,}2908} - 1\right\},$$

$$\mathfrak{A} = 35545{,}52 \,.\, 0{,}046 = 1635{,}1^{mk} \text{ oder}$$

$$N = \frac{1635{,}1}{75} = 21{,}80 \text{ Maschinenpferde,}$$

statt $N = 21{,}6$ und 20,9 solcher Pferdekräfte, wenn (wie §. 58) die isothermische Linie als Druckcurve angenommen wird.

§. 61.

Wärmeeinheit und specifische Wärme.

Vor weiteren Erörterungen und Verwendungen der Gesetze vorstehender Paragraphen sind hier noch einige Eigenschaften der Wärme zu notiren.

[1] Der Verfasser entlehnte dies Beispiel absichtlich der 2. Auflage des vortrefflichen Grashof'schen Werkes „Theorie der Elasticität und Festigkeit", S. 462, um damit zugleich auf das in dieser Quelle behandelte Capitel „der Deformationsarbeit" von Wasserleitungsröhren aufmerksam zu machen, wenn das in solchen Röhren fließende Wasser plötzlich in seiner Bewegung gehemmt wird (der sogenannte hydraulische Widder auftritt). Der sonach von Grashof behandelte Gegenstand ist zugleich als Ergänzung der in §. 21, S. 38—44 aufgestellten Formeln zur Berechnung von Röhrenwanddicken zu betrachten.

Als aus der Allgemeinen Physik bekannt ist zunächst vorauszusetzen, daß man zur Messung der mannigfaltigen Wirkungen, welche die Wärme hervorbringt, übereingekommen ist, diejenige Wärmegröße (Wärmemenge) als Einheit (als Wärmeeinheit, Calorie) anzunehmen, welche erforderlich ist, die Temperatur eines Kilogrammes destillirten Wassers um einen Grad des hunderttheiligen Thermometers zu erhöhen. Dabei entspricht einer Wärmeeinheit (Calorie) ein mechanisches Aequivalent von 425 Meterkilogrammen und das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit ist gleich $\frac{1}{425}$ Calorien. Mit der Arbeit von 425 Calorien kann man folglich 1 Kilogramm Wasser um 1 Grad des hunderttheiligen Thermometers erwärmen. Auf die Erörterung und Ermittlung dieser Werthe soll im folgenden Paragraphen besonders eingegangen werden.

Die Erfahrung lehrt ferner, daß jeder Körper eine besondere Empfänglichkeit für die Wärme besitzt, d. h. gleiche Gewichte der Körper nicht um gleich viel Temperaturgrade geändert werden. Diese verschiedene Empfänglichkeit für Wärmeaufnahme pflegt man die Wärmecapacität oder die specifische Wärme der Körper zu nennen[1]).

Für feste und tropfbar flüssige Körper nimmt man die specifische Wärme des Wassers, dagegen für Gase die specifische Wärme der atmosphärischen Luft zur Einheit an.

Hiernach gelangt man aber zur Berechnung der Wärmemenge (oder Anzahl Calorien) $= Q$, welche erforderlich ist, um P Kilogramme Wasser von t^0 Temperatur auf die Temperatur $t_1{}^0$ zu bringen, ohne Weiteres zu folgender Gleichung:

$$\text{I.} \quad Q = P\,(t_1 - t).$$

Ferner erhält man für einen Körper, verschieden vom Wasser, dessen Gewicht P_1 ist und dem die specifische Wärme $= c$ entspricht, zur Ermittlung der Anzahl von Calorien $= Q_1$, die Gleichung

$$\text{II.} \quad Q_1 = cP_1\,(t_1 - t).$$

Für c aus zahlreichen Versuchen erhaltene Werthe[2]) finden sich (so weit es der hier vorliegende technische Zweck erfordert) in nachstehender Zusammenstellung:

Specifische Wärme einiger Körper nach Regnault:[3])

Körper	c	Körper	c
Aluminium	0,2143	Nickel	0,1092
Antimon	0,0508	Platin	0,0324
Blei	0,0314	Quecksilber	0,0319
Eisen	0,1138	Schwefel	0,2026
Gold	0,0324	Silber	0,0570
Kohlenstoff	0,1469	Wismuth	0,0308
Kupfer	0,0952	Zink	0,0956
Mangan	0,1217	Zinn	0,0562

[1]) Man sehe hierzu noch Note ([1]) S. 141.

[2]) Bei Jamin a. a. O., T. II. (2. Auflage), Pg. 43* und bei Wüllner a. a. O., im zweiten Bande, erster Abschnitt, drittes Capitel. In diesen Quellen werden auch mit entsprechender Ausführlichkeit die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der specifischen Wärme erörtert.

[3]) Mémoires de l'Academie des Sciences, T. XXI, und Wüllner, a. a. O., Bd. III, S. 460.

Hierbei ist noch zu beachten, daß die specifische Wärme mit steigender Temperatur wächst, wie unter Andern[1]) aus nachstehenden vom schwedischen Physiker Byström gewonnenen Resultaten erhellt[2]).

Temperatur.	Specifische Wärme			
	Roheisen.	Gußstahl.	Silber.	Platin.
0° C.	0,12768	0,11782	0,05698	0,03286
50	0,12830	0,11850	0,05715	0,03248
100	0,12954	0,11986	0,05749	0,03266
200	0,13388	0,12462	0,05868	0,03332
300	0,14070	0,13216	0,12672	0,06055

Aus letzterer Tabelle erkennt man, daß bei niedrigen Temperaturen die Unterschiede der specifischen Wärmen für feste Körper verhältnißmäßig gering sind und daher für viele technische Anwendungen hierauf nicht Rücksicht genommen zu werden braucht.

Bei Flüssigkeiten ist der Temperatureinfluß bemerkbarer, indem hier die Erfahrung lehrt, daß schon eine geringe Aenderung der Temperatur eine merkliche Aenderuug der specifischen Wärme zur Folge hat. So fand Regnault u. A.[3]) bei folgenden Substanzen die specifischen Wärmen:

	20 — 15°	15 — 10°	10 — 5°
Quecksilber . .	0,0290	0,0283	0,0282
Alkohol . . .	0,6148	0,6017	0,5987
Holzgeist . . .	0,6009	0,5868	0,5901

Kennt man die Form des mathematischen Ausdruckes, welcher die specifische Wärme $= c$ eines Körpers als Function der Temperatur $= t$ darstellt, so kann man, wenigstens für eine unendlich kleine Temperatur-Zu- oder Abnahme, c als constant betrachten und dann, wenn P in den vorstehenden Gleichungen überdies noch $= 1$ Kilogramm gesetzt wird, für die entsprechende Wärmemenge $= dq$ schreiben:

$$\text{III.} \quad \left\{ \begin{aligned} dq &= c\,dt, \text{ oder} \\ q &= \int_0^t c\,dt. \end{aligned} \right.$$

Bei Gasen und Dämpfen hat man noch den Unterschied der specifischen Wärme bei constantem Volumen und bei constanter Pressung zu beachten. Spricht man von der speci-

[1]) Wüllner, Experimentalphysik. Bd. III (Dritte Ausgabe), S. 437.
[2]) Berliner Bericht über die Fortschritte der Physik für 1860, S. 369.
[3]) Wüllner a. a. O., S. 437.

fischen Wärme bei constantem Drucke[1]), so denkt man sich, das Gas dehne sich während der Wärmezuführung unter Ueberwindung eines äußeren constanten Druckes aus; während im anderen Falle eine solche Ausdehnung nicht erfolgt, sondern das Volumen unverändert erhalten wird. Nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie ist ohne Weiteres klar, daß die specifische Wärme bei constantem Drucke größer, als die bei constantem Volumen sein muß, da im ersten Falle bei gleicher Temperaturerhöhung dem Gase eine größere Wärmemenge mitzutheilen ist, als im letzteren Falle, weil in Folge der Ausdehnung unter constantem Drucke Arbeit vom Gase verrichtet wird und sonach ein Theil der zugeführten Wärme verschwindet, oder, wie man sagt, in Arbeit verwandelt wird.

Vorstehender Erörterung gemäß werden wir die specifische Wärme der Gase bei constantem Drucke mit c_p und die bei constantem Volumen mit c_v bezeichnen.

Zur Zeit ist die specifische Wärme von Flüssigkeiten nur bei constanter und zwar atmosphärischer Pressung direct bestimmt worden, so z. B. für Wasser nach Regnault zu

$$c_p = 1 + 0{,}000\,04t + 0{,}000\,000\,9\,t^2.$$

Die Gleichung III. liefert daher, für diesen speciellen Fall

$$\text{IV.} \quad q = t + 0{,}000\,02t^2 + 0{,}000\,000\,3\,t^3,$$

wo also q die Wärmemenge ist, welche die Gewichtseinheit Wasser erfordert, um solche von 0^0 bis t^0 zu erwärmen.

Die Ermittlung der specifischen Wärme bei constantem Volumen hat man nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie vorgenommen (berechnet), worüber in den unten notirten Werken[2]) nachzulesen ist.

Bezeichnet man überdies das Verhältniß $\frac{c_p}{c_v}$ mit n, so läßt sich folgende Zusammenstellung machen:

	c_p	c_v	$n = \frac{c_p}{c_v}$
Atmosphärische Luft	0,23751	0,16847	1,4098
Stickstoff	0,24380	0,17273	1,4114
Sauerstoff	0,21751	0,15507	1,4026
Wasserstoff . . .	3,40900	2,41226	1,4132

Aus dieser Tabelle geht hervor, daß n fast constant und zugleich der Exponent des Laplace-Poisson'schen Gesetzes ist, wofür wir S. 125 für atmosph. Luft

$$n = 1{,}41$$

annahmen.

Statt der Gleichungen III. erhält man folglich hier

---

[1]) Zeuner, Mechanische Wärmetheorie (2. Auflage), S. 110 und S. 117.

[2]) Clausius, Die mechanische Wärmetheorie (2. Auflage), S. 59 unter der Ueberschrift „Numerische Berechnung der specifischen Wärme bei constantem Volumen". — Zeuner, a. a. O., S. 116. — Richard Rühlmann, Handbuch der mechanischen Wärmetheorie, Bd. 1, S. 181.

$$\text{V.} \quad dq_p = c_p\, dt,$$

wenn die Erwärmung bei constantem Drucke statthat und

$$\text{VI.} \quad dq_v = c_v\, dt,$$

wenn die Erwärmung bei constantem Volumen stattfindet.

Beispiel. Ein Dampfkessel aus Eisenblech von 11,4 Millimeter Dicke besteht aus einem Cylinder mit überall kreisförmigen Querschnitten und aus Halbkugeln an beiden Enden. Sein Durchmesser beträgt 1,553 Meter, während der cylindrische Theil 7,677 Meter Länge hat. Es fragt sich, welches Wärmequantum erforderlich wird, um Kessel und Wasser von der Temperatur $10^0\, C$ auf die von $144^0\, C$ (4 Atmosphären innere Dampfspannung) zu bringen?

Auflösung. Der Gesammtinhalt dieses Kessels berechnet sich zu 18,50 Cubikmeter und sein Gewicht zu 5186 Kilogramm. Das Gewicht des Wassers, wenn der Kessel bis auf 0,60 seines Inhaltes gefüllt ist, läßt sich rund zu 11.1000 = 11000 Kilogramm annehmen. Man erhält also nach I. und II. dieses Paragraphen

$Q = 11000 \,.\, (144 - 10) = 1474000$ als erforderliche Wärmemenge für das Wasserquantum und

$Q_1 = 0{,}12 \,.\, 5186\, (144 - 10) = 83391$ für die Eisenmasse, wenn für Eisenblech $c = 0{,}12$ angenommen wird.

Daher die gesammte erforderliche Wärmemenge:

$$Q + Q_1 = 1\,474\,000 + 83391 = 1\,557\,391 \text{ Calorien.}$$

§. 62.

Das mechanische Wärmeäquivalent.

Die hier zu lösende Aufgabe betrifft die Auffindung des bereits Seite 129 notirten Arbeitswerthes der Wärmeeinheit. Wir bewirken die Lösung auf folgendem, zuerst von Weisbach[1]) angegebenen Wege.

Nach vorigem Paragraphen erhält man zuerst die Wärmemenge Q_1, welche einem Temperaturverluste $t_1 - t_2$ entspricht, wenn v_1 ein Volumen atmosphärischer Luft von der Pressung p_1 sich so expandirt, daß die Pressung auf p_2 herabgeht und das Volumen v_1 in einen Raum vom Inhalte v_2 fortgeschoben wird:

$$Q_1 = c_p P_1\, (t_1 - t_2),$$

oder, wenn nach §. 54 die anfängliche Dichte der atmosphärischen Luft mit Δ_1 bezeichnet wird, also $P_1 = \Delta_1 v_1$ ist und ferner, wegen $c_p = 0{,}23751$:

$$(1) \quad Q_1 = 0{,}23751\, (t_1 - t_2)\, \Delta_1 v_1.$$

Für die beim vorerwähnten Acte frei werdende mechanische Arbeit erhält man nach §. 60, IV:

$$\mathfrak{A}_e = \frac{n}{n-1}\, v_1 p_1 \left\{ 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \right\}, \text{ oder auch, wegen}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \text{nach §. 59,}$$

[1]) Der Civilingenieur (von Bornemann), Bd. 5, Jahrg. 1859, S. 48.

$$\mathfrak{A}_e = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{v_1 p_1}{T_1} (T_1 - T_2), \text{ d. i.}$$

weil $T_1 = 273 + t_1$ und $T_2 = 273 + t_2$, auch

$$(2) \quad \mathfrak{A}_e = \frac{n}{n-1} \frac{v_1 p_1}{T_1} (t_1 - t_2), \text{ d. i.}$$

die Arbeit, welche bei Abkühlung des Volumens v_1 von der Temperatur t_1 auf die t_2 verrichtet wird.

Entfernt man mittelst der Gleichung 2 des §. 54 aus letzterem Ausdrucke für $\mathfrak{A}_e$, die Pressung p_1, mit Hülfe von

$$p_1 = 7992{,}655 \, . \, \frac{T_1}{a} \Delta_1,$$

wo $a = 273$ ist, so folgt aus (2):

$$\mathfrak{A}_e = \frac{n}{n-1} \, . \, 7992{,}655 \, \frac{\Delta_1}{a} (t_1 - t_2) v_1,$$

oder weil $\frac{n}{n-1} = 3{,}44$ ist, auch

$$\mathfrak{A}_e = \frac{3{,}44 \, . \, 7992{,}655}{273} (t_1 - t_2) \Delta_1 v_1, \text{ d. i.}$$

$$(3) \quad \mathfrak{A}_e = 100{,}713 \, (t_1 - t_2) \Delta_1 v_1.$$

Dividirt man letztere Gleichung durch die unter (1) entwickelte, so erhält man

$$\text{I.} \quad \frac{\mathfrak{A}_e}{Q} = \frac{100{,}713}{0{,}23751} = 424^{mk}{,}3.$$

Hiernach ist also eine Wärmeeinheit oder Calorie einer mechanischen Arbeit von 424,3 Meterkilogrammen äquivalent.

Wir bezeichnen den Quotienten $\frac{\mathfrak{A}_e}{Q}$, d. i. das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit, oder der Arbeitswerth, welcher der Wärmemenge $= 1$ entspricht, in der Folge mit E, setzen aber nach später anzugebenden Gründen[1])

$$E = 425^{mk}.$$

Den reciproken Werth von E, d. i. das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, den Arbeitswerth der Wärmeeinheit (das mechanische Wärmeäquivalent), bezeichnen wir dagegen mit A, setzen also

$$A = \frac{1}{E} = \frac{1}{425},$$

also auch

$$\text{II.} \quad Q = \mathfrak{A} \, . \, A.$$

Zusatz 1. Clausius[2]) entwickelt zur Berechnung des mechanischen Wärmeäquivalents die Gleichung:

$$\text{III.} \quad E = \frac{R}{c_p - c_v},$$

woraus folgt, wenn man die vorher (S. 131) angegebenen Werthe von R, c_p und c^v substituirt:

$$E = \frac{29{,}27}{0{,}2315 - 0{,}1684} = 423^{mk}{,}4.$$

---

[1]) In dem nachher (S. 137) folgenden mit „Geschichtliche Notizen“ überschriebenen §. 63.

[2]) Die mechanische Wärmetheorie, zweite Auflage, S. 55.

Die Verschiedenheit dieses Werthes von den unter I. gefundenen fällt nicht auf, wenn man beachtet, daß die Werthe von c_p (bis jetzt allein durch Versuche ermittelt) und von c_v (zur Zeit nur durch Rechnungen, nicht durch Versuche bestimmt) veränderlich sind, so wie der Quotient (das Verhältniß) $n = \frac{c_p}{c_v}$ ebenfalls, bei directer Ermittlung, je nach dem hierzu betretenen Wege verschieden ausfällt, nicht zu gedenken, daß man ebenfalls verschiedene Zahlenwerthe erhält, sobald man von anderen Gasarten als atmosphärische Luft ausgeht.

Um bestimmte Nachweise in letzteren Beziehungen machen zu können, benutzt der Verfasser eine der jüngsten Arbeiten eines deutschen Physikers, des Herrn Dr. Röntgen[1]) der aus directen Versuchen für n findet:[2])

Für trockene atmosph. Luft $n = 1{,}4053$;
" Kohlensäure . . . . $n = 1{,}3052$;
" Wasserstoff . . . . $n = 1{,}3852$.

Für atmosphärische Luft $c_p = 0{,}2375$ (nach Regnault) angenommen, findet Röntgen $c_v = 0{,}1690$ und $E = 427^{mk}{,}31$.

Für Kohlensäure aber $c_p = 0{,}19256$ und c_v verschieden je nach der Temperatur, nämlich zu 0,1415 (bei 0°), 0,1475 (bei 19°,5) und zu 0,1702 (bei 100°) und $E = 425^{mk}{,}16$ etc.

Eine recht angemessene Zusammenstellung von auf verschiedenen Wegen für E gefundenen Werthen giebt Hirn in seiner Théorie Mécanique de la Chaleur, 2e Edit., Pg. 71, so wie mein Neffe, Herr Prof. Richard Rühlmann, in seinem (theilweise nach Verdet bearbeiteten) Handbuche der mechanischen Wärmetheorie, Bd. 1, S. 61, welche letztere hier unten in der Note (3) verzeichnet sind.

---

1) Bestimmung des Verhältnisses der specifischen Wärme bei constantem Drucke zu derjenigen bei constantem Volumen für einige Gase. Poggend. Annalen der Physik, Bd. 148 (1873), S. 580—621.

2) Für atmosphärische Luft fand Masson (1858) $n = 1{,}4196$; Weisbach (1859) fand $n = 1{,}4025$.

3)

Namen des Phänomens, dem die Bestimmung des mechanischen Aequivalentes der Wärme entlehnt ist.	Namen der Physiker, welche das theoretische Princip der Bestimmung angegeben haben.	Namen der Physiker, welche die experimentellen Daten lieferten.	Werth des mechanischen Aequivalentes der Wärme.
Allgemeine Eigenschaften der Luft	Mayer, Clausius	Regnault, Moll u. v. Beck	426
Reibung	Joule	Joule	425
Mech. Arbeit der Dampfmaschinen	Clausius	Hirn	413
Wärme entbunden durch Inductionsströme	Joule	Joule	452
Wärme entbunden durch eine elektro magnetische Maschine	Favre	Favre	443
Gesammte im Kreise einer Daniell-schen Kette entbundene Wärme	Bosscha	W. Weber, Joule	420
Die Wärme, welche in einem Metalldrahte, der von einem elektrischen Strome durchflossen ist, entwickelt wird	Clausius	v. Quintus	400

Es wird dem Verfasser hier die Bemerkung gestattet sein, daß die höchst interessanten Versuche und Rechnungen seines Collegen, des Herrn Professor von Quintus-Icilius, sich im 01. Bde. (1857) der Poggend. Annalen, von S. 69—105, abgedruckt vorfinden.

Zusatz 2. Die Seite 127 für die Expansions- und Compressionsarbeit gefundenen Ausdrücke nehmen unter Einführung vorstehender Werthe folgende einfache Gestalt an:

Zuerst erhält man mit Benutzung der Werthe auf S. 125, indem man beachtet, daß

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{T_2}{T_1}$$

und nach Seite 113 auf $p_1 v_1 = RT_1$ ist ($v_1 = \frac{1}{\varDelta_1}$ nach S. 112 vorausgesetzt)

$$\mathfrak{A}_e = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left\{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right\} = \frac{RT_1}{n-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right), \text{ d. i.}$$

$$(4) \quad \mathfrak{A}_e = \frac{R}{n-1}(T_1 - T_2).$$

Ferner ist $R = (c_p - c_v)\, E = c_v \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) E$, also da $\frac{c_p}{c_v} = n$, $R = c_v (n-1) E$, oder $\frac{R}{n-1} = c_v$ ist, auch folglich statt (4):

$$(5) \quad \mathfrak{A}_e = c_v E (T_1 - T_2).$$

Beispiel.[1]) Es sei in einem Cylinder die Gewichtseinheit (= 1 Kil.) Gas (atmosphärische Luft) eingeschlossen, dessen Temperatur $T_1 = 30^\circ C$ und dessen Druck $1\frac{1}{2}$ Atmosphären beträgt ($p_1 = 1\frac{1}{2} \,.\, 10333$ Kil.). Man soll die frei gewordene Arbeit berechnen, wenn sich das Gas, ohne Mittheilung und ohne Entziehung von Wärme, auf eine Atmosphäre ($p_2 = 10333$ Kil.) ausdehnt.

Auflösung. Zuerst berechnet sich aus $T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$,

$T_2 = T_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{0{,}2908} = 0{,}888$ und wegen $T_2 = 273 + t_2$ und $T_1 = 273 + 30 = 303$, $t_2 = -273 + 303 \,.\, 0{,}888$, d. i. $t_2 = -3{,}7$, d. h. die Temperatur sinkt von $+30^\circ$ auf $-3{,}7$ herab.

Sodann erhält man

$$\mathfrak{A}_e = 0{,}16847 \,.\, 425 \,.\, (30 + 3{,}7) = 2422^{mk}{,}5.$$

Die verschwundene Wärmemenge beträgt aber:

$$\frac{\mathfrak{A}_e}{E} = \frac{2422{,}5}{425} = 5{,}677 \text{ Calorien.}$$

Zusatz 3. Faßt man das gehörig zusammen, was in den vorstehenden Paragraphen enthalten ist, so lassen sich leicht wichtige Betrachtungen anstellen, die man als Einleitung in das Studium der mechanischen Wärmetheorie betrachten kann.

Werden einem Körper, der irgend welchen Kräften unterworfen ist, Q Wärmeeinheiten (Calorien) zugeführt, so wird zunächst, dem Vorstehenden gemäß, die Gesammtarbeit $= \mathfrak{A}$, welche derselbe aufgenommen hat, dargestellt durch:

$$\mathfrak{A} = 425 \,.\, Q = EQ,$$

---

[1]) Zeuner, Mechanische Wärmetheorie, Zweite Auflage, S. 134.

so wie sich umgekehrt Q ergiebt zu

$$\text{IV.} \quad Q = \frac{\mathfrak{A}}{425} = \frac{\mathfrak{A}}{E}.$$

Dem gegenwärtigen Stande der Physik gemäß kann $\mathfrak{A}$ aus drei Theilen bestehend gedacht werden, die wir mit H, J und W bezeichnen wollen. Davon stellt H denjenigen Theil von $\mathfrak{A}$ dar, welcher die fühlbare Wärme des Körpers oder was dasselbe ist, welcher die lebendige Kraft der Molecüle vergrößert, und die Schwingungsarbeit genannt werden kann. Ferner repräsentirt J denjenigen Theil von $\mathfrak{A}$, welcher zur Verschiebung der Mittellagen der kleinsten Theilchen (der Verrückung, der Positionsänderung der Atome und Molecüle) diente. Endlich stellt W die Arbeit dar, welche Kräfte von Außen auf den Körper ausüben.

Man hat daher schließlich:

$$Q = \frac{H + J + W}{E}.$$

Nennen wir mit Zeuner[1] $H + J$, d. h. die molecularen mechanischen Arbeiten, die inneren Arbeiten, dagegen W die äußeren Arbeiten und setzen $H + J = U$, so folgt:

$$Q = \frac{U + W}{E},$$

oder, wenn man die Zunahme der Wärmemenge und beziehungsweise die Zunahme an innerer und äußerer Arbeit ausdrücken will, also vorstehende Gleichung differencirt:

$$\text{V.} \quad dQ = \frac{dU + dW}{E}, \text{ oder auch}$$

$$dQ = A\,(dU + dW), \text{ wenn } \frac{1}{E} = A \text{ gesetzt wird.}$$

dU pflegt man die Zunahme an Energie des Körpers zu nennen.

Wird einem Körper die endliche Wärmemenge Q mitgetheilt und geht dabei seine Energie aus U_1 in U_2 über, so ist:

$$\text{VI.} \quad Q = \frac{U_2 - U_1 + \int dW}{E}.$$

Das Integral kann hier nur dann bestimmt werden, wenn die äußeren Kräfte bekannt sind, welchen der Körper in jedem einzelnen Momente der mit ihm vorgegangenen Aenderung unterworfen gewesen ist. Im Falle, daß $U_1 = U_2$ ist, pflegt man die betreffende Zustandsänderung einen Kreisproceß zu nennen[2].

---

[1]) Clausius (in seiner mechanischen Wärmetheorie, 2. Auflage, S. 33) sagt in Bezug auf diese Zusammenfassung Folgendes: „Da die im Körper wirklich vorhandene Wärme und die innere Arbeit sich unter einander gleich verhalten, und da wir ferner, wegen unserer Unbekanntschaft mit den inneren Kräften der Körper, gewöhnlich nicht die einzelnen Werthe der beiden Größen H und I, sondern nur ihre Summe kennen, so habe ich schon in einer 1850 erschienenen, auf die Wärme bezüglichen Abhandlung (Poggend. Annalen, Bd. 79, S. 368) diese beiden Größen unter ein Zeichen zusammengefaßt und $U = H + I$ gesetzt."

[2]) Mit vorstehenden Erörterungen beabsichtigte der Verfasser keineswegs eine eigentliche Einleitung in die mechanische Wärmetheorie zu geben,

Für den Fall, wo als äußere Kraft nur ein gleichmäßiger und normaler Druck $= p$ auf die Einheit der Oberfläche eines Volumens v wirkt, erhält man für dW den bereits S. 121 für solchen Fall gewonnenen Ausdruck $dW = pdv$, wonach Gleichung V. folgende Gestalt annimmt:

$$\text{VII.} \quad dQ = \frac{dU + pdv}{E} = A\,(dU + pdv).$$

Bleibt die innere Arbeit constant, ist also $dU = O$, so wird dies die isodynamische Zustandsänderung genannt, gegenüber der bereits §. 60 erörterten adiabatischen Zustandsänderung, bei welcher $dQ = O$ ist.

Die Gleichung VII. bildet zugleich den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie [1].

§. 63.

Geschichtliche Notizen.

Das §. 53 erörterte Gesetz, nach welchem sich, bei constanter Temperatur, das Volumen einer bestimmten Gasmenge umgekehrt proportional mit dem Drucke ändert, oder der Druck eines Gases der Dichtigkeit proportional ist, wurde 1662 vom Engländer Robert Boyle [2]) entdeckt [3]) und im Jahre 1662 als Anhang zu dem Werke „Nova experimenta phisico-mechanica de vi aeris elastica" veröffentlicht. Mariotte [4]) stellte dasselbe Gesetz an die Spitze seines 1679 erschienenen Essai „De la nature de l'air" und begründete es durch sorgfältige Versuche, ohne, wie es scheint, von Boyle's Entdeckung Kenntniß gehabt zu haben. Hat hiernach letzterer Physiker dies Gesetz 17 Jahre früher als Mariotte gekannt, so darf es nicht Wunder nehmen, daß man neuerdings, selbst außerhalb England (wie z. B. Oskar Meyer in seiner „Kinetischen Theorie der Gase", S. 10), angefangen hat, überhaupt nur von einem Boyleschen Gesetze zu sprechen.

Das zweite wichtige Gesetz, das der Ausdehnung der Gase, bei verschiedenen Temperaturen (Seite 111 als das Gay-Lussac'sche aufgeführt), wurde von Charles [5]) entdeckt, der seiner Zeit Professor der

---

vielmehr benutzt er nur die Gelegenheit, auf einige Formen dieser neuen, schönen und auch dem Techniker höchst nützlichen Wissenschaft aufmerksam zu machen. Bei seinen Vorträgen über theoretische Maschinenlehre, am Königl. Polytechnikum in Hannover, setzt der Verfasser voraus, daß den Studirenden die mechanische Wärmetheorie nach den Vorträgen des Herrn Professor von Quintus-Icilius bekannt ist.

[1]) Clausius, „Die mechanische Wärmetheorie", Zweite Auflage, S. 41, und Zeuner, „Mechanische Wärmetheorie", S. 35, Gleichung 9. Grashof, „Theoretische Maschinenlehre", Bd. 1, S. 75, Gleichung 3

[2]) R. Boyle wurde 1626 zu Lismore in Irland geboren und starb 1691 in London. Oskar Meyer in seinem Werke „Die kinetische Theorie der Gase", notirt S. 11 dies Werk nach seinem englischen Titel folgendermaßen: „A defence of the doctrine touching the spring and weight of the air". London 1862.

[3]) Gehler's Physikalisches Wörterbuch, Bd. 4, S. 1026.

[4]) Mariotte, geb. zu Bourgogne im Anfang des 17. Jahrh.; gest. zu Paris 1684.

[5]) Geb. zu Baugency 12. Novbr. 1746, gest. 7. April 1823. Ueber Charles' Erfindung berichtet auch (mein Neffe) Herr Professor Richard Rühlmann in seinem „Handbuch der mechanischen Wärmetheorie", Bd. 1, S. 88.

Physik am Conservatoire des arts et métiers in Paris und als Erfinder des Wasserstoff-Luftballons berühmt war. Daß man dies Gesetz nachher fast ausschließlich das Gay-Lussac'sche[1]) oder Dalton'sche[2]) nannte, hat seinen rechtlichen Grund wohl darin, daß die beiden genannten Physiker derartig umfangreiche, genaue und sorgfältige Versuche anstellten, daß deren Resultate bis beinahe in die jüngste Zeit als gültig und vollkommen genügend angesehen wurden[3]).

Obwohl über die entschiedene Richtigkeit und die Grenzen dieses Gesetzes hin und wieder einige Zweifel ausgesprochen waren (u. A. in Munke's Physik, Bd. 1, S. 500), so hielt man doch fast 40 Jahre lang die Physiker, welche es aufgestellt hatten, für zu bedeutend, als daß man diesen Zweifeln durch neue Versuche zu begegnen für erforderlich gehalten hätte.

Erst der schwedische Physiker und Hüttenmann **Rudberg**[4]), in Upsala, aufmerksam gemacht durch bedeutende Anomalien, welche sich ihm bei einer Untersuchung über den Schmelzpunkt leicht flüssiger Metalle (unter Anwendung der Zahl $\frac{3}{8} = 0{,}375$ vom Eisschmelzpunkte bis zum Siedepunkte) herausstellten, unternahm höchst sorgfältige neue Versuche, wobei sich denn auch erwies, daß der Dalton- und Gay-Lussac'sche Coefficient statt 0,375 nur 0,364 bis 0,365 betrug. Natürlich sprach zuerst der Autoritätsglaube nicht wenig gegen die von Rudberg gefundenen Zahlen, auch hatte er seine Versuche nur auf atmosphärische Luft erstreckt, nicht aber auf (andere) Gase und Dämpfe, die sich ja sämmtlich um 0,375 ausdehnen sollten! Es wurden daher mehrfach neue und wo möglich noch sorgfältigere Versuche unternommen. Nach solchen fand **Magnus** in Berlin (Poggend. Annalen, Bd. 50) den Ausdehnungscoefficienten für atmosphärische Luft zwischen 0° und 100° zu 0,3668, bei anderen Gasen erhielt er von diesen etwas abweichende Werthe.

Die umfangreichsten und sorgfältigsten Versuche über die Ausdehnung der Gase hat **Regnault**[5]) angestellt.

Dieser ausgezeichnete Physiker fand vor Allem die Angaben von Magnus bestätigt, daß sich alle Gase **nicht** um gleiche Bruchtheile ihres Volumens bei gleicher Temperaturerhöhung ausdehnen, sondern hiervon in dem Maße abweichen, je mehr sie sich von dem Mariotteschen Gesetze entfernen, daß sich ferner die Ausdehnungscoefficienten derselben Gase mit wachsendem Drucke vergrößern etc. etc.

---

[1]) **Gay-Lussac**, geb. 1778 zu Leonard im Departement Obervienne; gest. 1850 zu Paris. Die betreffenden Abhandlungen finden sich in den Annales de chimie et de physique, Tome 43, und in Gilbert's Annalen der Physik, Jahrg. 12.

[2]) **Dalton**, geb. 1766 zu Eaglesfield bei Cockermouth (Cumberland); gest. zu Manchester 1844. Ueber Dalton's Versuche wird in Gilbert's Annalen berichtet, Jahrgang 12 und 15.

[3]) **Ferrini** in seiner „Technologie der Wärme", spricht S. 20 nur von einem Boyle-Volta'schen Gesetze, ohne Mariotte und Gay-Lussac zu erwähnen. Dem Verfasser ist nicht bekannt, wie Ferrini zu dieser Annahme gelangt!

[4]) **Rudberg**, geb. 1800 zu Norrköping (Schweden); gest. 1839 zu Upsala. Ueber Rudberg's Versuche berichten betreffende Artikel in Poggendorf's Annalen der Physik, Bd. 41 und 44.

[5]) Mémoire de l'Académie etc. Tome XXI, Pg. 15.

Beispielsweise ergiebt sich aus den Regnault'schen Versuchswerthen, wenn man annimmt, daß der Ausdehnungscoefficient δ eines vollkommenen Gases dem Drucke proportional wachse[1]), für

	δ	$\frac{1}{\delta} = a$
Atmosphärische Luft	0,0036603	273,20
Wasserstoffgas . .	0,0036612	273,13
Kohlensaures Gas .	0,0036522	273,81.

Unsere technischen Anwendungen erlauben hiernach allgemein für ein vollkommenes Gas, den bereits Seite 111 markirten Werth zu wählen, d. h. zu setzen:

$$\delta = 0{,}0036630 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\delta} = a = 273.$$

Als geschichtlich wichtig dürfte hier noch hervorzuheben sein, daß die Einführung des reciproken Werthes für δ, also $a = 273$ (der sogenannten absoluten Temperatur), zuerst und zwar schon 1833 durch den französischen Bergwerks-Ingenieur Clapeyron[2]) erfolgte, wobei zugleich bemerkt werden mag, daß dieser Mathematiker es ist, dem wir überhaupt die erste (hier unten citirte) mathematische Arbeit über mechanische Wärmetheorie verdanken[3]),

Bevor wir die Mittheilungen dieser auch für Techniker höchst interessanten und geschichtlichen Notizen fortsetzen, müssen wir etwas zurückgreifen und hervorheben, daß die Zweifel an der ganz allgemeinen Richtigkeit des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes, schon bald nach Bekanntwerden desselben, von damaligen Mathematikern und Physikern erhoben wurden und daß namentlich die theoretischen Untersuchungen von d'Alembert[4]) und Leonhard Euler[5]) als die wichtigsten genannt zu werden verdienen. Dagegen zeigten die Versuche von Oerstedt und Swendsen[6]), daß mindestens die atmosphärische Luft bis zu einem höchst bedeutenden Drucke nicht merklich vom Mariotte'schen Gesetze abweicht. Die Versuche einer 1829 von der Pariser Academie der Wissenschaften ernannte Commission (bestehend aus Arago, Ampère, Dulong, Girard und Prony) bestätigte dasselbe bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären[7]). Regnault[8]) zeigte durch seine bis jetzt noch völlig unübertroffenen Versuche, daß das Mariotte-Boyle'sche Gesetz weder für die sogenannten unbeständigen Gase, wie Kohlensäure, Ammoniak, Cyan etc., noch auch für die beständigen

---

1) Mousson „Die Physik auf Grundlage der Erfahrung". Zürich 1860. Bd. II, S. 59, und Zeuner „Die mech. Wärmetheorie", 2. Aufl., S. 108.

2) Clapeyron, geb. 1799; gest. (?)

3) „Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur". Journal de l'école royale polytechnique. 22 Cahier, Tome XIV, Pg. 153—190. Clapeyron schreibt in diesem Memoire Pg. 164: $pv = R\ (267 + t)$, womit die Setzung S. 113 zu vergleichen ist.

4) d'Alembert, geb. zu Paris 1717; gest. das. 29. October 1783.

5) Leonhard Euler; geb. 1707 zu Basel; gest. 1783 zu Petersburg.

6) Gehler's physikalisches Wörterbuch. Bd. 4 (2. Abtheilung), S. 1040.

7) Annales de chimie et physique, Tome XLIII (1830).

8) Regnault, geb. 1810 in Aachen; gest. 19. Januar 1878 zu Paris.

(permanenten) [?], wie atmosphärische Luft, Stickstoffgas und Wasserstoffgas in aller Strenge Gültigkeit besitzt. Dabei prophezeite Regnault zugleich das im Voraus, was bereits Seite 2, Note 1 über die jüngsten Versuche von Pictet und Cailletet mitgetheilt wurde, daß nämlich alle Gase, sobald nur ein gehörig großer Druck und eine entsprechend niedrige Temperatur in Anwendung gebracht wird, flüssig und beziehungsweise fest werden können. Regnault dehnte, beiläufig gesagt, seine Versuche bis zu einem Drucke von 36 Atmosphären aus.

Natterer[1]) in Wien unterwarf im Jahre 1854 das Wasserstoff-, Sauerstoff- und Stickstoffgas einer Pressung von 2790 Atmosphären, wobei sich herausstellte, daß das Mariotte'sche Gesetz absolut falsch wird, wenn man die Pressung von 100 Atmosphären überschreitet.

Folgende Tabelle ist ein Auszug der in untenstehender Quelle[2]) enthaltenen Angaben. Dabei enthalten die mit (1) überschriebenen Columnen die Zahlen, um welche das ursprüngliche Gasvolumen zusammengedrückt wurde. Die durch (2) markirten Columnen zeigen die beobachteten in Atmosphären ausgedrückten Pressungen. Endlich finden sich in der 3. Columne die Differenzen der letztern Pressungen.

Wasserstoff			Sauerstoff			Stickstoff		
Volum. (1)	Atm. (2)	Differ. (3)	Volum. (1)	Atm. (2)	Differ. (3)	Volum. (1)	Atm. (2)	Differ. (3)
0	0	8	0	0	7	0	0	5
8	8		7	7		5	5	
18	18	10	17	17	10	15	15	10
28	28		27	27		25	25	
68	68	10	157	157	10	75	75	10
78	78		167	167		85	85	
128	134	12	227	232	11	225	240	12
138	146		237	243		235	252	
238	274	13	277	287	11	275	306	15
248	287		287	298		285	321	
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Zur Ergänzung der bereits S. 2 gemachten Angaben über das Tropfbarflüssigmachen der früher als permanent bezeichneten Gase werde hier bemerkt, daß in der so eben notirten Quelle (a. a. O. S. 99) Pictet nachweist, daß er Wasserstoffgas, unter dem Drucke von 650 Atmosphären und bei gleichzeitiger Anwendung einer Temperatur von — 140 Graden des Celsius-Thermometers, tropfbar flüssig gemacht habe.

Ueber die Bemühungen neuerer Mathematiker (Dupré, Recknagel, Reye u. m. A.), die ursprünglichen Formeln, welche das combinirte Mariotte-Boyle'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz darstellen, derartig umzugestalten, daß sie die hervorgehobenen Abweichungen von den Versuchsresultaten mit in sich fassen, berichtet ausführlich mein Neffe,

[1]) Natterer, geb. zu Laißenburch bei Wien 9. November 1787, gest. am 17. Juni 1843.

[2]) Archives des sciences physiques et naturelles, Nr. 241, 15. Janvier 1878, Pg. 22, in einem Memoire Raoul Pictet's „Sur la Liquéfaction de l'Oxygène".

Herr Professor Rühlmann in Chemnitz, in seinem Handbuche der mechanischen Wärmetheorie, Bd. 1, S. 263 bis S. 265 (s. Noten). Leider entspricht noch keine dieser Formeln dem beabsichtigten Zwecke.

Der Aufeinanderfolge des im vorstehenden Paragraphen behandelten Stoffes entsprechend, gelangen wir jetzt zu geschichtlichen Notizen über die Wärmecapacitäten oder die specifischen Wärmen elastischer Flüssigkeiten [1]).

Seit einem Jahrhundert ist eine große Anzahl ausgezeichneter Physiker mit Untersuchung der specifischen Wärme der elastischen Flüssigkeiten beschäftigt gewesen [2]). Crawfurd, Lavoisier und Laplace, Dalton, Clément-Desormes, de la Roche und Bérard, Haycraft, Gay-Lussac, Dulon und Petit, de la Rive, Marcet und in allerjüngster Zeit ganz besonders wieder Regnault.

Wir greifen indeß vorher für unsere Zwecke in den geschichtlichen Notizen zuerst etwas weiter zurück und gedenken vor Allem des Holländers Boerhaave [3]), welcher die ersten, wenn auch sehr unbestimmten Wahrnehmungen bezüglich der Wärmecapacität machte. Zu einer festeren Begriffsbestimmung dieser Erscheinung gelangte jedoch erst der Schotte Black [4]) und sein Schüler Irvine [5]). Black war es, welcher zuerst erklärte, daß die Wirkung einer gegebenen Wärmemenge auf die Temperatur eines Körpers nicht allein von der Masse des Körpers, sondern auch von dem Stoffe abhänge, aus welchem der Körper besteht. Irvine gab dieser Eigenschaft den Namen „Wärmecapacität". Die Bezeichnung „specifische Wärme" ist später (1784) von Gadolin in Abo eingeführt worden [6]).

Die Bemühungen von Black und Irvine wurden jedoch erst später durch Crawfurd [7]) (in dessen Chemical Essai's) bekannt, nachdem

[1]) Wie manche Schriftsteller unterscheidet auch Maxwell in seiner „Theorie der Wärme" (deutsche Bearbeitung von Auerbach, Breslau 1877, S. 60) Wärmecapacität von specifischer Wärme. Beide Begriffe werden hier wie folgt definirt:

a. „Die Wärmecapacität eines Körpers ist die Anzahl von Wärmeeinheiten, welche erforderlich sind, um die Temperatur dieses Körpers um einen Grad zu erhöhen."

b. „Die specifische Wärme eines Körpers ist das Verhältniß der Wärmemenge, welche erforderlich ist, die Temperatur dieses Körpers um einen Grad zu erhöhen, zu derjenigen Wärmemenge, welche erforderlich ist, um ein gleiches Gewicht Wasser um einen Grad zu erwärmen."

[2]) Regnault, Untersuchungen über die specifische Wärme der elastischen Flüssigkeiten. Comptes rendus T. XXXVI, Pg. 676, und daraus in Poggend. Annalen, Bd. 89 (1859), S. 335 und S. 344.

[3]) Boerhaave, geb. 1668 bei Leyden; gest. 1738 in Leyden, woselbst B. bis zu seinem Tode Professor der Medicin, Botanik und Chemie war. B. war zugleich einer der berühmtesten Aerzte seiner Zeit. Auf seinem Grabdenkmale, welches ihm die Stadt Leyden (in der Peterskirche) errichten ließ, befindet sich B.'s Lieblingsspruch: „Simplex sigillum veri". Außerdem hat dies Denkmal die bescheidene Inschrift: „Salutifero Boerhavii genio sacrum".

[4]) Black, geb. 1728 zu Bordeaux von schottischen Aeltern; gest. 1799. B. war als Mediciner und Chemiker nacheinander Professor an den Universitäten Glasgow und Edinburg.

[5]) Irvine, geb. (?); gest. 1787 in Glasgow.

[6]) Maxwell, „Theorie der Wärme". Breslau 1877, S. 60.

[7]) Crawfurd, geb. 1749 in Irland; gest. 1795 in England, zu Limington.

Wilke[1]) die Aufgabe im Jahre 1772 in weiterem Umfange behandelt hatte und dessen erhaltene Resultate um so größeres Aufsehen machten, je entschiedener sie in dem Streite über das eigentliche Wesen der Wärme waren.

Von den betreffenden Arbeiten später folgender Experimentatoren, zur Ermittlung der specifischen Wärme der Gase, sind zunächst die von Lavoisier[2]) und Laplace[3]) von Wichtigkeit. Diese Physiker bestimmten namentlich (1780) die specifische Wärme der atmosphärischen Luft und des Sauerstoffes mittelst des Eiscalorimeters (Eisschmelzmethode) worüber die in der untenstehenden Note ([4]) verzeichneten Quellen Auskunft geben.

Die seiner Zeit vollständigste Arbeit über diesen Gegenstand war jedoch die von de la Roche und Bérard, welche 1813 von der Pariser Academie der Wissenschaften gekrönt wurde[5]). Aus diesen Versuchen ging vor Allem hervor, daß die specifische Wärme der Gase nicht gleich für alle ist, sie möge nun auf Volumen oder auf Gewichte bezogen werden, so wie daß die specifische Wärme der atmosphärischen Luft 0,2669 betrage.

Regnault fand durch seine Versuche, welche gegenwärtig immer noch alle anderen an Umfang und Genauigkeit übertreffen, einen kleineren Werth für die specifische Wärme der atmosphärischen Luft als de la Roche und Bérard, nämlich 0,23751.

Hervorgehoben muß hier werden, daß vorstehende Werthe nur die specifische Wärme der atm. Luft bei constantem Drucke, also nach unserer Bezeichnung oben S. 131, §. 61, $c_p = 0{,}23751$ ist und daß man die specifische Wärme der Gase bei constantem Volumen (unser c_v nach S. 131, §. 61) auf directem Wege durch Versuche bis jetzt nicht zu ermitteln vermochte[6]).

Dafür hat man sich damit beschäftigt, das Verhältniß $\frac{c_p}{c_v} = n$ zu ermitteln.

---

[1]) Wilke, Neue schwedische Abhandlung. Leipzig 1784, T. II, Pg. 84. Gehler's Physik. Wörterbuch, Bd. 10 (1. Abth.), S. 668.

[2]) Lavoisier, geb. 1743 zu Paris; gest. 1794 zu Paris.

[3]) Laplace (s. S. 5, Note 10). Ueber die Bestimmung der specifischen Wärmen mittelst des Eiscalorimeters sehe man namentlich Gehler's Physik. Wörterbuch, Bd. 10 (1. Abth.), S. 673.

[4]) Man kann hauptsächlich drei Methoden zur Bestimmung der specifischen Wärme der Körper unterscheiden. Die (ältere) Mengungsmethode, die Eisschmelzmethode (das Calorimetrische Verfahren) und die Abkühlungsmethode. Alle drei Methoden werden ausführlich erörtert in folgenden neueren Werken: Jamin-Bouty, Cours de Physique. Troisième Édition (Paris 1878), Tome Deuxième, Seconde Fascicule, Pg. 54 ff. Wüllner, Lehrbuch der Experimental-Physik, 2. Auflage, Bd. III, S. 392 ff. Mousson, „Die Physik auf Grundlage der Erfahrung". Zweite Auflage, Zweiter Band, S. 66 ff.

[5]) Untersuchungen über die spec. Wärmen der elastischen Flüssigkeiten von Herrn V. Regnault in Poggend. Annalen der Physik (nach dem Comptes rendus, T. XXXVI, Pg. 676), Jahrg. 1853, Bd. 83, S. 335. Ausführlich aber in den Mémoires de l'Académie etc. Tome XXVI. — Aus letzterer Quelle mit vortrefflichen Abbildungen begleitet im 3. Bande (Dritte Auflage) von Jamin-Bouty's „Cours de physique", Pg. 61.

[6]) Man sehe deshalb unter Andern den Artikel „Wärme" in Marbach's „Physikalisches Lexikon", (Zweite Auflage), Bd. 6, S. 696.

Nach des Verfassers Wissen war es Laplace, der zuerst in seiner Mécanique céleste [1]), bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit $= u$ in atmosphärischer Luft, zeigte, daß man statt der Newton'schen Formel für u, nämlich $u = \sqrt{gpv}$ (die früheren Bezeichnungen beibehaltend) setzen müsse $u = \sqrt{ngpv}$, d. h. np statt p in die Rechnung einzuführen habe. Statt letzterer Gleichung kann man nach Nr. 6, S. 113, daß $pv = RT$ ist, auch schreiben:

$$u = \sqrt{ngRT}.$$

Da man nun diese Schallgeschwindigkeit erfahrungsmäßig durch ganz andere Versuche (für t^0 Temp. in Metern zu $333 \sqrt{1 + \delta t}$) kennt, so erhellt, daß sich n aus vorstehender Gleichung berechnen läßt. Daß man jetzt das Verhältniß $n = \frac{c_p}{c_v}$ ($n = 1{,}410$ für atm. Luft) besser und einsichtsvoller mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie ermittelt, und daß in dieser Beziehung namentlich die Verfahrungsweisen von Clausius [2]) und die von Röntgen [3]) zu empfehlen sind, wurde bereits S. 133 und 134 hervorgehoben.

Die mechanische Wärmetheorie giebt namentlich auch über den Grund Rechenschaft, weshalb die specifische Wärme c_p größer als die c_v ist, während man dies früher einfach als Erfahrungssatz hinnahm oder mit dem unklaren Ausdruck von frei oder latent werdender Wärme zu erklären suchte [4]).

Die Nothwendigkeit der Einführung von np statt p in die Newtonsche Formel für die Schallgeschwindigkeit erklärt Clausius im Sinne von Laplace in folgender Weise [5]).

Das Mariotte'sche Gesetz gilt (bekanntlich) nur, wenn die Dichtigkeitsänderung beiconstanter Temperatur vor sich geht. Dieses ist aber bei den Schallschwingungen nicht der Fall, sondern bei jeder Verdichtung findet gleichzeitig Erwärmung und bei jeder Verdünnung Abkühlung statt. Demgemäß muß bei der Verdichtung der Druck stärker zunehmen und bei der Verdünnung der Druck stärker abnehmen, als es nach dem Mariotte'schen Gesetze sein sollte. Laplace benutzt daher in der bereits wiederholt citirten Arbeit [6]), zur Lösung der Frage über die Geschwindigkeit des Schalls die Gleichung $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n$.

---

[1]) In den „Oeuvres de Laplace“, Tome Cinquième, findet sich diese wichtige Abhandlung im 12. Buche, Capitel III, S. 143, unter der Ueberschrift „De la vitesse du son et du mouvement des fluides elastiques“.

[2]) Clausius, Die mechanische Wärmetheorie. Bd. 1, Zweite Auflage, S. 52, unter der Ueberschrift „Verhältniß der beiden specifischen Wärmen“.

[3]) Röntgen. Spec. Wärme einiger Gase, bei constantem Drucke und bei constantem Volumen. Poggend. Annalen, Bd. 148 (1873), S. 580 und 624.

[4]) Dr. Jochmann in seinem „Beitrag zur Theorie der Gase“ in der Schlömilch'schen „Zeitschrift für Mathematik und Physik“, 5. Jahrg. (1860), S. 28 ff. Man sehe auch den Abschnitt: Die Bestimmung des Verhältnisses $n = \frac{c_p}{c_v}$, im ersten Bande, S. 273, Nr. 12, der mechanischen Wärmetheorie meines Neffen, des Herrn Professor Richard Rühlmann in Chemnitz, wo n nach verschiedenen anderen Methoden berechnet ist.

[5]) Clausius a. a. O., S. 53.

[6]) a. a. O., Vol. V, Pg. 155.

Letztere von Laplace zuerst aufgestellte Gleichung ist bald nachher von Poisson in verschiedenen Abhandlungen über Dichtigkeit, Elasticität und Wärmecapacität der Gase[1]), sowie in seinem Lehrbuche der Mechanik, wovon die erste Auflage 1811 erschien, benutzt worden, was manche Schriftsteller dazu veranlaßte, diese Darstellung des Mariotte'schen Gesetzes unter besonderer Voraussetzung (daß die Druckcurve nicht die isothermische §. 58, sondern die adiabatische §. 60 ist) das Poisson'sche Gesetz zu nennen. Letzterer Umstand ist offenbar nicht Poisson's Schuld, und dürfte hiernach eine Art Abfertigung, welche Jamin in der dritten Auflage (Tome II, Pg. 117*) seines „Cours de Physique" dem Poisson, noch nach seinem Tode, für nothwendig zu geben hält, mindestens als ungerechtfertigt zu bezeichnen sein[2]).

Seite 124 wurde es vorgezogen, für das fragliche Gesetz die von Redtenbacher eingeführte Benennung „das potenzirte Mariotte'sche Gesetz" zu adoptiren.

Wir sind hier zu einer Stelle gelangt, an welcher wir zunächst auf die Seite 133 aufgestellten Berechnungsweisen des mechanischen Wärmeäquivalents aus der specifischen Wärme des Gases nach Weisbach und Clausius hinweisen müssen, zugleich aber als Ergänzung die geschichtlichen Notizen über den Ausspruch des Grundsatzes: „Wärme und Arbeit sind äquivalent" und über die Bestimmung des Arbeitsäquivalentes (den Arbeitswerth) oder des mechanischen Wärmeäquivalentes, liefern wollen.

Rumford[3]) war 1798 der erste, welcher zu dem Schlusse gelangte, daß man durch mechanische Arbeit Wärme erzeugen könne und zwar zufolge von Beobachtungen beim Ausbohren von Geschützrohren in der Kanonenbohrwerkstatt zu München[4]). Der Ansicht Rumford's schloß sich, durch eigne Experimente (Zusammenreiben von Eisstücken) unterstützt, Humphry Davy[5]), einer der berühmtesten Chemiker seiner Zeit, rasch an[6]). Entscheidend begründet wurde die Frage nach der Verhältnißzahl zwischen Wärme und Arbeit in der Zeit von 1842 bis 1850, nach einander von einem Deutschen, Dr. Mayer in Heilbronn[7]), einem Dänen Colding[8]) in Kopenhagen und dem Engländer Joule[9]) in Manchester.

---

[1]) Annales de Chimie et Physique, Tome XXIII, Pg. 337, und XIV Cahier, Pg. 360 du Journal de l'École Polytechn.

[2]) Es dürfte für unsere geschichtlichen Notizen von Interesse sein, Jamin's Urtheil hier wörtlich wieder zu geben, welches folgendermaßen lautet: „Poisson, auquel certains auteurs attribuent cette formule, n'en a fourni qu'une démonstration inexacte."

[3]) Rumford (Benjamin Thompson, Graf v.), geb. 1752 zu Rumford in Nordamerika, gest. zu Auteuil 1814.

[4]) An Inquiry concerning the Source of the Heat, which is excited by Friction. Phil. Transact. für das Jahr 1798, Bd. XVIII, Pg. 286. — Wir benutzen die Gelegenheit und machen auf Dr. Berthold's Schrift aufmerksam: „Rumford und die mechanische Wärmetheorie". Heidelberg 1875.

[5]) Humphry Davy, geb. 1779 zu Penzance (Cornwall); gest. 1829 zu Genf.

[6]) Davy, „Elements of Chemical Philosophy", Pg. 94. Ferner Zeuner, „Mechan. Wärmetheorie", 2. Auflage, S. 14.

[7]) Julius Robert Mayer, geb. 25. Nov. 1814 in Heilbronn; gest. 20. März 1878.

[8]) Colding (Wasserbauingenieur der Stadt Kopenhagen), geb. 1815 auf Seeland.

[9]) Joule, geb. 1818 bei Manchester (Brauer in Salford und Mitglied der Royal Society).

Die Priorität in der Reihenfolge betreffender Untersuchungen und Veröffentlichungen derselben gebührt zweifellos Dr. Mayer. Dieser wurde auf den wichtigen Satz von der erwähnten Aequivalenz durch Beobachtungen geführt, die er in Java als Schiffsarzt 1840 machte, indem sich dort die Farbe des venösen Blutes der Europäer viel heller zeigte als dies in Europa der Fall gewesen war, was er bald als eine Folge der höheren Temperatur in der heißen Zone erkannte. Diese Beobachtung wurde für ihn der Ausgangspunkt zur Entdeckung des Grundprincips von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit, (des sogenannten ersten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie)[1]). Dabei berechnete Mayer das mechanische Wärmeäquivalent, dem Grundprincipe nach, wie Clausius und Weisbach, worüber vorher Seite 133 bereits Auskunft gegeben wurde. Da jedoch Mayer (seiner Zeit, 1842) nur die älteren Angaben über die specifische Wärme der Luft benutzen konnte, so fand er das Aequivalent zu klein, nämlich nur zu 365 Meter-Kilogramm[2]). Die ersten völlig zuverlässigen Bestimmungen des mechanischen Wärmeäquivalentes sind durchaus das Verdienst Joule's. Joule hat die Wärme unter verschiedenen Umständen gemessen, welche durch Reibung erzeugt wurde, wenn er feste Körper (ein messingnes Schaufelrad) im Wasser gehörig umdrehte, eben so Eisen auf Quecksilber und endlich auch Gußeisen auf Gußeisen reiben ließ und den hierzu erforderlichen Arbeitsaufwand gleichzeitig durch das Auf- und Absteigen von an Schnüren aufgehangenen Gewichten bestimmte. Auf diesem Wege gelangte Joule[3]) zu nachfolgenden Resultaten für das mechanische Wärmeäquivalent $= E$:

	Meter-Kilogramm	
Beim Reiben von Messing und Wasser:	424,90	
„ „ „ Eisen auf Quecksilber	425,0	Erste Versuchsreihe.
	426,3	Zweite „
„ „ „ Eisen auf Eisen . .	426,7	Erste „
	425,6	Zweite „
Mittelwerth	$425,6^{mk}$ [4]).	

Hieraus erklärt sich unsere, Seite 129 gemachte Annahme, $E = 425^{mk}$ zu setzen.

Von anderen, insbesondere den Experimentatoren zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes, welche bereits Seite 134 in einer

---

[1]) Ausführlich über diesen wichtigen Gegenstand berichtet Dr. Mayer selbst in seinem Werke „Die Mechanik der Wärme". Stuttgart 1874 (2. Auflage), S. 95.

[2]) Annalen der Chemie und Pharmacie von Wöhler und Liebig. 1842, Bd. LXII, Maiheft, Pg. 240.

[3]) Spengel, „Das mechanische Wärmeäquivalent". Gesammelte Abhandlungen von James Prescott Joule. Braunschweig 1872. Die Hauptarbeit Joule's findet sich in den Philosoph. Transact., for 1850, Pg. 1. Ins Deutsche übertragen findet sich diese Arbeit in Poggendorf's Annalen der Physik etc. Ergänzungsband IV, Leipzig 1854, S. 601—630.

[4]) Einen etwas größeren Werth für E, nämlich 460^{mk}, fand (1843) Joule, als er den Arbeitsaufwand zum Umdrehen eines electromagnetischen Rotationsapparates mit der in den Windungen desselben frei werdenden Wärmemenge verglich. (Man sehe hierüber die vorher genannte Schrift von Spengel „Das mechanische Wärmeäquivalent".)

tabellarischen Uebersicht genannt wurden, verdienen nach einander noch Hirn, v. Quintus und Favre ganz besondere Beachtung. Von den Versuchen Hirn's [1]) ist zuerst diejenige Reihe zu nennen, wo dieser Physiker und Ingenieur bemüht war, das mechanische Wärmeäquivalent durch Zusammenpressen von Blei zu ermitteln, indem er einen eisernen Balken von 350 Kilogr. Gewicht gegen ein circa 3 Kilogr. schweres Bleistück stoßen ließ. Indem Hirn die Arbeit (lebendige Kraft) berechnete, welche scheinbar beim Stoße verschwunden, in Wahrheit aber zur Erwärmung und Verdichtung des Bleies verwandt worden war, gelangte er zur Zahl 280,42 Meter-Kil., als Größe der auf das Zusammendrücken des Bleies aufgewandten Arbeit, während die producirte Wärmemenge sich zu 0,65955 Calorien ergab [2]). Hieraus folgte demnach

$$E = \frac{280,42}{0,65955} = 425,2^{mk}.$$

Bei einer anderen Reihe von Versuchen ermittelte Hirn den Werth E an der Dampfmaschine einer Baumwollspinnerei in der Umgegend von Colmar [3]). Hirn maß hierbei die Wärme des in den Cylinder der Maschinen tretenden Dampfes und ermittelte eben so die Wärmemenge des durch eingespritztes Wasser in Condensation verdichteten Dampfes. Letzteres Wärmequantum vom ersteren abgezogen, mußte der mechanischen Arbeit äquivalent sein, welche der Dampf auf den Kolben der Maschine übergetragen hatte.

In der That gaben die durch den Indicator am Cylinder gemessenen Arbeiten insofern überraschende Resultate, als bei Dampfmaschinen von circa 150 Maschinenpferden eine Menge Einflüsse auf die Richtigkeit des Resultates wirkten, die man vergeblich bekämpfte und die in Physicalischen Cabinetten (bei Versuchen im Kleinen) alle mehr oder weniger beseitigt werden können [4]). Der Mittelwerth aus neun Versuchen war $E = 398^{mk}$.

Einen fast gleichen Werth erhielt Herr Professor v. Quintus in Hannover [5]), nämlich $399,7^{mk}$, wobei jedoch hervorgehoben werden muß, daß dieser sorgfältige Experimentator eigentlich nur nachweisen wollte, daß die durch electrische Ströme erregte Wärme das Aequivalent der dabei verbrauchten Arbeit ist. Die zu solchem Zwecke nöthigen Messungen erforderten außerdem eine Menge von Fundamentalbestimmungen, die allerlei Fehlerquellen bildeten.

---

[1]) Hirn, geb. 1815 zu Logelbach im Elsaß.

[2]) Hirn, Théorie mécanique de la chaleur (2. Auflage), T. I, Pg. 85, und hieraus (wie das Original mit Abbildungen begleitet) in (meines Neffen) Prof. Richard Rühlmann „Mech. Wärmetheorie“, Bd. 1, S. 218.

[3]) Hirn a. a. O., Pg. 35 und Richard Rühlmann a. a. O., S. 200.

[4]) Diese Hirn'schen Versuche an einer größeren Dampfmaschine liefern insbesondere den Nachweis, welchen die mechanische Wärmetheorie verlangt, daß in allen Fällen, wo durch Wärme Arbeit geleistet wird, eine dieser Arbeit proportionale Wärmemenge verschwindet oder verbraucht wird. Clausius hat diesen Satz zuerst in voller Bestimmtheit ausgesprochen und theoretisch begründet.

[5]) „Ueber den numerischen Werth der Constante in der Formel für die electrodynamische Erwärmung von Metalldrähten“. Poggendorf's Annalen etc. Bd. 101 (1857), S. 69.

Zu den jüngsten bemerkenswerthen Ermittlungen des mechanischen Wärmeäquivalentes gehören die von Favre[1]) in Paris, wobei Wärme durch electromagnetische Maschinen entbunden wurde und worüber die unten notirte Quelle[2]), so wie mein Neffe, Herr Prof. Rühlmann in Chemnitz, in seinem Handbuche der mechanischen Wärmetheorie, Bd. 1, Seite 54 und Seite 109 berichtet. Favre bestimmte auf diesem Wege $E = 413{,}2^{mk}$, statt früher 426^{mk}.

Beim Schlusse vorstehender geschichtlicher Bemerkungen hält es der Verfasser für Pflicht, noch auf eine vortreffliche Arbeit von Clausius aufmerksam zu machen, welche betitelt ist: „Zur Geschichte der mechanischen Wärmetheorie“ und sich abgedruckt findet im 145. Bande (Jahrgang 1872), Seite 132 von Poggendorf's Annalen der Physik.

Nachdem sich hierin Clausius bemühte, die Rechte des Dr. Mayer in Heilbronn zu vertreten, tritt derselbe dem rücksichtslosen Verfahren Maxwell's entgegen, womit dieser die Verdienste der deutschen Physiker ignorirt. Dagegen schenkt Clausius den Arbeiten von Joule, Thomson[3]) und Rankine[4]) die gebührendste Anerkennung, wobei wir die Gelegenheit benutzen möchten, auch die beiden letztgenannten Physiker als verdienstvolle Männer um die mechanische Wärmetheorie zu bezeichnen. Noch andere Engländer haben übrigens die Anmaßungen Maxwell's nie getheilt, von denen in erster Linie John Tyndall zu nennen ist. In seinem Werke „Heat considered as a mode of motion“, deutsch herausgegeben von Helmholtz und Wiedemann, unter dem Titel „Die Wärme betrachtet als eine Art der Bewegung“[5]), wird (§. 41) bestimmt hervorgehoben, daß Dr. Mayer in Heilbronn im Jahre 1842 zuerst das mechanische Wärmeäquivalent berechnet habe und §. 83 hinzugefügt, daß dem Dr. Mayer das Recht nicht abgesprochen werden kann, als Mann von wahrem Genie in der ersten Reihe unter den Begründern der dynamischen Theorie der Wärme zu stehen. Uebrigens muß anerkannt werden, daß Maxwell in der vierten Auflage seiner „Theorie der Wärme“ sowohl Dr. Mayer's Priorität in der Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents (§. 41) anerkennt, als auch Clausius nicht mehr ignorirt, wie das u. A. die Paragraphen 43, 45, 174, 180 u. a. erkennen lassen.

Schließlich verbleibt dem Verfasser die große Freude noch, hier der deutschen Männer Zeuner, Gustav Schmidt und Grashof gedenken zu müssen, welche sich sowohl um das Verständniß der mechanischen Wärmetheorie, ganz besonders aber um deren Anwendung auf technische Fragen hoch verdient gemacht haben und deren betreffende Arbeiten vom Verfasser bei der Bearbeitung der 2. Auflage dieses Buches vielfach benutzt wurden.

---

[1]) Favre, geb. 1813 zu Lyon.

[2]) „Recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur“. Comptes rendus, Tome 45, Juillet-Decembre 1857, Pg. 337.

[3]) Thomson. (Weder von Sir William Thomson in Edinburg (?), noch von Professor James Thomson in Belfast, konnte der Verfasser das Geburtsjahr erfahren.)

[4]) Rankine, geb. 1820 zu Edinburgh; gest. 1871 in Glasgow (?).

[5]) Tyndall's oben bezeichnetes Werk kann, als ein Meisterstück populärer wissenschaftlicher Darstellung, nicht genug empfohlen werden.

§. 64.

Wasserdämpfe.

Dem Nachweise vorstehender Paragraphen entsprechend, daß ganz streng genommen, keinerlei Gase existiren, welche dem Mariotte-, Gay-Lussac'schen Gesetze vollständig entsprechen, daß dies vielmehr nur bei ideellen Gasen der Fall ist; erweitern wir auch den bereits §. 2, Seite 2 erörterten Begriff Dämpfe, speciell Wasserdämpfe, dahin, daß wir darunter die Gasform solcher Körper verstehen, deren Condensationspunkt innerhalb der uns zugänglichen Temperaturen und Drücken (Spannungen) liegen.

Dem heutigen Standpunkte der Physik gemäß haben wir auch in der Technik zweierlei Arten von Wasserdämpfe zu unterscheiden, nämlich gesättigten und ungesättigten oder überhitzten Dampf.

Bei den gesättigten Dämpfen ist Spannung und Dichte nicht von dem Volumen, sondern einzig und allein von der Temperatur abhängig. Wenn bei diesen Dämpfen die Temperatur constant bleibt und hinreichend Flüssigkeit zur Bildung neuer Dämpfe vorhanden ist, wird zwar eine Raumvergrößerung die sofortige Erzeugung neuer Dämpfe zur Folge haben, allein wenn sich dieser Raum ganz mit Dampf der entsprechenden Temperatur gefüllt (gesättigt) hat, wird Spannung und Dichte genau wieder die ursprünglich vorhandene sein. Bei Verminderung des Raumes schlägt sich genau eben so viel Dampf nieder, als erforderlich ist, um Spannung und Dichte abermals der unveränderlich gelassenen Temperatur proportional zu machen.

Erhöht man endlich die Temperatur und läßt den Raum unverändert, so erzeugt sich ebenfalls neuer Dampf, aber auch nur so viel, als erforderlich ist, um gedachten Raum damit zu sättigen, d. h. wiederum jenes bestimmte Verhältniß zwischen Temperatur und Spannung herzustellen.

Derartige Dämpfe befinden sich im Maximum ihrer Dichte, es sind gesättigte Dämpfe.

Dämpfe, die sich nicht im Maximum ihrer Dichte befinden, nennt man ungesättigte oder überhitzte Dämpfe. Ueberhitzter Dampf ist zugleich solcher, welcher bei derselben Spannung eine größere Temperatur und ein größeres specifisches Volumen (§. 54, Seite 112) hat, als gesättigter Dampf. Ueberhitzter Dampf muß stets von der tropfbaren Flüssigkeit, woraus er gebildet ist, getrennt sein, und nähert sich derselbe in seinem Verhalten dem eines permanenten (idealen) Gases um so mehr, je mehr seine Temperatur erhöht wird.

§. 65.

Von der Spannkraft (Expansivkraft) gesättigter Wasserdämpfe.

Unter den vielen empirischen Formeln[1]), welche man als Ausdrücke für die Spannkraft des Wasserdampfes, die, wie schon

[1]) Ueber die (unglaublich) große Zahl derartiger Formeln wird in einem später folgenden Paragraphen berichtet, der wieder (für das Gebiet der Dämpfe) mit „Geschichtliche Notizen“ überschrieben ist.

erwähnt, nur eine Function der Temperatur ist, sind es besonders **zwei**, welche für unsere technischen Zwecke von Bedeutung und von besonderem Werth sind.

Die erste seiner Zeit von Tredgold[1]) aufgestellte Formel ist:

$$i = \left(\frac{75 + t}{175}\right)^6,$$

worin t die Temperatur und i die correspondirende Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes in Atmosphären ausdrückt.

Diese Formel zeichnet sich so sehr durch Einfachheit aus, daß sie für technische Zwecke, namentlich wenn es sich um (rasche) angenäherte Angaben der Temperatur handelt, nothwendig hier Platz finden mußte.

Die zweite der erwähnten (empirischen) Formeln hat Regnault nach seinen sorgfältigen, umfangreichen Versuchen aufgestellt und wird diese mit einigen Modificationen als die zur Zeit empfehlenswertheste bezeichnet. Regnault[2]) fand:

$$\text{Lg}\, F = a - b\alpha^x - c\beta^x.$$

Hierin ist F die Dampfpressung in Millimetern Quecksilbersäule (§. 52) ausgedrückt, also $i = \frac{F}{760}$, während die übrigen Größen folgenden Werthen entsprechen: $x = t + 20$;

$$a = 6{,}2640348;$$
$$\text{Lg}\, b = 0{,}1397743; \quad \text{Lg}\, \alpha = 1{,}994049292;$$
$$\text{Lg}\, c = 0{,}6924351; \quad \text{Lg}\, \beta = 1{,}998343862.$$

Die Uebereinstimmung dieser Formel mit den Beobachtungen ist aus der untenstehenden Tabelle in Note ([3]) zu entnehmen.

---

[1]) Tredgold, geb. 1788 zu Brandon bei Durham, gest. 1829 zu London. Sein Hauptwerk ist: The steam engine (übersetzt von Mellet unter dem Titel „Traité des machines a vapeur“). London 1827, Pg. 101.

[2]) „Relation des expériences etc.“ Tome XXI (1847), Pg. 606. Dieser höchst werthvollen Abhandlung sind namentlich mehrere große Kupfertafeln beigefügt, worauf die Apparate und Instrumente Regnault's abgebildet sind, welche Regnault bei seinen Versuchen benutzte.

[3])

Temperatur = t mit dem Luftthermometer gemessen.	Beobachtete Spannung in Millimetern Quecksilbersäule ausgedrückt.	Differenz mit der Formel.
— 20	0,91	+ 0,00
— 10	2,08	+ 0,11
0	4,60	+ 0,12
+ 20	17,59	+ 0,09
+ 50	91,98	— 0,04
+ 70	233,09	— 0,02
+ 120	1489,00	— 2,28
+ 150	3572,00	— 9,28
+ 200	11660,00	— 29,00
+ 230	20915,00	— 11,88

In der S. 153 folgenden Tabelle für gesättigten Wasserdampf finden sich nach Berechnungen von Zeuner[1]) und einigen späteren Ergänzungen von Grashof[2]) die Dampfspannungen in Atmosphären $= i$ verzeichnet, welche bestimmten Temperaturen t entsprechen.

§. 66.

Gesammtwärme, Flüssigkeitswärme. Innere und äußere Verdampfungswärme. Dampfwärme.

Nach Regnault[3]) ist Gesammt-Wärmemenge $= Q$, welche man der Gewichtseinheit ($=$ 1 Kilogramm) Wasser von Null Grad Temperatur zuzuführen hat, um dasselbe unter verschiedenem Drucke in gesättigten Dampf von t^0 Temperatur zu verwandeln:

$$(1) \quad Q = 606{,}50 + 0{,}3050\,t.$$

Nach §. 63, S. 136 besteht Q aus drei Theilen, d. h. erstens aus der Wärme, welche zur Vermehrung der Schwingungsarbeit, d. h. zur Temperaturerhöhung des Wassers dient; zweitens aus der Wärme, welche zur Distanzvergrößerung der Moleculen und zur Ueberwindung der Cohäsion, welche sie zusammenhält, dient, und drittens aus der äußeren Arbeit, welche hier während der Dampfbildung verrichtet werden muß, und bei diesem Processe verschwindet.

Wir bezeichnen die zwei ersten dieser Wärmetheile beziehungsweise mit q und ϱ und setzen für die gedachte äußere Arbeit nach §. 62 vorerst den Werth $A\int pdv$, so daß sich ergiebt:

$$(2) \quad Q = q + \varrho + A\int pdv.$$

Hierbei erkennt man leicht, daß q nichts Anderes als der bereits §. 61, S. 131 gefundene Werth ist, welcher hier erforderlich wird, um das Wasser erst von Null Grad bis t Grad zu erwärmen, bevor die Dampfbildung eintritt.

Statt des Werthes q in IV, S. 131, setzen wir hier nach Clausius[4]), als hinlänglich genau, den einfacheren Ausdruck

$$(3) \quad q = 1{,}013\,t,$$

und nennen überdies q die Flüssigkeitswärme.

Den anderen Theil $= \varrho$ der Wärme, welcher zu innerer Arbeit verwandt wird, der Zuwachs an Körperwärme beim Uebergange aus dem flüssigen in den dampfförmigen Zustand, nennen wir nach Zeuner die innere Verdampfungswärme und berechnen dieselbe aus der von letztgenanntem Autor aufgestellten Gleichung:[5])

$$(4) \quad \varrho = 575{,}40 - 0{,}791\,t.$$

Für das dritte Glied in (2), der Wärmewerth der Expansionsarbeit, welche bei der Verdampfung verrichtet wird, erhält man leicht

---

[1]) Mech. Wärmetheorie, Zweite Auflage, Seite 250 ff.

[2]) Theoret. Maschinenlehre, Bd. 1, S. 153 ff.

[3]) Relation des expériences etc. Mémoires de l'Académie, Tome XXI (1847), Pg. 685 unter der Ueberschrift: „Mémoire sur les chaleurs latentes de la vapeur aqueuse a saturation sous divers pressions." Die Gleichung (1) findet sich zuerst auf S. 726 der Abhandlung.

[4]) Die mechanische Wärmetheorie. Zweite Auflage, S. 281.

[5]) Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Zweite Auflage, S. 283.

$$A\int p dv = Ap\ (v - w),$$

wenn p den constanten Druck des gesättigten Dampfes bezeichnet, während v das specifische Volumen $v = \frac{1}{\varDelta}$ (nach §. 54, S. 112) des gesättigten Dampfes und w das specifische Volumen des Wassers, also $w = 0{,}001$ Cubikmeter ist.

Denkt man sich nun einen Cylinder und in demselben einen Kolben vom Querschnitte $= a$, unter diesem Kolben aber, auf dem Boden des Cylinders, ein Kilogramm Wasser von Null Grad Temperatur, so ist w das Volumen dieses Wassers. Erzeugt man nun aus diesem Wasser gesättigten Dampf von p Kilogramm Druck pro Quadratmeter gebildet, so wird sich das Wasservolumen w in das Dampfvolumen v verwandeln und eine Arbeit ausgeübt werden, welche, bei constant bleibendem p, offenbar $p\ (v - w)$ ist. Dieser Arbeit entspricht aber ein Wärmequantum

$$\frac{p\ (v - w)}{E} = Ap\ (v - w).$$

Wir bezeichnen $v - w$ mit u und erhalten

$$(5) \quad A\int p dv = Apu.$$

Zur Berechnung von Apu gelangt man folgendermaßen:

Es ist zunächst nach (2)

$$(6) \quad Apu = Q - q - \varrho,$$

also wenn man $Q - q = r$ setzt, nach (1) und (3)

$$r = 606{,}50 + 0{,}3050\,t - 1{,}013\,t, \text{ d. i.}$$

$$(7) \quad r = 606{,}5 - 0{,}708\,t.$$

Hiernach aber $Apu = r - \varrho$, d. i. mittelst der Werthe in (4) und (7):

$$(8) \quad Apu = 31{,}10 + 0{,}083\,t.$$

Die in nachfolgender Tabelle für Apu berechneten Werthe weichen von denen der Formel (8) etwas ab, da sie mittelst der Zeuner'schen Gleichung[1]) berechnet wurden:

$$(9) \quad Apu = 31{,}1 + 1{,}096\,t - q.$$

Zum weiteren Verständniß der erwähnten Tabelle ist noch zu bemerken, daß die letzte, mit $\varDelta$ überschriebene Columne die den Temperaturen und Pressungen correspondirende specifische Dichte, oder das specifische Gewicht des gesättigten Wasserdampfes verzeichnet und daß die betreffenden Tabellenwerthe mittelst der Gleichung berechnet sind:

$$(10) \quad \varDelta = \frac{1}{u + 0{,}001},$$

(der reciproke Werth von $v = u + w = u + 0{,}001$, wenn man unter v das specifische Volumen versteht).

Zeuner entwickelt in seinen Grundzügen der mechanisehen Wärmetheorie[2]) eine für practische Zwecke sehr brauchbare Formel für $\varDelta$, nämlich:

$$(11) \quad \varDelta = 0{,}6061\ (i)^{0{,}9393},$$

---

[1]) Mech. Wärmetheorie, 2. Aufl., S. 284.

[2]) a. a. O., S. 294.

worin i (unseren obigen Werth) die Anzahl der Atmosphären bezeichnet, welche der jedesmaligen Temperatur des gesättigten Wasserdampfes entsprechen.

Hinsichtlich der Werthe $\frac{\varrho}{u}$ in der 7. Columne unserer Tabelle ist zu bemerken, daß von diesem Quotienten häufig Gebrauch gemacht werden muß, wie sich schon bei Lösung der technischen Aufgabe des folgenden Paragraphen zeigen wird. Uebrigens giebt dieser Quotient (nahezu) auch an, wie viel Calorien für 1 Cubikmeter Dampf unter verschiedenen Spannungen zur inneren Verdampfungswärme erforderlich sind.

Schließlich ist noch darauf aufmerksam zu machen, daß, weil beim Verdampfungsprocesse die der verrichteten äußeren Arbeit entsprechende Wärmemenge Apu, also die äußere latente Wärme verschwindet, von der ganzen Wärmemenge Q im gesättigten Dampfe nur noch die Wärmemenge $Q - Apu$ zurückgeblieben ist, welchen Rest wir mit Zeuner[1]) mit J bezeichnen und **Dampfwärme** nennen.

Der Werth

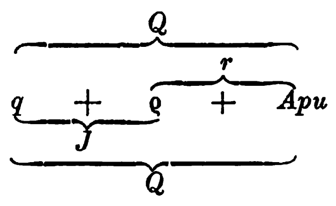
$$(12) \quad J = Q - Apu$$

giebt sonach an, wie viel Calorien Wärme in der Gewichtseinheit von gesättigtem Dampf gewissen Druckes p mehr enthalten sind, als in der Gewichtseinheit Flüssigkeit von 0° Temperatur.

Aus der Verbindung von (5) mit (12) folgt endlich noch

$$(13) \quad J = q + \varrho.$$

Zur Uebersicht geben wir folgendes Schema, über den Zusammenhang der sechs Größen Q, q, ϱ, Apu, J und r, woraus also erhellt, wie die Wärme bei der Bildung gesättigten Wasserdampfes verwendet wird.



In Worten ausgedrückt also:

Gesammtwärme

Verdampfungswärme

Flüssigkeitswärme + innere Verdampfsw. + äußere Verdampfsw.

Dampfwärme

Gesammtwärme.

---

1) Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. 2. Auflage, S. 270.

Tafel
für gesättigte Wasserdämpfe.

1 Dampfspannung in Atmosphären.	2 t	3 q	4 ϱ	5 Apu	6 u	7 $\frac{\varrho}{u}$	8 $\varDelta$
0,02	17,83	17,838	561,296	32,804	67,303	8,3398	0,0149
0,04	29,35	29,375	552,184	33,893	34,769	15,882	0,0288
0,06	36,56	36,601	646,481	34,569	23,641	23,116	0,0423
0,08	41,92	41,977	542,241	35,067	17,987	30,146	0,0556
0,10	46,21	46,282	538,848	35,464	14,552	37,029	0,0687
0,12	49,83	49,917	535,984	35,797	12,241	43,786	0,0817
0,15	54,37	54,477	532,393	36,213	9,9063	53,743	0,1009
0,2	60,45	60,589	527,584	36,764	7,5428	69,945	0,1326
0,3	69,49	69,687	520,433	37,574	5,1393	101,27	0,1945
0,4	76,25	76,499	515,086	38,171	3,9157	131,54	0,2553
0,5	81,71	82,017	510,767	38,637	3,1708	161,08	0,3153
0,6	86,32	86,662	507,121	39,045	2,6703	189,91	0,3743
0,7	90,32	90,704	503,957	39,387	2,3088	218,28	0,4329
0,8	93,88	94,304	501,141	39,688	2,0357	246,18	0,4910
0,9	97,08	97,543	498,610	39,957	1,8218	273,69	0,5486
1,0	100,00	100,500	496,300	40,200	1,6495	300,88	0,6059
1,1	102,68	103,216	494,180	40,421	1,5078	327,75	0,6628
1,2	105,17	105,740	492,210	40,626	1,3892	354,31	0,7193
1,3	107,50	108,104	490,367	40,816	1,2883	380,63	0,7756
1,4	109,68	110,316	488,643	40,993	1,2015	406,69	0,8316
1,5	111,74	112,408	487,014	41,159	1,1259	432,56	0,8874
1,6	113,69	114,389	485,471	41,315	1,0596	458,16	0,9429
1,7	115,54	116,269	484,008	41,463	1,0008	483,62	0,9982
1,8	117,30	118,059	482,616	41,602	0,9484	508,87	1,0533
1,9	118,99	119,779	481,279	41,734	0,9013	533,98	1,1083
2,0	120,60	121,417	480,005	41,861	0,8589	558,86	1,1629
2,1	122,15	122,995	478,779	41,981	0,8203	583,66	1,2176
2,2	123,64	124,513	477,601	42,096	0,7852	608,25	1,2719
2,3	125,07	125,970	476,470	42,207	0,7530	632,76	1,3263
2,4	126,46	127,386	475,370	42,314	0,7235	657,04	1,3803
2,5	127,80	128,753	474,310	42,416	0,6962	681,28	1,4343
2,6	129,10	130,079	473,282	42,515	0,6710	705,34	1,4881
2,7	130,35	131,354	472,293	42,610	0,6476	729,30	1,5418
2,8	131,57	132,599	471,328	42,702	0,6258	753,16	1,5954
2,9	132,76	133,814	470,387	42,791	0,6055	776,86	1,6488
3,0	133,91	134,989	469,477	42,876	0,5865	800,47	1,7021
3,1	135,03	136,133	468,591	42,960	0,5686	824,11	1,7556
3,2	136,12	137,247	467,729	43,040	0,5519	848,39	1,8086
3,3	137,19	138,341	466,883	43,119	0,5362	870,73	1,8615
3,4	138,23	139,404	466,060	43,196	0,5213	894,08	1,9147

1 Dampfspannung in Atmosphären.	2 t	3 q	4 Q	5 Apu	6 u	7 $\frac{Q}{u}$	8 Δ
3,5	139,24	140,438	465,261	43,269	0,5072	917,31	1,9676
3,6	140,23	141,450	464,478	43,342	0,4940	940,24	2,0203
3,7	141,21	142,453	463,703	43,413	0,4814	963,24	2,0729
3,8	142,15	143,416	462,959	43,480	0,4695	986,07	2,1255
3,9	143,08	144,368	462,224	43,548	0,4581	1008,9	2,1780
4,0	144,00	145,310	461,496	43,614	0,4474	1031,6	2,2303
4,1	144,89	146,222	460,792	43,677	0,4371	1054,2	2,2826
4,2	145,76	147,114	460,104	43,739	0,4273	1076,8	2,3349
4,3	146,61	147,985	459,431	43,799	0,4179	1099,3	2,3871
4,4	147,46	148,857	458,759	43,859	0,4090	1121,7	2,4391
4,5	148,29	149,708	458,103	43,918	0,4004	1144,0	2,4911
4,6	149,10	150,539	457,462	43,975	0,3922	1166,3	2,5430
4,7	149,90	151,360	456,829	44,030	0,3844	1188,5	2,5949
4,8	150,69	152,171	456,204	44,085	0,3768	1210,6	2,6467
4,9	151,46	152,961	455,595	44,139	0,3696	1232,7	2,6984
5,0	152,22	153,741	454,994	44,192	0,3626	1254,7	2.7500
5,1	152,97	154,512	454,401	44,243	0,3559	1276,6	2,8016
5,2	153,70	155,262	453,823	44,293	0,3495	1298,5	2,8531
5,3	154,43	456,012	453,246	44,343	0,3433	1320,3	2,9046
5,4	155,14	156,741	452,684	44,392	0,3373	1342,1	2,9560
5,5	155,85	157,471	452,123	44,441	0,3315	1363,8	3,0073
5,6	156,54	158,181	451,577	44,487	0,3259	1385,4	3,0586
5,7	157,22	158,880	451,039	44,533	0,3205	1407,0	3,1098
5,8	157,90	159,579	450,501	44,579	0,3153	1428,5	3,1610
5,9	158,56	160,259	449,979	44,623	0,3103	1450,0	3,2122
6,0	159,22	160,938	449,457	44,667	0,3054	1471,5	3,2632
6,1	159,87	161,607	448,943	44,710	0,3007	1492,0	3,3142
6,2	160,50	162,255	448,444	44,753	0,2962	1514,2	3,3652
6,3	161,14	162,915	447,938	44,794	0,2917	1535,5	3,4161
6,4	161,76	163,553	447,448	44,836	0,2874	1556,7	3,4670
6,5	162,37	164,181	446,965	44,876	0,2833	1577,9	3,5178
6,7	162,98	164,810	446,483	44,916	0,2792	1599,0	3,5685
6,6	163,58	165,428	446,008	44,956	0,2753	1620,1	3,6192
6,8	164,18	166,047	445,534	44,994	0,2715	1641,2	3,6699
6,9	164,76	166,645	445,075	45,032	0,2678	1662,2	3,7206
7,00	165,34	167,243	444,616	45,070	0,2642	1683,0	3.7711
7,25	166,77	168,718	443,485	45,162	0,2556	1735,2	3,8974
7,50	168,15	170,142	442,393	45,250	0,2475	1787,1	4,0234
7,75	169,50	171,535	441,325	45,337	0,2400	1838,7	4,1490
8,00	170,81	172,888	440,289	45,420	0,2329	1890,1	4,2745
8,25	172,10	174,221	439,269	45,501	0,2263	1941,2	4,3997
8,50	173,35	175,514	438,280	45,578	0,2200	1992,1	4,5248
8,75	174,57	176,775	437,315	45,654	0,2141	2042,8	4,6495

1 Dampfspannung in Atmosphären.	2 t	3 q	4 ϱ	5 Apu	6 u	7 $\frac{\varrho}{u}$	8 Δ
9,00	175,77	178,017	436,366	45,727	0,2085	2093,3	4,7741
9,25	176,94	179,228	435,440	45,798	0,2031	2143,5	4,8985
9,50	178,08	180,408	434,539	45,868	0,1981	2193,5	5,0226
9,75	179,21	181,579	433,645	45,935	0,1933	2243,3	5,1466
10,00	180,31	182,719	432,775	46,001	0,1887	2293,0	5,2704
10,25	181,38	183,828	431,928	46,064	0,1844	2342,5	5,3941
10,50	182,44	184,927	431,090	46,127	0,1802	2391,7	5,5174
10,75	183,48	186,005	430,267	46,189	0,1763	2440,7	5,6405
11,00	184,50	187,065	429,460	46,247	0,1725	2489,5	5,7636
11,25	185,51	188,113	428,661	46,306	0,1689	2538,2	5,8864
11,50	186,49	189,131	427,886	46,362	0,1654	2536,8	6,0092
11,75	187,46	190,139	427,119	46,417	0,1621	2635,2	6,1318
12,00	188,41	191,126	426,368	46,471	0,1589	2683,4	6,2543
12,25	189,35	192,104	425,424	46,524	0,1558	2731,4	6,3765
12,50	190,27	193,060	424,896	46,576	0,1529	2779,3	6,4986
12,75	191,18	194,007	424,177	46,626	0,1500	2827,0	6,6206
13,00	192,08	194,944	423,465	46,676	0,1473	2874,5	6,7424
13,25	192,96	195,860	422,769	46,724	0,1447	2922,0	6,8642
13,50	193,83	196,766	422,080	46,772	0,1421	2969,3	6,9857
13,75	194,69	197,662	421,400	46,818	0,1397	3016,5	7,1072
14,00	195,53	198,537	420,736	46,864	0,1373	3063,4	7,2283

§. 67.

Zeuner's Dampfkesselaufgabe.

Um die nützliche Verwendbarkeit vorstehender Tabellenwerthe für einen practischen Fall zu zeigen, hat Zeuner bereits im Jahre 1863 folgende Aufgabe gelöst[1]), welche noch gegenwärtig verdient, in allen betreffenden technischen Lehrbüchern aufgenommen zu werden.

Aufgabe. Nach welchem Gesetze wächst in einem Dampfkessel die Dampfspannung bei fortgesetztem Heizen mit der Zeit, wenn man von einem gewissen Zeitpunkte an die Dampfbildung unterbricht und die Ventile in geschlossenem Zustande erhält?

Auflösung. Es sei im Augenblicke, wo die Dampfableitung unterbrochen wird, das Gewicht von Wasser und Dampf im Kessel M und davon m Kilogramm dampfförmig. Die Temperatur sei t und die correspondirende Spannung sei p.

Behalten wir dann die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen

[1]) Neue Tabelle für gesättigte Wasserdämpfe. Von Prof. Dr. G. Zeuner. Schweizerische Polytechnische Zeitschschrift. Bd. VIII, Jahrg. 1863, S. 1 ff.

bei[1]), so erhalten wir zunächst

$(M - m)w$ für das Wasservolumen und
mv für das Dampfvolumen.

Demnach aber das Volumen V der ganzen Masse:

$$V = (M - m)w + mv,$$

oder da $v - w = u$ war:

$$V = Mw + mu.$$

Durch das fortgesetzte Heizen des Kessels sei die Dampfmenge nach τ Minuten in den größeren Werth m_1, die Temperatur in t_1 und die Spannung in p_1 übergegangen. Dann wird offenbar

$$V = Mw + m_1 u_1,$$

wobei u_1 der Temperatur t_1 entspricht.

Durch das Gleichsetzen beider Werthe von V ergiebt sich dann:

$$(1) \quad m_1 u_1 = mu.$$

Außer dieser Gleichung läßt sich aber noch eine andere in nachstehender Weise gewinnen.

Es beträgt die anfänglich im Wasser enthaltene Wärmemenge

$$(M - m)q$$

und die im Dampfe enthaltene

$$mJ.$$

Daher die Wärmemenge der ganzen Masse

$$(M - m)q + mJ, \text{ oder}$$
$$Mq + m(J - q),$$

d. i. mit Bezug auf Gleichung (13) des vorigen Paragraphen:

$$Mq + m\varrho.$$

Bei einer anderen Temperatur t_1 erhält man eben so

$$Mq_1 + m_1\varrho_1,$$

und daher die Wärmemenge Q, welche von Außen zuzuführen war, damit die Temperatur von t auf t_1 stieg:

$$(2) \quad Q = M(q_1 - q) + m_1\varrho_1 - m\varrho.$$

Nun war nach (3) §. 66, $q = 1{,}013t$, folglich $q_1 = 1{,}013t_1$. Ferner ist nach (1) dieses Paragraphen $m_1 = \frac{mu}{u_1}$, daher wenn man diese Werthe in (2) substituirt:

$$Q = 1{,}013\,M(t_1 - t) + mu\left(\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho}{u}\right).$$

Ist endlich noch Q_0 die Wärmemenge, die in jeder Minute in den Kessel tritt, so erhält man die Zeit τ (in Minuten), innerhalb welcher die Temperatur von t auf t_1 und die Spannung von p auf p_1 steigt zu:

$$(3) \quad \tau = \frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{Q_0}\left\{1{,}013\,M(t_1 - t) + mu\left(\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho}{u}\right)\right\}.$$

---

[1]) D. h. bezeichnet w das specifische Volumen der Gewichtseinheit (= 1 Kilogr) Wasser und $v = \frac{1}{\Delta}$ das specifische Volumen der Gewichtseinheit (= 1 Kilogr.) Dampf etc.

Beispiel. Die Heizfläche eines einfachen cylindrischen Dampfkessels betrage 18 Quadratmeter (d. h. der Kessel würde ungefähr einer Dampfmaschine von 12 bis 15 Pferdekräften genügen), während derselbe einen Inhalt von 11 Cubikmetern hat, wovon 0,4 mit Dampf von 4 Atmosphären Spannung und 0,6 mit Wasser gefüllt ist.

Es fragt sich, in welcher Zeit die Dampfspannung auf 8 Atmosphären steigen wird, wenn überdies noch die Temperatur des Speisewassers 15° Cels. ist?

Auflösung. Rechnet man, daß jeder Quadratmeter der vorhandenen Heizfläche 25 Kilogramm Dampf pro Stunde liefert, so giebt dies pro Minute, für den ganzen Kessel,

$$\frac{25 \cdot 18}{60} = 7{,}5 \text{ Kil. Dampf.}$$

Nach unserer Tabelle beträgt die Wärmemenge $= Q$, welche man jedem Kilogramme Speisewasser von Null Grad Temperatur (bei constantem Drucke) zuführen müßte:

$$Q = q + \varrho + Apu,$$

d. i., weil der Spannung von 4 Atmosphären die Temperatur von 144 Grad entspricht, und nach der Tabelle Seite 153:

$$q = 145{,}310,$$
$$\varrho = 461{,}496,$$
$$Apu = 43{,}614 \text{ erhalten wird:}$$
$$Q = 145{,}31 + 461{,}496 + 43{,}614 = 650{,}420 \text{ Wärmeeinheiten.}$$

Da jedoch das Speisewasser nicht die Temperatur $=$ Null, sondern die 15 Grad hat, so beträgt die zuzuführende Wärmemenge nur $Q - 15 = 635{,}42$ Wärmeeinheiten.

Vorstehendem gemäß liefert der Kessel pro Minute 7,50 Kilogr. Dampf, so daß sich die während derselben Zeit in den Kessel tretende Wärmemenge $= Q_0$ ergiebt zu:

$$Q_0 = 635{,}42 \times 7{,}5 = 4765{,}65 \text{ Calorien.}$$

Daher folgt aus (3):

$$Q_0 = \frac{1}{4765{,}65}\left\{1{,}013\, M\,(t_1 - t) + mu\left(\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho}{u}\right)\right\}.$$

Wir schreiten nun zur Ermittlung der verschiedenen Glieder dieser Gleichung und erhalten Folgendes:

Da nach unserer Tabelle 1 Cubikmeter Dampf von 4 Atmosphären Spannung 2,2303 Kilogramm wiegt, so beträgt das Dampfgewicht m

$$m = 0{,}4 \cdot 11 \cdot 2{,}2303 = 9{,}8133 \text{ Kilogramm.}$$

Eben so ergiebt sich für das Wassergewicht

$$M - m = 0{,}6 \cdot 11 \cdot 1000 = 6600 \text{ Kilogramm.}$$

Daher erhält man für das Gewicht von Dampf und Wasser zusammen:

$$M = 6600 + m = 6609{,}8133 \text{ Kilogramm.}$$

Ferner ist nach der Tabelle (4 Atmosph. entsprechend) $t = 144$ und letzterer Temperatur correspondirend $u = 0{,}4474$, so wie $\frac{\varrho}{u} = 1031{,}6$.

Eben so für 8 Atmosphären

$$t_1 = 170{,}81; \; \frac{\varrho_1}{u_1} = 1890{,}1 \text{ und}$$

$$t_1 - t = 170{,}81 - 144 = 26{,}81.$$

Daher

$$1{,}013\, M (t_1 - t) = 1{,}013 \,.\, 6609{,}8133 \,.\, 26{,}81 = 179512{,}79.$$

Ferner ergiebt sich

$$mu = 9{,}8133 \,.\, 0{,}4474 = 4{,}390.$$

$$\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho}{u} = 1890{,}1 - 1031{,}6 = 858{,}5, \text{ folglich}$$

$$mu \left(\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho}{u}\right) = 4{,}390 \,.\, 858{,}5 = 3768{,}815.$$

Demnach

$$\tau = \frac{179512{,}79 + 3768{,}815}{4765{,}65} = \frac{183281{,}605}{4765{,}65}, \text{ d. i.}$$

$$\tau = 38{,}45 \text{ Minuten},$$

als die Zeit, innerhalb welcher die Dampfspannung, bei unveränderter Heizung im bezeichneten Kessel, von 4 auf 8 Atmosphären wächst.

§. 68.

Expansionsarbeit gesättigten Wasserdampfes.

Als weitere Anwendung der Werthe vorstehender Tabelle auf Mischungen von gesättigtem Dampfe mit Wasser[1]), ermitteln wir die Arbeit, welche solcher Dampf verrichtet, wenn er sich nach der adiabatischen Curve expandirt, d. h. wenn ihm bei der Ausdehnung weder Wärme mitgetheilt, noch solche entzogen wird. Unter dieser Voraussetzung kann äußere Arbeit nur auf Kosten der inneren geleistet werden. Die äußere Arbeit ist aber gleich dem Aequivalente der entzogenen Flüssigkeitswärme (q) und der Veränderung der inneren latenten Wärme (ϱ), so daß sich folgendes Schema aufstellen läßt, sobald man beim Beginnen der Expansion annimmt, daß x_2 Kilogramm gesättigter Dampf und $1 - x_2$ Kilogramm Wasser vorhanden ist:

x_2 Kil. Dampf enthalten an Wärmeeinheiten: $x_2 (q_2 + \varrho_2)$;
$(1 - x_2)$ „ Wasser „ „ „ $(1 - x_2) q_2$.
Das Gemisch enthält sonach „ „ $q_2 + x_2 \varrho_2$.

Sind ferner am Ende der Expansion vorhanden: x_1 Kilogr. Dampf und $1 - x_1$ Kilogr. Wasser, so ergiebt sich für dies Gemisch an Wärmeeinheiten: $q_1 + x_1 \varrho_1$.

Die bei der Ausdehnung geleistete äußere aber verschwundene Arbeit $= \mathfrak{A}$ ist daher (mit Bezug auf VI, S. 136):

$$\frac{\mathfrak{A}}{E} = \frac{U_2 - U_1}{E} = q_2 + x_2 \varrho_2 - q_1 - x_1 \varrho_1 \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad \mathfrak{A} = E (q_2 - q_1 + x_2 \varrho_2 - x_1 \varrho_1).$$

[1]) Kein Dampfkessel vermag völlig trocknen Dampf, d. h. solchen ohne Beimischung von (unverdampftem) Wasser zu liefern. Im III. Bande meiner Allgem. Maschinenlehre (2. Auflage) ist nachgewiesen, daß das mechanisch mit fortgerissene Wasser 3 bis 30 Procent betragen kann.

Für practische Rechnungen ist nun eine Formel erforderlich, mittelst welcher man x_2 (am Ende der Expansion) aus x_1 (am Anfange der Expansion) zu berechnen im Stande ist. Eine solche Formel hat aber Clausius[1]) entwickelt, nämlich

$$\frac{x_2 r_2}{T_2} = \frac{x_1 r_1}{T_1} + c \operatorname{Lgnt} \frac{T_1}{T_2},$$

wo r_2 und r_1 die den Temperaturen des Dampfes entsprechenden Werthe (von r) der Tabelle bezeichnen und $c = 1{,}013$ ist.

Zeuner[2]) hat dafür eine empirische Formel aufgestellt, die für's practische Rechnen bequemer ist, nämlich

$$\text{II.} \quad \frac{x_1 r_1}{T_1} + \tau_1 = \frac{x_2 r_2}{T_2} + \tau_2,$$

$$\text{worin } \tau = \int_0^t \frac{dq}{T} \text{ ist.}$$

Daß hier überall T und q die früher erörterten Bedeutungen haben, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Zeuner hat überdies für den practischen Gebrauch der Formel II folgende Tabelle berechnet:[3])

Druck in Atmosphären	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{r}{T}$	1,5488	1,4383	1,3258	1,2591	1,2112	1,1739	1,1432	1,1171	1,0944	1,0742	1,0561
τ	0,2627	0,3135	0,3681	0,4020	0,4271	0,4469	0,4639	0,4784	0,4912	0,5027	0,5129

Beispiel. Welche Arbeit ($\mathfrak{A}$) verrichtet 1 Kilogramm gesättigter Wasserdampf von 4 Atm. Spannung, wenn er adiabatisch bis auf 1 Atm. Spannung expandirt?

Auflösung. Zuerst erhält man aus II:

$$x_2 = \frac{T_2}{r_2}\left(\frac{x_1 r_1}{T_1} + \tau_1 - \tau_2\right)$$

und daher mittelst vorstehender Tabelle, da $x_1 = 1$ Kil. ist:

$$x_2 = \frac{1}{1{,}4383}(1{,}2112 + 0.4271 - 0{,}3135) = \frac{1{,}3148}{1{,}4388} = 0{,}921$$

$$1 - x_2 = 1 - 0{,}921 = 0{,}079.$$

Hiernach haben sich also fast 8% Dampf während der Expansion zu Wasser niedergeschlagen.

Mit Bezug auf I. ergiebt sich weiter (mittelst der Tabelle S. 153):

$$q_1 = 145{,}810; \quad \text{so wie:} \quad q_2 = 100{,}50$$

$$x_1 \varrho_1 = 461{,}496 \qquad x_2 \varrho_2 = 0{,}921 \,.\, 496{,}30 = 457{,}092, \text{ also}$$

$$q_1 + x_1 \varrho_1 = 606{,}806. \qquad q_2 + x_2 \varrho_2 = 557{,}592.$$

Daher erhält man für die während der Ausdehnung verschwundene Wärme:

---

[1]) Mechanische Wärmetheorie, 2. Auflage, S. 164.

[2]) Grundzüge der Wärmetheorie. Zweite Auflage, S. 322.

[3]) Ebendaselbst, S. 316.

$\frac{\mathfrak{A}}{E} = (606{,}806 - 557{,}592) = 49{,}213$ Wärmeeinheiten (Calorien). Ferner ergiebt die während dieser Ausdehnung verrichtete äußere mechanische Arbeit zu:

$$\mathfrak{A} = 425 \,.\, 49{,}216 = 20916{,}80 \text{ Meterkilogramm.}$$

Zusatz 1. Das während der Expansion sich niedergeschlagene Dampfquantum $x_1 - x_2$ ergiebt sich überhaupt allgemein aus II. zu:

$$x_1 - x_2 = \frac{T_2}{r_2}\left[x_1\left(\frac{r_2}{T_1} - \frac{r_1}{T_2}\right) + \tau_2 - \tau_1\right].$$

Clausius und nach diesem Regnault leiteten zuerst diesen auch für die Anwendung in der Technik wichtigen Satz mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie ab, während ihn Hirn durch Experimente bestätigte.

In seiner ganzen Ausdehnung lautet das wichtige Ergebniß (nach Clausius) folgendermaßen: [1])

„Gesättigter Wasserdampf muß sich bei der Ausdehnung theilweise niederschlagen, bei der Zusammendrückung aber erhitzen, sobald er sich in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle befindet.“

Pambour[2]) (dem wir die erste beachtenswerthe Theorie der Dampfmaschine verdanken) und nach ihm Redtenbacher, (der sich um die Ausbildung dieser Theorie verdient machte); beide nahmen an, daß der Dampf bei seiner Ausdehnung nicht nur im gesättigten Zustande bleibe, sondern daß sich auch das vorhandene Dampfgewicht nicht ändere, daß also die Ausdehnung nach der Curve constanter Dampfmengen oder Dampfgewichte stattfinde.

Nach den vorbemerkten Entdeckungen von Clausius und Rankine bleibt zwar der gesättigte Dampf während der Expansion und Compression gesättigt, allein das vorhandene Dampfgewicht oder die vorhandene Dampfmenge bleibt nicht constant.

Zusatz 2. Bei der Wichtigkeit vorstehenden Satzes hat man sich gar bald die Frage vorgelegt, ob sich für gesättigten Wasserdampf das Gesetz der adiabatischen Linie (entsprechend §. 60) nicht durch eine Gleichung von der Form

$$pv^{\mu} = p_1 v_1^{\mu} = p_2 v_2^{\mu} \ldots.$$

darstellen lasse, sobald nur μ entsprechend bekannt ist.

In der That ist es Zeuner[3]) (nach dem Vorgange von Rankine[4]) geglückt, eine empirische Formel aufzufinden, woraus μ für Mischungen aus gesättigtem Dampf und Wasser berechnet werden kann und welche für die Praxis befriedigende Uebereinstimmungen mit der Erfahrung giebt.

Diese Formel ist

$$\text{III.} \quad \mu = 1{,}035 + 0{,}10\,y,$$

worin y den verhältnißmäßigen Dampfgehalt, die specifische Dampfmenge beim Beginn der Expansion darstellt, also $y = 1$ ist für ganz trockenen Dampf, der in der Praxis entweder gar nicht oder doch nur höchst selten vorkommt und weshalb auch Zeuner aufmerksam macht, daß er seine Formel nur innerhalb der Grenzen $y = 1$ und $y = 0{,}70$ benutzt wissen will.

[1]) Die mechanische Wärmetheorie. Zweite Auflage, S. 138.

[2]) Pambour, geb. 1795 zu Noyen (Dep. Oise).

[3]) Mechanische Wärmetheorie. 2. Auflage, S. 342.

[4]) Man sehe den später folgenden, mit „Geschichtliche Notizen“ überschriebenen §. 70.

Aller Dampf ist mehr oder weniger feucht, zumal wenn er in langer Leitung zugeführt wird und wenn der Kessel nicht zur Ueberhitzung eingerichtet ist. Erfahrene Practiker rathen neuerdings [1]), für gewöhnlich $y = 0{,}90$ als Mittelwerth zu rechnen, d. h. anzunehmen, daß in einem Kilogramm des verwendeten Gemisches sich 0,10 Kilogramm Wasser und 0,90 Kilogramm Dampf befindet, so daß in runder Ziffer mit

$$\mu = 1{,}035 + 0{,}090 = 1{,}125$$

zu rechnen ist.

Da die Gleichung der adiabatischen Curve für gesättigten Wasserdampf, unter Einführung des Werthes μ, dieselbe Gestalt hat, wie dies bei atmosphärischer Luft (§. 59) der Fall ist, so muß auch die Leistung dieses Dampfes bei seiner Ausdehnung nach der adiabatischen Linie, aus der Gleichung I. des §. 60 berechnet werden können, so bald man die dort erforderliche Zahl n durch das vorstehende μ ersetzt, also erhält:

$$\text{IV.} \quad \mathfrak{A}_e = \frac{p_1 v_1}{\mu - 1} \left\{ 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\mu - 1}{\mu}} \right\},$$

oder auch, wegen $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\mu}$:

$$\mathfrak{A}_e = \frac{p_1 v_1}{\mu - 1} \left\{ 1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\mu - 1} \right\},$$

oder endlich, wenn man $\frac{v_1}{v_2}$, das Expansionsverhältniß $= \varepsilon$ setzt:

$$\text{V.} \quad \mathfrak{A}_e = \frac{p_1 v_1}{\mu - 1} \left\{ 1 - \varepsilon^{\mu - 1} \right\}.$$

In wie weit practische Aufgaben, welche man mittelst vorstehender Gleichungen IV und V statt mit der genauen Gleichung I rechnet, abweichende Werthe liefern, erhellt aus folgendem Beispiele. In der That ist die Uebereinstimmung größer, als man erwarten konnte, und darf es daher den Practikern um so weniger verdacht werden, bei der Berechnung von Dampfmaschinenleistungen die letzteren Gleichungen und nicht die (wissenschaftlich richtigere) Gleichung I zu benutzen [2]). weil die sogenannten passiven Widerstände und noch andere Umstände (namentlich daß die Bedingungen, unter welchen das Druckgesetz das adiabatische ist, practisch nicht ganz zu erfüllen sind), einen viel größeren Einfluß auf die Richtigkeit des Endresultates haben können, als die Benutzung der Annäherungsformel zur Berechnung der Expansionsarbeit [3]).

---

[1]) Ingenieur Geber unter der Ueberschrift „Die Arbeit des Dampfes in der Dampfmaschine". Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XXII (Jahrg. 1878), S. 113.

[2]) G. Schmidt (Prof. in Prag) in der Zeitschrift des österr. Ingenieur-Vereins, Jahrg. XV (1863), S. 193. Hrabák, „Die Dampfmaschinenberechnungen etc." Dritte Auflage, Prag 1877, S. 56 ff.

[3]) Zeuner selbst sagt S. 324 (in der 2. Auflage) seiner „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie" Folgendes: „Die Gleichung der adiabatischen Curve für Dampf- und Flüssigkeitsmischungen läßt sich in der Form $p = f(v)$

Beispiel. Wie groß ist die Leistung von 1 Kil. gesättigten Wasserdampfes, wenn derselbe von 4 auf 1 Atmosphäre expandirt, unter der Voraussetzung, daß dem Dampfe ursprünglich kein Wasser beigemischt, d. h. völlig trockener Dampf (der sogenannte Grenzzustand) vorhanden ist, also $y = 1$ gesetzt werden kann?

Auflösung. Zunächst liefert die Gleichung III dieses Paragraphen den Werth:

$$\mu = 1,035 + 0,10 = 1,135,$$

daher aus IV, wegen $\mu - 1 = 0,135$ und $\frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{0,135}{1,135} = 0,122$, folgt:

$$\mathfrak{A}_e = \frac{p_1 v_1}{0,135} \left\{ 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{0,122} \right\}.$$

Ferner ist hier $p_1 = 4 \,.\, 10333$ Kil., $v_1 = \frac{1}{\varDelta_1} = \frac{1}{2,2303}$ (nach Tabelle S. 153), d. i. $v_1 = 0,448$ und $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{4} = 0,25$. Daher

$$\mathfrak{A}_e = \frac{10333 \,.\, 4 \,.\, 0,448}{0,135} \left\{ 1 - (0,25)^{0,122} \right\} = 21397,2 \text{ Meter Kilogramm.}$$

Letzterer Werth weicht von dem S. 160 ermittelten, (d. h. von 20916,8 Meterkilogramm) verhältnißmäßig wenig ab. Man sehe auch hierüber den folgenden mit „Geschichtliche Notizen“ überschriebenen §. 70.

Zusatz 3. Völckers liefert in seinem werthvollen Buche „Der Indicator“ (Anleitung zum Gebrauche desselben bei der Prüfung von Dampfmaschinen)[1]) folgende Tabelle, welche dazu dienen kann, die Annahme der Practiker zu rechtfertigen „Zur Berechnung der Nutzarbeit einer Expansions-Dampfmaschine, das Mariotte'sche Gesetz beizubehalten“[2]). In der Tabelle bezeichnet l_1 den Admissionsweg des Dampfkolbens und l dessen ganzen Schub oder Hub, p_1 die mittlere Dampfspannung während der Admission, p_2 die Dampfspannung beim Beginn der Expansion, beide in Kilogr. pro Quadratcentimeter ausgedrückt, und ml die Höhe des sogenannten schädlichen Raumes auf jeder Seite des Kolbens. Die Werthe der letzten Columne sind mittelst Indicatordiagrammen berechnet.

---

auf theoretischem Wege nicht darstellen. Hierin liegt aber der Grund, weswegen die Formeln der mechanischen Wärmetheorie bei Berechnung der Dampfmaschinen noch keine allgemeine Anwendung gefunden haben.“

[1]) Erste Auflage (Berlin 1863), S. 51. Zweite Auflage (Berlin 1878), S. 49.

[2]) Zeuner stimmt am Schlusse (S. 536) seiner „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie“ (2. Auflage) derselben Annahme bei. Eben so zeigt auch Grove in seiner werthvollen Abhandlung „Die Lokomotive im Allgemeinen“, Bd. III, S. 155 des v. Heusinger'schen Handbuches der Eisenbahntechnik, daß bei Lokomotiv-Dampfmaschinen das Mariotte'sche Gesetz dem thatsächlichen Vorgange am nächsten kommt.

Versuchs-nummer	$\frac{l_1}{l}$	m	p_1	p_2	p_m die mittlere absolute Dampfspannung hinter dem Kolben in Kil. pro Quadratcentimeter.		
					Nach Laplace Poisson	Nach Mariotte	Nach den Diagrammen
1	0,8	0,06	3,288	3,143	3,183	3,123	3,166
2	0,75	0,09	2,858	2,595	2,682	2,664	2,720
3	0,46	0,06	5,380	5,336	4,169	4,318	4,332
4	0,45	0,06	3,406	3,267	2,587	2,682	2,779
5	0,45	0,06	3,801	3,669	2,894	3,002	3,029
6	0,25	0,085	3,201	2,962	1,726	1,874	1,968
7	0,16	0,013	4,459	4,386	1,683	2,059	2,237
8	0,132	0,037	4,183	4,110	1,457	1,789	1,747
9	0,131	0,037	4,119	4,046	1,430	1,756	1,567
10	0,130	0,013	4,459	4,386	1,438	1,786	1,888
11	0,12	0,013	4,550	4,477	1,392	1,770	1,990

Die Folgerungen aus dieser Tabelle können wohl Jedem überlassen bleiben, so wie auch das Lesen der betreffenden Stellen unserer Quelle zu empfehlen ist.

§. 69.

Ueberhitzter Wasserdampf.

Zu dem, was bereits §. 64 über den Unterschied zwischen gesättigtem und überhitztem Dampfe bemerkt wurde, werde hier noch hinzugefügt, daß sich die überhitzten Dämpfe den Gasen um so mehr nähern, je weiter sie von ihrem Condensationspunkte entfernt sind, so wie daß man die überhitzten Dämpfe als in der Mitte zwischen gesättigten Dämpfen und (permanenten) Gasen liegend, also letztere beiden als Grenzzustände betrachten kann.

Wäre uns daher die Zustandsgleichung (d. h. die Beziehung zwischen Pressung p, Volumen v und Temperatur t) des überhitzten Wasserdampfes genau bekannt, so würde dieselbe die Zustandsgleichung der gesättigten Dämpfe und der Gase in sich schließen.

Da eine solche Bekanntschaft nicht vorhanden ist, so hat man sich, bis auf Weiteres, mit folgenden Formeln als Zustandsgleichungen zu begnügen, deren Zahlenwerthe vorzugsweise

aus Versuchen von Hirn[1]) und Cazin[2]) direct oder indirect entlehnt sind.

Nach Hirn[3]) hat man:

$$(1) \quad pv = 0{,}00473268\tau - f(v),$$

wo p die Spannung in Atmosphären, v das specifische Volumen (von 1 Kilogramm Gewicht), $f(v) = 0{,}09247 \left(0{,}353 \,.\, 48 + \frac{1}{\sqrt{v}}\right)$ und $\tau = 273 + t$ ist.

Nach Zeuner[4]) hat man:

$$(2) \quad pv = 0{,}0049287\tau - 0{,}18781 \sqrt[4]{p}.$$

Nach Schmidt[5]) hat man:

$$(3) \quad pv = 0{,}0046282\tau - \frac{0{,}0951}{v^{0,45}}.$$

Was die Verwendung des überhitzten Wasserdampfes zum Maschinenbetriebe anlangt, so wird der hin und wieder gerühmte beträchtliche (?) Vortheil[6]) insofern in Wirklichkeit beeinträchtigt, als dieser Dampf (abgesehen von den leicht zerstörbaren Ueberhitzungsapparaten) das Fett, womit geschmiert wird, in hoher Temperatur auflöst, mit fortführt und dadurch die sich reibenden Flächen angreift, Undichtigkeiten, häufige Reparaturen etc. veranlaßt. Ueberhaupt scheint feuchter Dampf wesentlich zur Erhaltung der betreffenden Maschinentheile, dagegen überhitzter Dampf zu deren Zerstörung beizutragen[7]). Prof. Kick, im Artikel „Dampf" der dritten Auflage von Karmarsch und Heeren's „Technischem Wörterbuche" (Bd. II, S. 510), äußert sich in ähnlicher Weise, indem er speciell Folgendes bemerkt: „Ueberhitzte Dämpfe finden in der Praxis fast keine Anwendung (insofern die Ueberhitzung nicht in dem Trocknen des Dampfes besteht), weil sie die Packungen verbrennen und die Schmiermittel noch schneller zerstören als hochgespannte gesättigte Dämpfe." Das was sich in der Praxis

---

[1]) Annales de chim. et de phys. 4. Serie, Tome 10 (1867), Pg. 349—370.

[2]) Ebendaselbst Tome 14 (1868), Pg. 374—410. Ferner Comptes rendus, Dec. 1866.

[3]) Theorie mécanique de la chaleur. 2e Edit. (1865), Première Partie, Pg. 201 und Combes im Bulletin de la Soc. d'encouragement. Tome XI (1864), 62 année, Pg. 477.

[4]) „Theorie der überhitzten Wasserdämpfe" in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. XI (1867), S. 1—66.

[5]) „Die Zustandsgleichung des Wasserdampfes". Ebendaselbst, S. 653.

[6]) Mein Neffe, Herr Prof. Richard Rühlmann, führt Bd. 1, S. 733 seiner mech. Wärmetheorie als besondere Vortheile des überhitzten Wasserdampfes zum Maschinenbetriebe Folgendes an: „Vergleicht man die Wärmemenge, welche ein Kilogramm Dampf in einer Maschine in Arbeit umsetzt, so findet man, daß dies bei denjenigen, welche mit gesättigtem Dampfe arbeitet, 132,0 und bei jener, zu deren Betriebe überhitzter Dampf verwandt wird, (unter sonst gleichen Umständen) 156,5 Wärmeeinheiten beträgt, so daß die disponible Arbeit beinahe um $\frac{1}{5}$ wächst."

[7]) Autenheimer (Director des Technicums in Winterthur) in der von ihm umgearbeiteten 6. Auflage der Bernoulli'schen Dampfmaschinenlehre S. 86.

unter dem Namen überhitzter Dampf vorfindet, ist gewöhnlich nur trockener Dampf.

Wer sich dennoch mit dem allerdings höchst interessanten Studium überhitzter Wasserdämpfe, vom Standpunkte der mechanischen Wärmetheorie, zu beschäftigen wünscht, dem kann der Verfasser namentlich folgende neuere Bücher und Abhandlungen empfehlen: Grashof, Theoretische Maschinenlehre. Bd. 1, S. 180 bis 216. Weyrauch, Von den überhitzten Wasserdämpfen. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. XX (1876), S. 1 und Ebendaselbst, Bd. XXI, S. 241 unter der Ueberschrift: „Noch einmal die überhitzten Dämpfe". E. Herrmann (Prof. der Mechanik an der K. Ungarischen Berg- und Forstacademie zu Schemnitz), Compendium der mechanischen Wärmetheorie mit besonderer Berücksichtigung der Maschinentechnik. Berlin 1879, S. 183—191.

§. 70.

Geschichtliche Notizen,
die Wasserdämpfe betreffend.

Die zuerst bekannt gewordene Eigenschaft des Wasserdampfes ist seine ausdehnende Kraft oder seine Elasticität. Diese Eigenschaft kannten schon Hero von Alexandrien[1]) (etwa 120 Jahre vor Christi Geburt), dann Anthemius[2]), Baumeister der Sophienkirche in Constantinopel (538 nach Christo), später Leonardo da Vinci[3]), noch später (1683) Samuel Moreland[4]), Papin[5]) u. m. A. Daß aber die Elasticität des Wasserdampfes mit der Temperatur wachse und nach welchem Gesetze dies geschehe, untersuchten zuerst James Watt[6]) und Ziegler[7]) in größerem Umfange.

Die erste Formel, welche das Elasticitätsgesetz des gesättigten Wasserdampfes ausdrückt, stellte im Jahre 1794 Prony[8]) auf, wozu dieser Geometer Versuche von Betancourt[9]) benutzte. Allein abgesehen von der sehr unbequemen Gestalt dieser Formel (eine aus vier Gliedern bestehende Exponential-Function), drückte dieselbe auch das Verhältniß zwischen Temperatur und Spannung (Druck), den Beobachtungen entsprechend, nicht hinreichend genau aus.

---

[1]) Man sehe des Verfassers „Allgemeine Maschinenlehre". Bd. I (Zweite Auflage), S. 489.

[2]) Ebendaselbst, S. 489, Note 3.

[3]) Leonardo da Vinci, geb. in Vinci bei Florenz zwischen 1444 und 1452, gest. 1519 in Paris. Es wird behauptet, daß Leonardo der Erfinder einer Dampfkanone sei. Man sehe deshalb Dr. Grothe in den Berliner Verhandlungen, Jahrg. 1874, S. 152.

[4]) Des Verfassers „Allgemeine Maschinenlehre. Bd. I (Zweite Auflage), S. 492, Note 2.

[5]) Papin, geb. 1650 zu Blois in Frankreich, gest. 1710 zu Marburg.

[6]) James Watt, geb. 19. Jan. zu Greenock in Schottland, gest. 25. Aug. 1819 in seinem Landhause zu Heathfield bei Birmingham.

[7]) Gehler's „Physicalisches Wörterbuch". Zweiter Band, S. 316 (Artikel „Dampf").

[8]) Prony, geb. 1755 zu Chamlet im Rhônedepartement, gest. 1839 in Paris.

[9]) Mémoire sur la force expansive de la vapeur etc. Paris 1792.

Mit neuen Versuchen und daraus abgeleiteten Formeln von Schmidt[1]), Soldner[2]), La Place[3]) u. A. war man nicht viel glücklicher, bis 1807 der Engländer Thomas Young[4]) eine Function von der Form:

$$F = (a + bt)^m,$$

in Anwendung brachte, worin a, b und m constante Werthe darstellen, die durch Experimente zu ermitteln sind, t aber die Temperatur ist, welche der als Quecksilbersäule ausgedrückten Spannung des gesättigten Dampfes correspondirt.

Tredgold[5]) (verbessert von Mellet)[6]) fand:

$\frac{F}{10} = \left(\frac{t + 75}{85}\right)^6$, wenn t in Centigraden und F in Millimetern (Quecksilbersäule) ausgedrückt wird, oder

$p = \left(\frac{75 + t}{174}\right)^6$, wenn p den Druck in Kilogrammen pro Quadratcentimeter bezeichnet, oder endlich

$i = \left(\frac{75 + t}{175}\right)^6$, wenn $i \left(= \frac{F}{760}\right)$ die Spannung des Dampfes in Atmosphären darstellt.

Von gleicher Form war die Formel der französischen Academiker (Dulong und Arago)[7]), nämlich:

$i = \frac{F}{760} = (1 + 0{,}7153T)^5$, wo $T = \frac{t - 100}{100}$ ist, oder wenn, wie vorher p den Dampfdruck in Kilogrammen pro Quadratcentimeter bezeichnet:

$$p = (0{,}2847 + 0{,}007153\,t)^5.$$

Ohne hier noch alle anderen derartigen bemerkenswerthen Formeln (des Raummangels wegen) mittheilen zu können[8]), gedenken wir noch der von Magnus[9]), welche (aus theoretischen Gründen) lautet:

$$F = 4{,}525 \,.\, 10^{\frac{7{,}4804\,.\,t}{236{,}22 + t}},$$

so wie die Formel von Biot[10]):

$$\text{Lgnt}\, F = a + b\alpha^t + c\beta^t.$$

Letztere benutzte Regnault zur Darstellung seiner Versuche und wurden diese bereits S. 149 mit den von Regnault ermittelten Werthen der Constanten a, b und c, ferner α und β mitgetheilt.

---

[1]) Gren N. Journ. IV, S. 264 (Leipzig 1798).
[2]) Gilbert Ann. XVII, S. 44; XXV, S. 411.
[3]) Mécanique céleste, T. IV (1805), Pg. 273.
[4]) Young, geb. 13. Juni 1773 in der Grafschaft Somerset, gest. 10. Mai 1829.
[5]) The steam engine. London 1827. (In der Ausgabe von 1838, S. 57.)
[6]) Traité des machines à vapeur. Paris 1838, Pg. 108.
[7]) Mémoires de l'Institut, T. X, Pg. 230 und Annales de Chimie et de Physique, 2e série, T. XLIII, Pg. 74.
[8]) Eine Zusammenstellung von nicht weniger als 50 solcher Formeln findet sich in Marbach's „Physicalisches Lexicon", Bd. II, Artikel „Dampf", S. 135—140.
[9]) Poggendorff's Annalen etc., Bd. LXI, S. 247.
[10]) Connaissance des Temps pour 1844 und Poggendorff's Annalen, Bd. XXXI, S. 42 und Bd. XLVI, S. 627.

Wir wenden uns nun zu einer zweiten, theoretisch wie practisch wichtigen Eigenschaft des Wasserdampfes, zu derjenigen nämlich, zufolge deren Wasser nur dadurch zu Dampf umgewandelt wird, daß es ein gehöriges Quantum Wärme in sich aufnimmt, verschwinden macht, oder, wie man zu sagen pflegt, diese Wärme verschluckt, gebunden, latent wird. Nach Clausius führt die latente Wärme, in der Nomenclatur der neueren Naturwissenschaften, den Namen „Verdampfungswärme" und wird (wie auch bereits S. 152 geschah) in der mechanischen Wärmetheorie mit dem Buchstaben r bezeichnet.

Der Entdecker des betreffenden wichtigen Gesetzes war (im Jahre 1762) der bereits S. 141 genannte Engländer Black, der zuerst ganz allgemein nachwies, daß bei der Veränderung des Aggregatszustandes eines Körpers stets eine gewisse Quantität Wärme gebunden oder frei wird, die zugleich bei verschiedenen Körpern verschieden ist.

Die Gesammtwärme des Wasserdampfes in der Siedehitze ermittelte Black zu 530 Grad Celsius[1]), d. h. er wies nach, daß so viel Wärmeeinheiten erforderlich sind, um die Gewichtseinheit Wasser von Null Grad Temperatur in gesättigten Wasserdampf von 100 Grad zu verwandeln, wonach sich die latente Wärme dieses Dampfes zu 430 Grad Celsius oder Wärmeeinheiten, d. h. viel zu klein ergab.

Watt[2]) stellte (von 1765 bis 1783) genauere und vollständigere Versuche an und zeigte zugleich, daß die Gesammtwärme, welche man der Gewichtseinheit des flüssigen Wassers von Null Grad mittheilen muß, um dasselbe gänzlich in Dampf zu verwandeln, constant, d. h. immer dieselbe, also unabhängig von Spannkraft und Temperatur, und zwar gleich 650 Wärmeeinheiten sei. Letzteres Resultat ist unter dem Namen „Watt'sches Gesetz" bekannt. Es sei gleich hier erwähnt, daß noch später technische Autoritäten, wie u. A. Pambour und Parkes, bei ihren Rechnungen diesem Gesetze folgten.

Von 1803 ab stellten die Engländer Southern[3]) und Creighton[4]) neue umfangreiche Versuche an und gelangten zu dem Resultate, daß nicht die Gesammtwärme, sondern nur die latente Wärme constant sei und zwar 550 Wärmeeinheiten betrage. Die Gesammtwärme wird hiernach durch

$$550 + t$$

dargestellt, wenn t die Temperatur ist, welche das Thermometer angiebt. Dies Gesetz wird von den Physikern das Southern'sche genannt[5]).

Experimente, welche 1819 von den französischen Physikern Clément und Desormes über denselben Gegenstand angestellt wurden, schienen das Watt'sche Gesetz zu bestätigen[6]).

Diese Sache blieb unentschieden, bis Regnault[7]) auch diese

---

[1]) Regnault in den Mémoires de l'Académie, Tome XXI, Pg. 636.
[2]) Ebendaselbst.
[3]) Regnault, a. a. O., Pg. 642.
[4]) Ebendaselbst, Pg. 644.
[5]) Desgleichen, Pg. 648.
[6]) Desgleichen, Pg. 652. Es kann hier nicht unterlassen werden, zu bemerken, daß mehrere deutsche Schriftsteller das Southern'sche Gesetz fälschlich als das Clément's bezeichnen.
[7]) Ebendaselbst, Pg. 726.

wichtige Frage genauer untersuchte und aus seinen nach Umfang und Genauigkeit gleich ausgezeichneten Versuchen fand, daß keines dieser Gesetze vollkommen richtig ist, vielmehr bis auf Weiteres der bereits S. 150 uns bekannt gewordene Werth, nämlich

$$606{,}5 + 0{,}305\,t$$

angenommen werden muß, welcher dahin lautet: „daß die Summe der latenten und freien Wärme einen mit steigender Temperatur wachsenden Werth hat.

Hinsichtlich der Geschichte eines anderen Gegenstandes, der Dichtigkeit oder des specifischen Gewichtes des gesättigten Wasserdampfes, hat man lange Zeit hindurch die betreffenden Versuche und Resultate von Gay-Lussac[1]) als fast zweifellos richtig bezeichnet, deren Hauptergebniß dahin ging, daß das specifische Gewicht des Wasserdampfes 0,6235 oder ziemlich genau $\frac{5}{8}$ desjenigen betragen solle, welches die atmosphärische Luft bei gleichem Drucke und bei gleicher Temperatur besitzt. Zweifel über die vollkommene Richtigkeit dieses Satzes[2]) erhob unter Andern in Deutschland entschieden Holzmann[3]). Dieser scharfsinnige Physiker glaubte die Dichtigkeit $= \Delta$ des gesättigten Wasserdampfes, gegen atmosphärische Luft von gleicher Temperatur und Pressung, durch die Formel ausdrücken zu können:

$$\Delta = 0{,}55964\,\frac{272{,}63 + t}{236{,}22 + t},$$

wobei die Temperatur t von Null Grad aus zu zählen ist.

Hierbei verdient auch noch bemerkt zu werden, daß Holzmann auch den Ausdehnungscoefficienten des Wasserdampfes (zuerst) als verschieden von dem der atmosphärischen Luft (S. 111), nämlich zu $\delta = 0{,}004233$ nachwies.

Mit ganz entschiedenem Erfolge bekämpfte den Gay-Lussac'schen Satz, mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie, Clausius (im Jahre 1850), der später die Formel aufstellte[4]):

$$(k)\qquad \frac{s}{v_1} = M - N\alpha^t,$$

worin s das Volumen einer Gewichtseinheit gesättigten Wasserdampfes und v_1 das Volumen einer Gewichtseinheit atmosphärischer Luft unter demselben Drucke und bei derselben Temperatur t bezeichnet, M, N und α aber constante Größen sind, und zwar

$$M = 1{,}6630;\; N = 0{,}05527;\; \alpha = 1{,}007164.$$

Eine vortreffliche experimentelle Bestätigung erfuhr die Clausius'sche Formel durch die im Jahre 1860 veröffentlichten Versuche der Engländer Fairbairn und Tate[5]), deren Beobachtungsresultate in

---

[1]) Biot, Traité de Physique, T. I, Pg. 291.

[2]) Fortschritte der Physik. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft in Berlin. Bd. I, S. 101.

[3]) Holzmann, „Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe". Mannheim 1845, S. 21.

[4]) Die mechanische Wärmetheorie. Zweite Auflage. S. 158.

[5]) Experimental researches to determine the density of steam at different temperatures and to determine the law of expansion of superheated steam.

der nachstehenden Tabelle einerseits mit den früher angenommenen Zahlen, bei welchen für alle Temperaturen das specifische Gewicht 0,622 vorausgesetzt ist, und anderseits mit den aus vorstehender Gleichung (k) hervorgehenden Zahlen verglichen sind.

Temperatur in Centesimalgraden (= t)	Volumen eines Kilogramm gesättigten Wasserdampfes in Cubikmetern [1]).		
	Nach Gay-Lussac	Nach der Clausius' Gleichung (k)	Nach Fairbairn-Tate's Beobachtungen
58° 21′	8,38	8,23	8,27
77° 18′	3,84	3,74	3,72
92° 66′	2,18	2,11	2,15
118° 46′	0,954	0,911	0,891
137° 46′	0,562	0,530	0,514
144° 74′	0,466	0,437	0,432

Auf die sehr practische empirische Formel Zeuner's[2]) zur Berechnung des spec. Gewichtes oder der Dichte $\Delta = \frac{1}{v}$ des gesättigten Wasserdampfes, nämlich $\Delta = 0{,}6061\,(i)^{0{,}9393}$, wurde bereits S. 151 hingewiesen.

Schließlich ist hervorzuheben, daß die allererste solcher empirischer Formeln von Navier[3]) im Jahre 1835 aufgestellt wurde, von welcher Pambour[4]) und später auch Redtenbacher[5]) in ihren Dampfmaschinen-Theorien Gebrauch machten. Diese Formeln sind folgende:

Δ = Gewicht eines Cubikmeters gesättigten Wasserdampfes:

$\Delta = 0{,}50\,.\,i + 0{,}09$ (Navier), i Spannkraft in Atmosph.

$\frac{1}{\Delta} = \frac{10000}{1{,}421 + 0{,}000471\,.\,p}$ (Pambour), p Spannkraft in Kilogr. pro Quadratmeter.

$\Delta = \alpha + \beta p$ (Redtenbacher), p wie vorher etc.

hier $\begin{cases} \alpha = 0{,}0610;\ \beta = 0{,}0000510;\ \frac{\alpha}{\beta} = 1196 \text{ Dampf niederer Spannung.} \\ \alpha = 0{,}1427;\ \beta = 0{,}0000473;\ \frac{\alpha}{\beta} = 3018 \text{ Dampf v. hoher Spannung.} \end{cases}$

Philos. Transact. of the Royal Society of London (1860). Tome 150, Pg. 185 bis 222. Hieraus (mit Abbildungen begleitet) auszugsweise in meines Neffen (Prof. Rühlmann) Mech. Wärmetheorie, Bd. 1, S. 597 ff.

[1]) Ausführlicher bei Clausius (a. a. O.) und bei meinem Neffen (a. a. O.).

[2]) Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. 2. Auflage, S. 294.

[3]) Annales des Ponts et Chaussées. 1835, 1e Série, Vol. II, Pg. 148.

[4]) Théorie des machines à vapeur. Paris 1836. (Deutsche Uebersetzung, S. 60.)

[5]) Resultate für den Maschinenbau. Mannheim 1848, S. 205.

Als Schluß vorstehender geschichtlicher Notizen muß noch auf die von Clausius und Rankine im Jahre 1850 wohl gleichzeitig[1]) gemachte, auch für die practische Technik wichtige Entdeckung hingewiesen werden, nach welcher die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes negativ und durch die Formel (nach Clausius)[2]) dargestellt werden kann:

$$h = 1{,}013 - \frac{800{,}3}{273 + t}.$$

Referent hält für Pflicht, die von Clausius zu dieser Formel (a. a. O., S. 138) gemachten Bemerkungen hier wörtlich wiederzugeben. Sie lauten folgendermaßen:

„Der Umstand, daß die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes negative und zwar so große negative Werthe hat[3]), bildet eine wichtige Eigenschaft desselben. Man kann sich von der Ursache dieses eigenthümlichen Verhaltens in folgender Weise Rechenschaft geben. Wenn der Dampf zusammengedrückt wird, so wird durch die dabei verbrauchte Arbeit Wärme erzeugt, und diese Wärme ist mehr als ausreichend, um den Dampf um so viel zu erwärmen, daß er die Temperatur annimmt, zu welcher die neue Dichtigkeit als Maximum gehört. Man muß ihm daher, wenn er sich gerade nur in der Weise erwärmen soll, daß er gesättigt bleibt, einen Theil der erzeugten Wärme entziehen. In entsprechender Weise wird bei der Ausdehnung des Dampfes mehr Wärme verbraucht, als nöthig ist, um den Dampf um so viel abzukühlen, daß er gerade in dem Zustande als gesättigter Dampf bleibt. Man muß ihm also, wenn dieses letztere stattfinden soll, bei der Ausdehnung Wärme mittheilen (zuführen).

Sollte sich der ursprünglich gesättigte Dampf in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle befinden, so würde er bei der Zusammendrückung überhitzt werden, und bei der Ausdehnung sich theilweise niederschlagen."

§. 71.

Druck und Dichte einer elastischen Flüssigkeitssäule, in verschiedenen Höhepunkten, welche allein der Schwerkraftswirkung unterworfen ist.

Setzt man in Bezug auf die allgemeine Gleichung I, §. 7 (S. 16) voraus, daß die Raumcoordinatenachse Z mit der Schwerkraftsrichtung zusammenfällt, so ist $X = Y =$ Null, $Z = -g$ und, da ferner Δ statt γ zu schreiben sein wird, endlich nach §. 54 aber

---

[1]) Clausius trug die betreffende Abhandlung im Februar 1850 in der Berliner Academie vor. Rankine ebenfalls im Februar 1850 in der Edinburger Royal Society.

[2]) Die mechanische Wärmetheorie. Erster Band (2. Auflage), S. 137.

[3]) Die Formel giebt für:

$t =$	0°	50°	100°	150°	200°
h	— 1,916	— 1,465	— 1,133	— 0,879	— 0,676

$\varDelta = \frac{p}{k}$ ist, wenn $7992{,}655\,(1 + \delta t) = k$ gesetzt wird, ergiebt sich überhaupt aus gedachter Gleichung:

$$(1)\quad dp = -\frac{p}{gk}\,.\,gdz, \text{ d. i.}$$

$$k\,.\,\frac{dp}{p} = -dz.$$

Liegt der Coordinatenursprung A, Fig. 65, auf einer festen Fläche und findet im Abstande $AB = h$ die Pressung P, in der Entfernung $AC = z$ aber die Pressung $= \Pi$ statt, so folgt:

Fig. 65.

$$k\int_P^\Pi \frac{dp}{p} = -\int_h^z dz, \text{ d. i.}$$

$$k \operatorname{Lgnt} \frac{\Pi}{P} = -(z-h), \text{ woraus}$$

$$\text{I.}\quad \Pi = Pe^{-\frac{1}{k}(z-h)}, \text{ oder}$$

$$\text{II.}\quad P = \Pi e^{\frac{1}{k}(z-h)}$$

und weiter sich ergiebt:

$$\text{III.}\quad \varDelta = \frac{1}{k}\,Pe^{-\frac{1}{k}(z-h)}$$

Annäherungsweise läßt sich für geringe Werthe von $z - h$ setzen:

$$e^{\frac{1}{k}(z-h)} = 1 + \frac{z-h}{k},$$

weshalb aus II. wird:

$$P = \Pi + \frac{\Pi}{k}(z-h), \text{ d. i. wegen } \frac{\Pi}{k} = \varDelta,$$

$$\text{IV.}\quad P = \Pi + \varDelta\,(z-h).$$

Aus letzterer Gleichung ergiebt sich aber folgender Satz:

„Der Druck auf die Flächeneinheit in einem Punkte B einer elastischen Flüssigkeitssäule AC ist gleich dem Drucke im höchsten Punkte C derselben, vermehrt um das Gewicht des Flüssigkeitsprismas, vom Querschnitt gleich Eins, welches die Differenz der Abstände der Punkte B und C zur Höhe hat."

Es ist daher IV. ganz derselbe Ausdruck für luftförmige Flüssigkeiten, wie §. 10 für wasserförmige gefunden wurde.

Auf ähnliche Weise findet man aus III:

$$\varDelta = \frac{P}{k} - \frac{P(z-h)}{k^2},$$

oder weil $\frac{1}{k^2}$ ein sehr kleiner Werth ist:

$$\text{V.}\quad \varDelta = \frac{P}{k}, \text{ d. h.}$$

bei **sehr** geringen verticalen Erhebungen wird auch die elastische Flüssigkeit, annäherungsweise, als gleich dicht betrachtet werden können.

Zusatz. Vorstehende Entwickelungen gelten nur für Flüssigkeitssäulen von solchen Höhen, innerhalb welchen die Schwerkraft als eine constante Kraft betrachtet werden kann, ferner unter Voraussetzung überall gleicher Temperatur und für die geographische Breite, wofür Δ berechnet wurde.

Bei ganz beliebigen Höhen und mit Beachtung der letztbemerkten Umstände, gestalten sich die betreffenden Rechnungen folgendermaßen. Zuerst ist nach **Regnault**[1]) für eine beliebige geographische Breite das Gewicht Δ eines Cubikmeters atmosphärische Luft bei $0^m,76$ Barometerstande oder 10333 Kil. Pressung pro Quadratmeter, Null Grad Temperatur und an dem Spiegel des Meeres:

$$\Delta = 1{,}292673\,(1 - 0{,}002836\,.\cos 2\varphi),$$

wenn φ die geographische Breite bezeichnet.

Für die mittlere Temperatur $= \tau$ in der ganzen Flüssigkeitssäule und für die Pressung $= p$ auf jeden Quadratmeter:

Fig. 66.

$$\Delta = \frac{1{,}292673\,(1 - 0{,}002836 \cos 2\varphi)\,p}{10333\,(1 + \delta\tau)}.$$

Hiernach sei AMN, Fig. 66, eine Luftsäule von der Höhe $AN = z_n$ über der Oberfläche der Erde. Die Pressung in einer beliebigen Schicht D, deren Höhe $AD = z$ ist, sei $= p$, die Acceleration der Schwerkraft daselbt $= G$.

Zufolge eines bekannten Gesetzes erhält man vorerst, wenn der mittlere Erdradius $= 6366198$ Meter mit r bezeichnet wird: $G = \dfrac{gr^2}{(r+z)^2}$. Ferner wenn man wiederum setzt: $\Delta = \dfrac{p}{k}$ also

$$(2) \quad k = \frac{10333\,(1 + \delta\tau)}{1{,}292673\,(1 - 0{,}002836 \cos 2\varphi)}$$

nach (1) dieses Paragraphen:

$$dp = -\frac{p}{gk}\cdot\frac{gr^2}{(r+z)^2}\,.\,dz, \text{ d. i.}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{r^2}{k}\,\frac{dz}{(r+z)^2}.$$

Bezeichnet man die Pressung in einer Schicht mn im Abstande $= z_0$ von der Erdoberfläche mit p_0, und die Pressung in der Schicht MN mit p_n, so liefert letztere Gleichung durch Integration den Ausdruck:

$$\text{Lgnt}\,\frac{p_0}{p_n} = \frac{r^2}{k}\cdot\frac{z_n - z_0}{(r+z_0)\,(r+z_n)}.$$

Hier $z_n - z_0 = Z$, $r + z_0 = R$ gesetzt, giebt $r + z_n = R + Z$, also:

$$\text{Lgnt}\,\frac{p_0}{p_n} = \frac{r^2}{k}\cdot\frac{Z}{R\,(R+Z)}.$$

[1]) a. a. O., S. 112, wobei der Coefficient 0,002836 nach Biot genommen ist.

In den meisten Fällen kann man R mit r verwechseln, so daß man erhält:

$$\text{VI.}\quad \operatorname{Lgnt}\frac{p_0}{p_n} = \frac{r}{k} \cdot \frac{Z}{r+Z},$$

sonach auch:

$$\text{VII.}\quad p_n = p_0 e^{-\frac{r}{k}\frac{z}{r+z}},$$

und endlich:

$$\text{VIII.}\quad \varDelta = \frac{p_n}{k} = \frac{p_0}{k} e^{-\frac{r}{k}\frac{z}{r+z}}.$$

Beispiel. Wie groß ist die Pressung der atmosphärischen Luft und wie groß das Gewicht eines Cubikmeters derselben in der Höhe von 292 Meter über dem Meerespiegel und in der geographischen Breite 52° 22′ 15″ (Egidienkirche in Hannover)?

Auflösung. Zuerst berechnet sich

$k = 8528$; $\frac{r}{k} = 746{,}5$; $\frac{r}{k}\frac{z}{r+z} = 0{,}03423$. Sodann ist

$$p_n = \frac{p_0}{e^{0{,}03423}} = \frac{p_0}{1{,}0348} = \frac{10333}{1{,}0348} = 9988{,}4 \text{ Kil. pro Quadratmeter};$$

endlich:

$$\varDelta = \frac{10336}{1{,}0348 \,.\, 8528} = 1{,}17115 \text{ Kil.}$$

§. 72.

Höhenmessen mit dem Barometer.

Die im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen lassen sich mit Anbringung einiger Correctionen zur Berechnung von Höhen (oder Tiefen) an der Oberfläche unserer Erde verwenden, sobald es möglich war, die Barometerstände an dem oberen und unteren Endpunkte (Station) und die betreffenden Temperaturen von Quecksilber und Luft für dieselben Zeiten zu beobachten.

Eine betreffende, von Laplace hierzu abgeleitete Formel, die als Ziel nachstehender Rechnungen betrachtet werden soll, ist folgende:

$$Z = A\,(1 + 0{,}002845 \,.\, \cos 2\varphi)\left[1 + \frac{t_0 + t_n}{500}\right] \times \left\{\left(1 + \frac{Z}{r}\right) \operatorname{Lg} \frac{b_0}{b_n\left[1 + \frac{\tau_0 - \tau_n}{5550}\right]} + 0{,}8686\,\frac{Z}{r}\right\},$$

oder wenn man $b_n\left[1 + \frac{\tau_0 - \tau_n}{5550}\right]$ durch b ersetzt:

$$Z = A\,(1 + 0{,}002845 \,.\, \cos 2\varphi)\left[1 + \frac{2(t_0 + t_n)}{1000}\right] \times \left\{\left(1 + \frac{Z}{r}\right) \operatorname{Lg} \frac{b_0}{b} + 0{,}8686\,\frac{Z}{r}\right\},$$

wie Laplace in seiner Mécanique Céleste (Oeuvres de Laplace, Tome Quatrième, Seconde Partie, Livre Dixième), Pg. 328, findet.

Hierbei sind die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehalten und von den neuen Größen ist A ein Zahlenwerth (der barometrische Coefficient), die Buchstaben mit den Indexen Null und n beziehen sich respective auf die untere und obere Station, ferner sind die Lufttemperaturen mit t, die Quecksilbertemperaturen mit τ und die Barometerstände mit b bezeichnet.

Zur Ableitung dieser Gleichung benutzen wir den vorher unter VI gefundenen Ausdruck

$$\text{(1)}\quad \text{Lgnt}\,\frac{p_0}{p_n} = \frac{r}{k}\,\frac{Z}{r+Z},$$

in welchem vor Allem die Pressungen p_0 und p_n durch die Quecksilbersäulen B_0 und B_n der Barometerstände in $\overline{MN}$ und $\overline{mn}$, Fig. 66, zu ersetzen sind.

Hierbei ist aber, wie im Zusatze des vorigen Paragraphen für die Luftsäule geschah, die Einwirkung der veränderlichen Schwerkraft in großen Abständen vom Erdmittel zu beachten.

Es ist daher zu setzen: $p_n = \Delta B_n \left(\frac{Z}{r+z_n}\right)^2$ und auch

$$p_0 = \Delta B_0 \left(\frac{r}{r+z_0}\right)^2.\ \text{Sodann hieraus}$$

$$\frac{p_0}{p_n} = \frac{B_0}{B_n}\,\frac{(r+z_n)^2}{(r+z_0)^2} = \frac{B_0}{B_n}\,\frac{(R+Z)^2}{R^2} = \frac{B_0}{B_n}\left(1+\frac{Z}{R}\right)^2,$$

oder wenn man wieder R durch r ersetzt:

$$\frac{p_0}{p_n} = \frac{B_0}{B_n}\left(1+\frac{z}{r}\right)^2.$$

Sodann wird aus (1):

$$\text{Lgnt}\,\frac{B_0}{B_n}\left(1+\frac{Z}{r}\right)^2 = \frac{r}{k}\,\frac{Z}{r+Z},\ \text{oder}$$

auf Z im Zähler des rechten Theiles reducirt:

$$\text{(2)}\quad Z = \frac{k}{r}(r+Z)\left\{\text{Lgnt}\,\frac{B_0}{B_n} + 2\,\text{Lgnt}\left(1+\frac{Z}{r}\right)\right\}.$$

Beide Quecksilbersäulen B_0 und B_n sind von Null Grad Temperatur vorausgesetzt, was bei den wirklich am Barometer an beiden Stationen abgelesenen b_0 und b_n nicht der Fall sein wird. Es sind daher erstere durch letztere auszudrücken, denen respective die Temperaturen τ_0 und τ_n entsprechen mögen.

Sodann hat man aber ohne Weiteres nach §. 44 und §. 46:

$$b_0 = B_0\left(1+\frac{\tau_0}{5550}\right);\ b_n = B_n\left(1+\frac{\tau_n}{5550}\right),$$

woraus annäherungsweise, aber genau genug, zu reduciren ist:

$$\frac{B_0}{B_n} = \frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]}.$$

Deshalb wird aus (2):

$$\text{(3)}\quad Z = \frac{k}{r}(r+Z)\left\{\text{Lgnt}\,\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]} + 2\,\text{Lgnt}\left(1+\frac{Z}{r}\right)\right\}$$

Um den natürlichen Logarithmen des ersten Gliedes der Parenthese durch einen Brigg'schen Logarithmen auszudrücken, hat man bekanntlich ersteren mit der Zahl (dem Modul) $m = 2{,}302585$ zu multipliciren, oder durch 0,4342944 zu dividiren, so daß man statt (3) erhält:

$$(4)\quad Z = mk\left(1+\frac{Z}{r}\right)\left\{ \mathrm{Lg}\,\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]} + \frac{2}{m}\,\mathrm{Lgt}\left(1+\frac{Z}{r}\right)\right\}.$$

Da in allen Fällen Z gegen r sehr klein sein wird, so läßt sich annäherungsweise $\mathrm{Lgnt}\left(1+\frac{Z}{r}\right) = \frac{Z}{r}$ setzen, daher, so wie wegen $\frac{2}{m} = 0{,}8686$, statt (4) zu schreiben ist:

$$(5)\quad Z = mk\left\{ \mathrm{Lg}\,\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]} + 0{,}8686\,\frac{Z}{r}\right\}\left(1+\frac{Z}{r}\right).$$

Führt man hier den Werth von k aus §. 71, Gleichung (2), Seite 172, ein, beachtet, daß $\tau = \frac{t_0+t_n}{5550}$ und faßt die bestimmten Größen von k mit dem Factor m in dem einzigen Coefficienten A zusammen, so wird aus (5):

$$Z = A\,\frac{1+\frac{\delta(t_0+t_n)}{2}}{1-0{,}002837\cos 2\varphi}\left\{ \mathrm{Lg}\,\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]} + 0{,}8686\,\frac{Z}{r}\right\}\times \left(1+\frac{Z}{r}\right),$$ oder auch:

$$Z = A\,(1+0{,}002837\cos 2\varphi)\left[1+\frac{\delta(t_0+t_n)}{2}\right]\left\{ \mathrm{Lg}\,\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]} + 0{,}8686\,\frac{Z}{r}\right\}\left(1+\frac{Z}{r}\right).$$

Multiplicirt man jetzt mit dem letzten Factor $\left(1+\frac{Z}{r}\right)$ in die große Parenthese, vernachlässigt aber gedachten Factor in Bezug auf das letzte Glied, schreibt $1+0{,}002845\cos 2\varphi$ statt des betreffenden Werthes in (5), so erhält man die bereits oben aufgeführte Formel von Laplace.

Was nun den barometrischen Coefficienten A betrifft, so kann man diesen entweder berechnen, indem $A = mk$ ist (also nach unseren Zahlenwerthen $= 18411$ sein würde), oder, was jedenfalls vorzuziehen, als Mittelwerth aus einer großen Anzahl von Höhen Z, die trigonometrisch gemessen worden sind, berechnen. So nimmt

Laplace[1]), nach Ramond's Messungen, $A = 18336$ Meter. Gauß[2]) setzt $A = 18382$ Meter, Bessel nimmt $A = 18316$[3]) u. s. w.

Zusatz 1. Seit Laplace hat die Formel zum Höhenmessen mit dem Barometer in nachbemerkten drei Richtungen Verbesserungen erfahren[4]). Man hat

1. Die Constanten mit den neueren physikalischen Forschungen, namentlich Regnault's, in Einklang gebracht.

2. Auf den Feuchtigkeitszustand der Luft angemessen Rücksicht genommen.

3. Hierdurch die willkürlichen Aenderungen der Constanten vermieden, welche (außer Bessel) alle früheren Autoren über barometrische Höhenmessungen in der Absicht vorgenommen hatten, eine größere Uebereinstimmung der letzteren mit trigonometrischen Höhenmessungen zu bewirken.

Von neueren, mit diesen Verbesserungen ausgestatteten Formeln verdienen nachfolgende drei besondere Beachtung:

1. Die Formel von Bauernfeind[5]):

$$\text{I.}\quad \overset{\text{met.}}{h} = 18404{,}9\left(1 + 0{,}0026\,.\cos 2\varphi\right)\left(1 + \frac{2z+h}{r}\right)\left(1 + \tfrac{3}{8}\psi\right) \times$$
$$\left[1 + 0{,}003665\left(\frac{t_0+t_n}{2}\right)\right]\left\{\text{Lgt}\frac{B_0}{B_n} + \text{Lgt}\left(1 - \frac{T_0-T_n}{5550}\right) + 0{,}86859\frac{h}{r}\right\}.$$

Die zu berechnende Höhe ist hier mit h, die Höhe der unteren Station über dem Meere mit z bezeichnet. Ferner sind B_0 und B_n die direct abgelesenen Barometerhöhen, während durch den Factor $(1 + \frac{3}{8}\psi)$ der Einfluß der mit Psychrometern beobachteten Luftfeuchtigkeit corrigirt wird.

2. Die Formel von Richard Rühlmann[6]):

$$\text{II.}\quad \overset{\text{met.}}{h} = 18400{,}2\left(1{,}00157 + 0{,}00367\,\frac{t_0+t_n}{2}\right)\left(1 + 0{,}378\,\frac{\frac{\sigma'}{b_0} + \frac{\sigma''}{b}}{2}\right)$$
$$\left(1 + 0{,}00262\cos 2\varphi\right) \times \left(1 + \frac{2z+h}{6378150}\right) \times \text{Lg}\,\frac{b_0}{b}.$$

Hier bezeichnen σ' und σ'' die Dampfdrücke in der unteren und oberen Station, b_0 und b die correspondirenden auf die Temperatur 0° des Quecksilbers und auf die Normaltemperatur der Scala reducirten Barometerstände.

---

[1]) a. a. O., p. 326.

[2]) Bode's astronomisches Jahrbuch für 1818, S. 170.

[3]) Astronomische Nachrichten Nr. 279, Bd. XXI, S. 187 und hieraus Poggend. Annalen, Bd. XXXVI (1835), S. 187. Für Toisen ist hier $A = 9397{,}74$ und daher für Metermaaß (1 Toise = 1,94903 Meter und 1 Meter = 0,51307 Toisen) : $A = 18316^m$.

[4]) Grashof im VIII. Bande (1864), S. 224, der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

[5]) Dr. C. M. Bauernfeind, Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen. München 1862.

[6]) Richard Rühlmann, Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. Leipzig 1870.

3. Die Formel von Grashof[1]):

$$\text{III.}\quad \overset{\text{met.}}{h} = 18404\ \text{Lgnt}\left\{\frac{b_0}{b}\left(1{,}0025 + \frac{t_0+t}{543}\right)\left(1+\tfrac{3}{8}\psi\right)\times \left(1+0{,}0026\,.\,\cos 2\varphi\right)\left(1+\frac{2z+h_1}{r}\right)\right\}.$$

Auch hier sind b_0 und b die reducirten Höhen der beobachteten Quecksilbersäulen, während $(1 + \frac{3}{8}\psi)$ der Feuchtigkeitscorrector ist und h_1 denjenigen Werth von h bezeichnet, welcher ohne Rücksicht auf den Factor $\left(1 + \frac{2z+h_1}{r}\right)$ gefunden wird.

Da es geradezu gleichgültig ist, mit welcher dieser drei Formeln eine betreffende Höhe berechnet wird, indem ihre Abweichungen (bei den sonst durch keine Formel überhaupt zu corrigirenden Mängeln aller barometrischen Höhenmessungen) fast Null sind, so wählt der Verfasser hier die Formel III zur Berechnung eines Beispieles, weil diese für die Zwecke seines Buches am Wenigsten Hülfstabellen erfordert[2]).

Aus letzterem Grunde folgen hier noch einige Nachträge in Bezug auf die Grashof'sche Formel.

Zunächst nimmt dieser Autor $r = 6370000$ Meter, setzt (genau genug)

$$\text{Lgnt}\left(1+\frac{2z+h_1}{r}\right) = 0{,}4343\ \frac{2z+h_1}{6370000} = \frac{2z+h_1}{14670000},\ ^{3})$$

und schreibt, wenn $2\varphi = 90 + x$, also $\cos 2\varphi = \cos(90+x) = -\sin x$ eingeführt wird:

$$\text{Lgnt}\,(1 + 0{,}0026\cos 2\varphi) = \text{Lgnt}\,(1 - 0{,}0026\sin x),\ \text{d. i.}$$
$$= 0{,}4343\ \text{Lgnt Brgg}\,(1 - 0{,}0026\,.\,\sin x),\ \text{oder}^{3})$$
$$= -\,0{,}4343\,.\,0{,}0026\,.\,\sin x.$$

Wenn ferner τ_0 und τ Temperaturen (beziehungsweise in der oberen und unteren Station) sind, welche mittelst eines Psychrometers (Thermometer mit angefeuchteten Kugeln) beobachtet wurden, setzt Grashof:[4])

$$\psi = \frac{\beta_0+\beta}{b_0+b} - k_0\,\frac{t_0-\tau_0}{2} - k\,\frac{t-\tau}{2},$$

räth $k_0 = k = 0{,}0008$ zu nehmen, wenn τ_0 respective $\tau > 0$, dagegen $k_0 = k = 0{,}00069$ für τ_0 respective $\tau < 0$ ist und giebt für β (in Millimetern Quecksilbersäulenhöhe) folgende Tabelle:

---

[1]) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. VIII (1864), S. 226, so wie „Theoretische Maschinenlehre", Bd. 1 (1875), S. 368.

[2]) Die hypsometrischen Tafeln meines Neffen finden sich übrigens auch in der 9. Auflage meiner Logarithm.-trigonometr. und anderer für Rechner nützlichen Tafeln. (Es sei für manche Leser hier bemerkt, daß das Wort hypsos aus der griechischen Sprache entlehnt ist, wo es Höhe, Gipfel etc. bezeichnet.)

[3]) Bekanntlich ist approximativ $\text{Lgnt}\,(1 \pm y) = \pm y$, wenn y klein genug angenommen wird. Oder für Brigg'sche Logarithmen:

$$\text{Lgnt}\,(1 \pm y) = 0{,}4343\ \text{Lgnt Brgg}\,(1 \pm y) = \pm\,0{,}4343\,.\,y.$$

[4]) Grashof leitet die Formel für ψ aus der Psychrometerformel

$$b_0 = \beta_0 - k_0\,(t_0 - t_0)\,b$$

ab, wobei er zugleich verweist auf Mousson, Physik auf Grundlage der Erfahrung. Zweite Auflage, S. 159.

τ	β	τ	β	τ	β	τ	β	τ	β
— 14	1,52	— 6	2,89	+ 2	5,28	+ 10	9,13	+ 18	15,35
— 13	1,65	— 5	3,11	+ 3	5,62	+ 11	9,75	+ 19	16,34
— 12	1,80	— 4	3,36	+ 4	6,03	+ 12	10,42	+ 20	17,40
— 11	1,95	— 3	3,62	+ 5	6,47	+ 13	11,13	+ 21	18,50
— 10	2,11	— 2	3,90	+ 6	6,94	+ 14	11,88	+ 22	19,67
— 9	2,28	— 1	4,20	+ 7	7,44	+ 15	12,68	+ 23	20,91
— 8	2,47	0	4,52	+ 8	7,96	+ 16	13,52	+ 24	22,21
— 7	2,67	+ 1	4,87	+ 9	8,52	+ 17	14,41	+ 25	23,58

Beispiel. Im Jahre 1856 wurde von Bauernfeind[1]) eine der bedeutendsten Höhen des bayerischen Hochgebirges, der Miesing[2]), trigonometrisch und barometrisch gemessen. Letztere Messungen lieferten folgende Werthe:

$b_0 = 0{,}6916$ Mtr. $t_0 = 13^0{,}6$ $\tau_0 = 12^0$
$b = 0{,}6085$ „ $t = 6^0{,}1$ $\tau = 6^0$ $z = 875$ Mtr., $\varphi = 47^0\ 40'$.

Ferner fand man $\beta_0 = 10{,}42$ und $\beta = 6{,}94$ Millimeter. Fs fragt sich, welche Werthe die Grashof'sche Formel liefert.

Auflösung. Zunächst findet man ohne Weiteres (die einzelnen Glieder beziehungsweise mit B, C, D, E, F und G bezeichnet):

Lgnt 18404 ($= B$) 4,264912
Lgnt (Lgnt b_0 — Lgnt b) ($= C$) . . . . . 0,745028 — 2
Lgnt $\left[1{,}0025 + \frac{t_0 + t}{543}\right]$ ($= D$) 0,016660
Lgnt $(1 + \frac{3}{8}\psi)$ ($= E$) 0,002166
$B + C + D + E =$ 3,028596

Ferner

$$\text{Lgnt}\,(1 + 0{,}0026 \,.\, \cos 2\varphi) = 1 + 0{,}0026 \,.\, \cos (90^0 + 5^0\ 20'),$$ d. i.

wegen $\sin 5^0\ 20' = 0{,}09295$ approximativ:

$$\text{Lgnt}\,(1 - 0{,}0026 \,.\, \sin 5^0\ 20') = -\,0{,}4343 \,.\, 0{,}0026 \,.\, \sin 5^0\ 20'$$
$$= -\,0{,}4343 \,.\, 0{,}0026 \,.\, 0{,}09295,$$
$$= -\,0{,}000105\ (= -F),$$ folglich
$$B + C + D + E - F = 3{,}028596 - 0{,}000105,$$ d. i.
$$= 3{,}028491 = \text{Lgnt}\ h_1,$$
folglich $h_1 = 1068{,}0$ Meter.

Endlich berechnet sich noch:

$$\frac{2z + h_1}{14670000} = \frac{2 \,.\, 815 + 1068{,}0}{14670000} = 0{,}00018\ (= G).$$

Daher schließlich:

$$\text{Lgnt}\ h = B = C + D + E - F + G = 3{,}028491 + 0{,}000180,$$
$$\text{Lgnt}\ h = 3{,}028671,$$ d. i.
$$h = 1068{,}20 \text{ Meter},$$

[1]) Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen etc. München 1862, S. 34.

[2]) Südöstlich von Tegernsee, unweit Rotach.

während die (höchst genaue) trigonometrische Messung ergab:

$$h = 1068{,}80 \text{ Meter.}$$

Zusatz 2. Uebereinstimmungen vorstehender Art, zwischen barometrischen und trigonometrischen Höhenmessungen, werden, von Gegnern des erstgenannten Meßverfahrens, mehr als zufällig bezeichnet, während wieder andere Geometer den trigonometrischen Höhenmessungen kein Vertrauen schenken wollen. Zwischen diesen extremen Urtheilen liegt die Wahrheit in der Mitte. Bauernfeind spricht sich hierüber sowohl S. 2, als auch S. 143 (am Ende seines vorgenannten Buches) dahin aus, daß die bedeutenden Differenzen zwischen barometrischen und trigonometrischen Höhenmessungen (abgesehen von groben Beobachtungsfehlern) hauptsächlich von dem großen Horizontalabstande der Stationen, dem Unterschiede in der Beobachtungszeit, der zu geringen Zahl von Beobachtungen und der Nichtberücksichtigung der Wärmestrahlung des Bodens herkommen.

Hinsichtlich des Nivellements von Eisenbahnen und Chausseen ist aber auch Bauernfeind der Ansicht, daß für solche Zwecke die barometrische Meßmethode nur zu ganz vorläufigen Terrainuntersuchungen empfohlen werden kann. Ueberhaupt, bemerkt dieser Autor, daß in allen Fällen, wo die zu bestimmenden Höhenunterschiede weniger als 100 Meter betragen, die trigonometrischen und insbesondere die nivellatorischen Messungen, den barometrischen weit vorzuziehen sind [1].

Die günstigsten Zeiten für Barometer-Beobachtungen hat mein Neffe in folgender Tabelle zusammengestellt: [2])

Monat.	Vorm.	Nachm.	Monat.	Vorm.	Nachm.
Januar	Nur Mittag 1 Uhr		Juli	$6\frac{1}{2}$ Uhr	$9\frac{1}{2}$ Uhr
Februar	10 Uhr	4 Uhr	August	7 „	$7\frac{1}{2}$ „
März	8 „	6 „	September	8 „	6 „
April	$7\frac{1}{2}$ „	7 „	October	10 „	$3\frac{1}{2}$ „
Mai	7 „	7 „	November	$10\frac{1}{2}$ „	$2\frac{1}{2}$ „
Juni	$6\frac{1}{2}$ „	$9\frac{1}{2}$ „	December	Ganz zu vermeiden.	

Zusatz 3. Ueber die Verwendung der sogenannten Aneroidbarometer zum Höhenmessen muß der Verfasser auf folgende zwei Schriften verweisen:

Bauernfeind, Verwerthung des Naudet'schen Aneroidbarometers. München 1874.

Goldschmid-Koppe, Das Aneroidbarometer etc. Zürich 1877

[1]) Dr. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde. Dritte Auflage (Stuttgart 1869), §. 378, S. 692. In der 1876 erschienenen 5. Auflage dieses Werkes befindet sich die betreffende Stelle im 2. Bande, S. 343.

[2]) Dr. Richard Rühlmann, Die barometrischen Höhenmessungen etc. Leipzig 1870, S. 116.

§. 73.

Geschichtliche Notizen[1]) das barometrische Höhenmessen betreffend.

Bald nach Erfindung des Barometers durch Toricelli[2]), im Jahre 1643, wodurch so viel zum Umsturze der alten scholastischen Physik beigetragen wurde, gelangte man auch zu dem verhältnißmäßig naheliegenden Schlusse, daß, wenn man mit einem solchen Barometer eine nicht zu geringe Höhe erstiege, die Quecksilbersäule (merklich) kürzer und die sogenannte Toricelli'sche Leere größer werden müßte. Der geistreiche französische Geometer Pascal[3]) ließ diesen Gedanken zuerst im Jahre 1648 durch seinen Schwager Perrier in Clermont (Auvergne) prüfen, indem er diesen veranlaßte, ein Barometer auf den etwa 500 Toisen[4]) (= 3000 Pariser Fuß = 974,52 Meter) hohen Puy de Dôme zu tragen, wobei derselbe richtig fand, daß die Quecksilbersäule auf dem Gipfel gegen 3 Zoll kürzer war als im Jardin des Minimes in Clermont. Nach diesem Versuche erklärte Pascal das Barometer als das einfachste Mittel, um bedeutende Höhenunterschiede indirect zu messen.

Eine Formel, mittelst welcher man eine betreffende Höhe ($= h$) aus den gemessenen Barometerständen berechnen kann, stellte zuerst Mariotte auf. Bezeichnet man die Differenz der Barometerstände an der oberen und unteren Station, d. i. (nach den Bezeichnungen in der Grashof'schen Formel) $b_0 - b$ mit z und wird b_0 und b in Pariser Linien ausgedrückt, so fand Mariotte:

$$\overset{\text{Par. Fuss}}{h} = 63z + \tfrac{3}{8}\left(\frac{z-1}{2}\right).$$

Den richtigen theoretischen Weg zur Entwicklung einer Formel, d. h. die Ableitung des Gesetzes der Druckabnahme mit der Höhe (nach dem Boyle'schen Gesetze) unter gleichzeitiger Bestimmung des specifischen Gewichtes der Luft und des Quecksilbers, schlug zuerst Halley[5]) ein, dessen Formel in englischen Maaßen ausgedrückt, also lautet:

$$h = 62162{,}795 \text{ Lgnt } \frac{B_0}{B}, \text{[6])}$$

worin B_0 und B die direct abgelesenen Barometerstände bezeichnen.

Die Correction wegen der Abnahme der Schwere bei Entfernung

---

[1]) Dem Verfasser war hier besonders der Abschnitt: „Die Geschichte der barometrischen Höhenmessungen", in der Schrift seines Neffen, des Herrn Prof. Rühlmann in Chemnitz, von Nutzen.

[2]) Toricelli, geb. 1608 zu Faenza, gest. 1647 zu Florenz.

[3]) Pascal, geb. zu Clermont den 19. Juni 1623, gest. den 19. August 1662 zu Paris. Pascal's Hauptwerk, welches 1658 in Paris erschien, war betitelt: „Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air."

[4]) 1 Toise = 1,94903 Meter und 1 Meter = 0,51307 Toisen.

[5]) Halley, geb. 1656 in London, gest. 1742 in Greenwich.

[6]) A discurse of the rule of the decrease of the hight of the mercury of the barometer etc. in: Philos. Transact. 1686 and 1687. T. 16, pag. 104.

vom Erdcentrum geschah zuerst 1771 durch Fontana[1]), obgleich der Gedanke hierzu schon von Newton im Jahre 1686 ausgesprochen worden war.

Von der größten Wichtigkeit waren nachher die Versuche Deluc's[2]), welcher zuerst den Einfluß zu berücksichtigen lehrte, den die Temperatur sowohl auf das Gewicht der Luft, als auf die Höhe der Quecksilbersäule ausübte.

Die von Deluc aufgestellte Formel diente u. A. mit ihren Constanten zur Berechnung der berühmten Messungen, welche Saussure im Jahre 1787 am Montblanc und 1788 am Col de Géant anstellte.

Auf alle zu beachtenden Umstände nahm endlich Laplace bei Aufstellung seiner berühmten Formel für barometrische Höhenmessungen (S. 173) Rücksicht, welche er im ersten Bande seiner Mécanique céleste (Paris 1799) entwickelte, und über welche man der Hauptsache nach eigentlich noch nicht hinaus gekommen ist.

Ungeachtet der mathematischen Strenge, womit Laplace seine Formel entwickelt hatte, stimmten deren Resultate nicht genau genug mit trigonometrischen Messungen oder Nivellements überein. Gestützt auf eine sehr große Anzahl directer Messungen, welche der französische Geometer Ramond[3]) namentlich am Pic du Midi de Bigorre (in den Pyrenäen) anstellte, zeigte sich, daß man den Laplace'schen Coefficienten, nämlich 18336 Meter, für Mittagsbeobachtungen auf 18393 Meter erhöhen müsse.

Mit Rücksicht dessen, was bereits oben über die Formeln von Bessel, Bauernfeind, Richard Rühlmann und Grashof mitgetheilt wurde, sind wir soweit zum Schlusse der geschichtlichen Notizen über barometrische Höhenmessungen gelangt, daß wir zur Vervollständigung nur noch der Männer gedenken, welche sich um das Entwerfen von Tafeln (hypsometrische Tafeln), zur möglichst bequemen Berechnung von Höhen aus barometrischen Messungen, verdient machten. Es sind dies hauptsächlich, mit Angabe der betreffenden Schriften, folgende:

Lindenau[4]), Tables barométriques pour faciliter le calcul des nivellements et des mesures des hauteurs par le baromètre. Gotha 1809.

Oltmanns[5]), Tafeln in: Voyage de Humboldt et Bonpland. Astronomie I, Nivellement barométrique p. 286, 289 (1811).

Gauss[6]), die kleinsten der bis jetzt bekannt gewordenen Tafeln in Bode's astronomischem Jahrbuche für 1818, p. 171 und desgl. 1836, p. 138.

Der neuesten Tafeln von Richard Rühlmann wurde bereits oben S. 177 gedacht.

---

[1]) Delle altezze barometriche et di alcuni insigni paradossi, Saggio analitico. Pavia 1771.

[2]) Recherches sur les modifications de l'atmosphère. Paris 1772.

[3]) Mémoires sur la formule barométrique de la Mécanique céleste. Paris 1808—1811.

[4]) Lindenau, geb. 1779 in Altenburg, gest. 1854 ebendaselbst.

[5]) Oltmanns, geb. 1783 in Wittmund (Ostfriesland), gest. 1833 in Berlin.

[6]) Gauss, geb. 30. April 1777 in Braunschweig; gest. 23. Febr. 1855 in Göttingen.

§. 74.

Scheinbares und wahres Gewicht der Körper[1]).

Wie bereits §. 50 bemerkt, gilt das Princip des Archimedes auch für luftförmige Körper, so daß beim Wägen irgend eines Körpers in der atmosphärischen Luft stets eine geringere Gewichtsangabe erhalten wird, als dies Gewicht in Wirklichkeit beträgt. Man kann deshalb auch das Gewicht eines in der atmosphärischen Luft abgewogenen Körpers sein scheinbares Gewicht, das im luftleeren Raume aber sein wahres Gewicht nennen[2]).

Nachstehende Entwickelungen werden dazu dienen, das Gewicht Q eines Körpers für den luftleeren Raum durch Abwägen in der Luft mittelst einer gewöhnlichen doppelarmigen, gleicharmigen Waage zu finden.

Bezeichnet (wie §. 9 etc.) γ die Dichte des reinen Wassers bei Null Grad Temperatur und S das specifische Gewicht des Körpers Q, so ist das Volumen von Q bei 0° C.:

$$\frac{Q}{\gamma S},$$

bei der Temperatur t aber, wenn e die eigenthümliche Ausdehnung des Körpers Q bezeichnet:

$$\frac{Q}{\gamma S}(1+et)^3.$$

Ist nun $\varDelta$ wie bisher die Dichte der atmosphärischen Luft bei der Temperatur t, im Augenblicke der Wägung, so verdrängt derselbe Körper ein Luftvolumen vom Gewichte:

$$\varDelta \frac{Q}{\gamma S}(1+et)^3.$$

Für die Gewichtsstücke, deren man sich bedient, mögen q, s, ε dasselbe bedeuten, was Q, S und e für den abzuwägenden Körper, so findet man, daß die Gewichtsstücke ein Volumen Luft verdrängen, deren Gewicht ist:

---

[1]) Ausführlicher wird über diesen Gegenstand in folgenden Werken gehandelt: Jamin-Bouty, „Cours de Physique". 3e Edit. Tome II, Pg. 131, unter der Ueberschrift „Mesure des Poids" etc. — Wüllner, Lehrbuch der Elementarphysik. Bd. III (Dritte Ausgabe), S. 118, unter der Ueberschrift „Berücksichtigung der Temperatur bei Wägungen" etc.

[2]) Bemerkt muß hier vor Allem werden, daß sich die in Europa gebräuchlichsten Gewichtseinheiten, das Pfund und das Kilogramm, auf den luftleeren Raum beziehen, also wahres Gewicht sind, daß daher betreffende Gewichtsstücke (aus Eisen, Messing, Platina etc.), welche auf der doppelarmig, gleicharmigen Waage abzuwägenden Körpern das Gleichgewicht halten, ebenfalls wahre Gewichte darstellen und alle unsere Gewichtsangaben im practischen Leben, in Pfunden oder Kilogrammen, streng genommen, als allein für den luftleeren Raum gültig zu betrachten sind.

Der Grund, die Gewichtseinheiten der Körper für den luftleeren Raum festzustellen, liegt einfach darin, daß man Irrungen vermeiden will, welche offenbar aus der Verschiedenheit des Gewichtes eines Körpers entstehen müssen, wenn derselbe bei verschiedenen Barometer- und Thermometerständen in der Luft gewogen wird.

$$\Delta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3.$$

Der Druck auf die eine Waagschale ist daher:

$$Q - \Delta \frac{Q}{\gamma S} (1 + et)^3,$$

auf die andere:

$$q - \Delta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3.$$

Für's Gleichgewicht ergiebt sich also:

$$(1) \quad Q - \Delta \frac{Q}{\gamma S} (1 + et)^3 = q - \Delta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3,$$

woraus folgt:

$$(2) \quad Q = q + \Delta \frac{Q}{\gamma S} (1 + et)^3 - \Delta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3.$$

Für die meisten Fälle erhält man die Resultate genau genug, wenn man Q, im rechten Theile der Gleichung, mit q verwechselt, also setzt:

$$Q = q \left\{ 1 + \frac{\Delta}{\gamma} \left[\frac{(1 + et)^3}{S} - \frac{(1 + \varepsilon t)^3}{s} \right] \right\}.$$

Nach §. 54 ist $\frac{\Delta}{\gamma} = \frac{B}{587693,94} \cdot \frac{1}{1 + \delta t}$, wenn B die Barometerhöhe im Augenblicke der Wägung in Millimetern bei Null Grad Temperatur bezeichnet und weshalb endlich folgt:

$$\text{I.} \quad Q = q \left\{ 1 + \frac{B}{587693,94\,(1 + \delta t)} \left[\frac{(1 + et)^3}{S} - \frac{(1 + \varepsilon t)^3}{s} \right] \right\}.$$ [1]

Beispiel. Ein Platinakörper vom spec. Gewichte = 21,1878, ward mit Messinggewichten gewogen, deren spec. Gewicht 8,0262 betrug, und man fand dabei sein Gewicht in der Luft = 7716,213 Grains (7000 Grains = 1 ℔ engl. avoir du pois). Die Barometerhöhe im Augenblicke der Wägung betrug 760,35 Millimeter und das am Barometer befestigte Thermometer zeigte + 18°,3 C. Die gemeinschaftliche Temperatur der Luft, des Platinkörpers und der Messinggewichte war 19°,1.

Auflösung. Hier ist:

$$q = 7716,213; \quad \frac{B}{1 + \delta t} = \frac{760,35}{1 + \frac{18,30}{5550}} = 757,90; \quad S = 21,1878; \quad s = 8,0262.$$

Nach Schuhmacher ist die eigenthümliche Ausdehnung für Platina $e = 0,000009$, für Messing $\varepsilon = 0,000018785$, endlich $t = 19,10$.

Daher aus I. das wahre Gewicht des Platinakörpers:

---

[1]) Weiteres über diesen höchst interessanten Gegenstand findet sich in den hier zugleich benutzten Schriften: Bessel, „Tafel zur Reduction von Abwägungen“. Astronom. Nachrichten, Bd. 7, Nr. 162, S. 373, und Schuhmacher: „Ueber die Berechnungen der bei Wägungen vorkommenden Reductionen“.

$Q = [7716,213 + 0,4381 - 1,1598]$ Grains, oder

$Q = 7715,4913$ Grains $= 1,1022$ ℔ engl. $= 500,0557$ Gramm.

Zusatz 1. Specifische Gewichte. Wir sind nunmehr auch in den Stand gesetzt, die Bestimmung specifischer Gewichte, und zwar zunächst fester Körper, genauer zu machen, wie §. 40 geschah, d. h. mit Rücksicht auf den Einfluß der Temperatur, des Luftdruckes und des Gewichtsverlustes der Körper in der Luft.

Hierzu sei Q das absolute und S das specifische Gewicht irgend eines festen Körpers, der mit dem Gewichte q an einer Waage im Gleichgewichte befindlich ist. Sodann erhält man nach Vorstehendem:

$$(1)\quad Q - q\frac{1-\frac{\Delta}{\gamma s}(1+\varepsilon t)^3}{1-\frac{\Delta}{\gamma S}(1+et)^3} = q\frac{t-\frac{c}{s}r^3}{t-\frac{c}{S}R^3},$$

wenn $\frac{\Delta}{\gamma} = c$, $(1+\varepsilon t)^3 = r^3$ und $(1+et)^3 = R^3$ gesetzt wird.

Wägt man Q im Wasser, so mögen, weil im Allgemeinen Wasser- und Lufttemperatur als verschieden anzunehmen sind, die Größen q und r in (1) mit q_1 und r_1 bezeichnet werden und wenn man überdies beachtet, daß im Wasser die Größe c im Nenner gleich der Einheit wird, so folgt:

$$(2)\quad Q = q_1\frac{1-c\frac{r_1^3}{s}}{1-\frac{R^3}{S}}.$$

Aus der Vergleichung von (1) und (2) und nach nachheriger Reduction auf S erhält man endlich:

$$\text{I.}\quad S = \frac{qR^3(s-cr^3) - q_1cR^3(s-c_1r_1^3)}{q(s-cr^3) - q_1(s-c_1r_1^3)}.$$

Für die Temperaturen = Null wird $r = R = 1$ und wenn man überdies auch $\Delta = c = c_1 =$ Null setzt, ergiebt sich

$$S = \frac{q}{q-q_1},$$

genau die Formel, welche bereits §. 40, Zusatz 1, gefunden wurde.

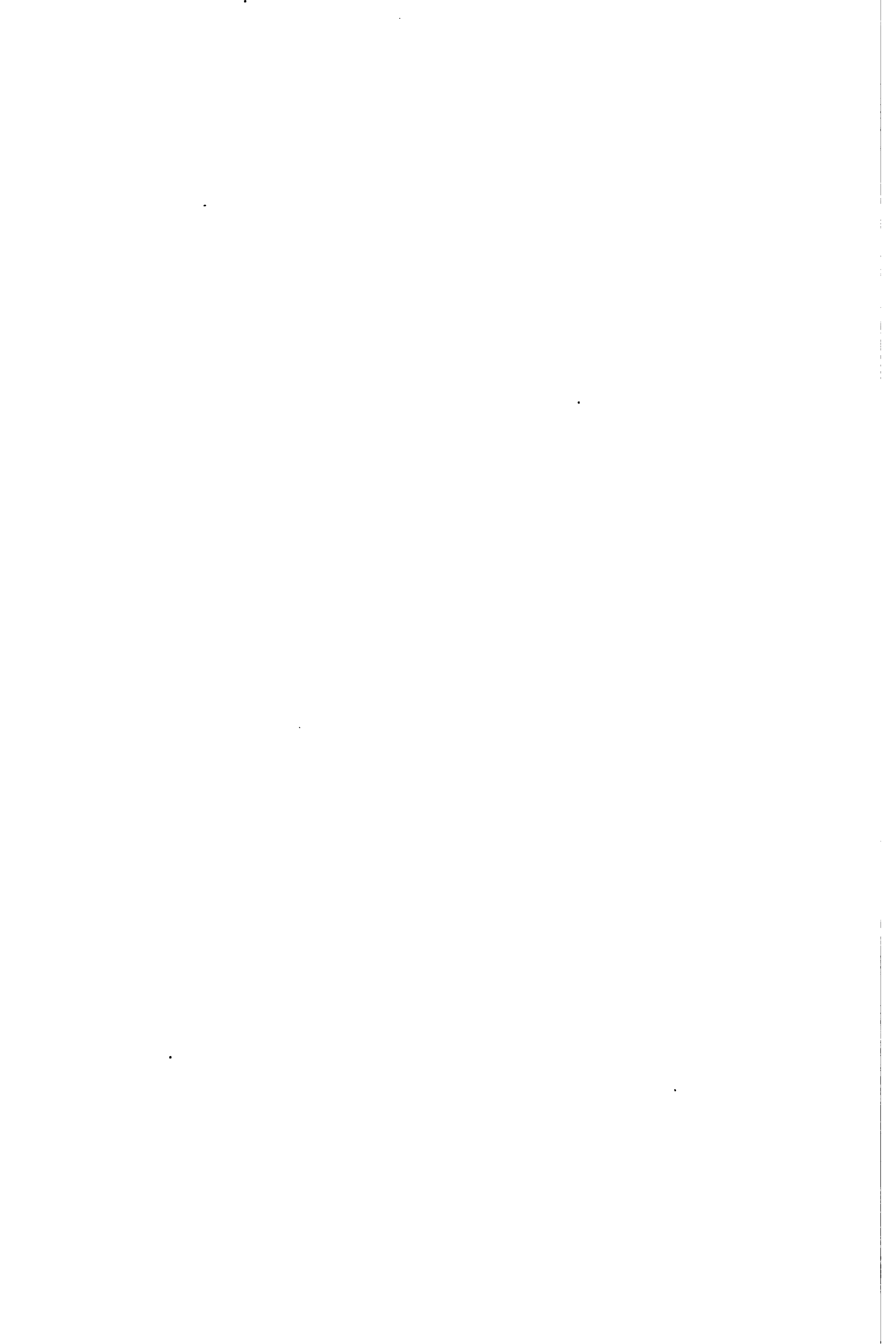
Zusatz 2. Mit Hülfe der Hauptsätze des gegenwärtigen Paragraphen ist es jetzt auch möglich, das Gewicht eines bestimmten Volumens Wasser im lufterfüllten Raume zu berechnen, wenn das wahre Gewicht Q desselben bei der Temperatur t bekannt ist, und q das wahre Gewicht der Messingstücke bezeichnet, welches der bemerkten Cubikeinheit Wasser im lufterfüllten Raume das Gleichgewicht hält.

Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen ergiebt sich hierzu ohne Weiteres die Gleichung:

(1) Q — (Gewicht der Cubikeinheit Luft bei t^0 Temperatur und $0^m,76$ Barometer) $= q\left[1-\frac{\Delta}{\gamma s}(1+\varepsilon t)^3\right]$,

wo das Luftgewicht im ersten Gliede derselben Cubikeinheit entspricht, in welcher Q ausgedrückt ist.

Anmerkung. Das absolute Gewicht des Wassers (im luftleeren Raume) ermittelt man gewöhnlich dadurch, daß man einen Körper von bekanntem Volumen (gewöhnlich einen hohlen Metallblechcylinder) in demselben mit aller nur möglichen Vorsicht abwägt. Ganz speciell findet man diesen Gegenstand behandelt von Stampfer im 16. Bande (1830) der Jahrbücher des Wiener polytechnischen Institutes, S. 1 etc. Recht übersichtlich giebt ferner die hierher gehörigen Rechnungen etc. Miller in seinen „Elements of Hydrostatics and Hydrodynamics", Fourth Edition. Cambridge 1850, p. 115.



Dritte Abtheilung.

Hydrodynamik.

§. 75.

Geschichtliche Notizen.

Ausfluß des Wassers aus Gefäßen[1])

Den allerersten Grund zur Hydrodynamik oder der Wissenschaft, welche die Bewegungsgesetze flüssiger Körper behandelt, legten die Schüler Galilei's, namentlich Castelli[2]) und Toricelli, indem sie die Ausflußgesetze des Wassers durch Versuche zu bestimmen suchten. Der erstere, ein Benedictiner vom Monte Casino, zeigte ums Jahr 1640[3]), daß die Geschwindigkeit, womit Wasser aus kleinen Gefäßmündungen strömt, von dem Wasserstande (der Druckhöhe) über diesen Mündungen abhängt. Nur irrte er sich in dem Gesetze dieser Abhängigkeit, indem er behauptete, daß die Ausflußgeschwindigkeiten im directen (geraden) Verhältnisse zu den Druckhöhen ständen.

Toricelli war in letzterer Beziehung glücklicher, indem er ganz richtig nachwies, daß sich die Geschwindigkeit des aus Bodenöffnungen der Gefäße fließenden Wassers wie die Quadratwurzeln aus den entsprechenden Druckhöhen verhielten. Toricelli's betreffende Schrift ist: „Del moto dei gravi". Firenz 1644. Ihm stimmte zuerst Baliani in seiner Abhandlung bei: „De motu naturali gravium". Genuae 1646. Nachher bestätigten mehrere Andere das Toricelli'sche Gesetz, insbesondere aber Mariotte, nach zahlreichen Experimenten, in seiner Schrift: „Traité du mouvement des eaux et des autres fluides". Paris 1686. (Deutsch übersetzt von Meining. Leipzig 1723.) Bemerkt

[1]) Es werde hier ausdrücklich hervorgehoben, daß im Nachstehenden die technische Hydrodynamik überhaupt in den drei Abschnitten besprochen wird:

1. Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.
2. Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.
3. Wirkung und Widerstand des Wassers.

[2]) Castelli, geb. 1577 zu Brescia, gest. 1644 zu Rom.

[3]) Nuova raccolta d'autori che trattano del moto dell' acque. Parma 1766. VI. Tom. 4.

zu werden verdient hierbei noch, daß Mariotte zur Bestimmung der aus einem Gefäße fließenden Wassermenge, als Maaßeinheit den „Wasserzoll" (pouce d'eau)[1]) einführte. Weitere Bestätigungen des Toricelli'schen Satzes gaben besonders noch Versuche des Italieners Domenico Guilielmini (veröffentlicht in der Schrift: Mensura aquarum fluentium. Bononia 1690)[2]), so wie ganz besonders die noch ausführlicheren Versuche Poleni's[3]). Letzterer Experimentator bestimmte zugleich das Verhältniß der Ausflußmenge bei verschiedenen Druckhöhen, so wie auch die wahre Quantität der ausgeflossenen Wassermenge, indem er zuerst nachwies, daß diese Wassermenge von der Beschaffenheit und Gestalt der Gefäßöffnung abhängt und unter Umständen der ausfließende Wasserstrahl die Mündung gar nicht ausfüllt, eine Zusammenziehung (Contraction) erfährt. Beispielsweise fand Poleni durch Messung, beim Ausflusse aus einer Kreismündung von 26 Linien Durchmesser und bei der constanten Druckhöhe von 256 Linien, den Durchmesser des zusammengezogenen Wasserstrahles zu $20\frac{1}{2}$ Linien, so daß sich das Durchmesserverhältniß von Strahl und Mündung zu $\frac{41}{52}$, folglich der Querschnitt der Mündung im Boden des Gefäßes zum Querschnitt des Strahles wie $1 : (\frac{41}{52})^2$, d. i. wie $1 : 0{,}622$ herausstellte. Bemerkt zu werden verdient noch, daß Poleni seine Versuche auch auf den Ausfluß durch cylindrische und conische Ansätze erstreckte.

Newton war der erste, welcher die Ausflußgesetze aus Gefäßmündungen und zwar in seinen berühmten Principien[4]) mathematisch ermittelte, leider gehörte dieser Abschnitt in dem sonst mit Recht berühmt gewordenen Werke zu den allerschwächsten Leistungen des großen Mannes. Nach der ersten Ausgabe sollte die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers aus der Bodenöffnung eines Gefäßes gleich der Endgeschwindigkeit sein, welche ein durch die halbe Druckhöhe frei fallender Körper erlangte. Da jedoch letzterer Satz weder mit den Versuchen Toricelli's und Anderen, noch mit seinen eignen, späteren Beobachtungen

---

[1]) Mariotte fand aus Versuchen, daß pro Minute aus einer verticalen, kreisförmigen Mündung (in dünner Wand) von einem Pariser Zoll Durchmesser, bei einer constanten Druckhöhe von 7 Linien über der Kreismitte, ein Wasserquantum von 14 Pariser Pinten (1 Cubikfuß = 36 Pinten) ausfloß, welches Quantum von Mariotte und zuweilen noch heute in Frankreich und Italien von den Brunnenmeistern mit dem Namen „Wasserzoll" bezeichnet und selbst zum Messen kleiner fließender Wassermengen benutzt wird. Rechnet man den Pariser Cubikfuß = 0,03428 Cubikmeter, so fließen aus gedachter Mündung pro Minute: $\frac{14}{36} \cdot 0{,}03428 = 0{,}01333$ Cubikmeter, d. i. pro Stunde: 0,7998 Cubikmeter, oder pro 24 Stunden = 19,1950 Cubikmeter.

Wie wenig bestimmt und sicher indeß diese sogenannte Maaßeinheit ist, wird sich später, im Capitel „Ausfluß des Wassers aus Seitenmündungen der Gefäße", bestimmt herausstellen.

[2]) Guilielmini bestätigte den Toricelli'schen Satz zuerst durch Versuche, welche sich auch mitgetheilt finden in Kästner's „Anfangsgründe der Hydrodynamik". Zweite Auflage (Göttingen 1797), S. 65, §. 95.

[3]) In der Schrift „De Castellis". Florentia 1718, und italienisch unter dem Titel „Delle Pescaje" in der Nuova raccolta. Vol. III. Auszugsweise auch bei Kästner a. a. O., §. 116.

[4]) Philosophiae naturalis principia mathematica, L. II, Prop. 36. (Erste Ausgabe von 1687.)

an springenden Strahlen übereinstimmte, so suchte er in der zweiten Ausgabe der Principien[1]) den Widerspruch durch die Zusammenziehung des Wasserstrahles in der Ausflußmündung (von ihm vena contracta genannt) zu erklären. In der Gefäßmündung selbst sollte dann die Geschwindigkeit des Wassers der halben, in der kleinsten Zusammenziehung (etwas nach auswärts von der Mündung entfernt) aber der ganzen Druckhöhe entsprechen.

Das Verhältniß des Durchmessers des zusammengezogenen Strahles zu dem der Mündung fand Newton, durch wirkliche Abmessungen, zu $\frac{42}{50}$,[2]) wobei er jedoch zu verstehen giebt, daß seine Messungen nicht die größte Schärfe hätten, was andere Versuche auch bestätigten.

Die bis hierher angestellten Versuche, so wie auch die betreffenden theoretischen Entwickelungen, bezogen sich nur auf die Verhältnisse der Ausflußgeschwindigkeiten zu einander, nicht aber auf die Ermittlung ihrer absoluten Größen[3]).

Die Lösung dieser Aufgabe sowohl, als auch die erste wahrhaft wissenschaftliche Begründung der Gesetze des Ausflusses des Wassers aus Gefäßen, gelang den beiden großen, um die mathematischen Wissenschaften hochverdienten Männern Johann Bernoulli[4]) und (dessen Sohne) Daniel Bernoulli[5]). Die betreffende Schrift des ersten Autors führt den Titel: Joh. Bernoulli Hydraulica nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis. Anno 1732. Sie ist in Tom. IV seiner Opera mitgedruckt und er schreibt im VIII. Paragraphen des I. Theiles, daß er bereits im Jahre 1729 zuerst seine Methode erfunden habe. Um eben diese Zeit hatte dessen Sohn, Daniel Bernoulli, sein berühmtes Werk: „Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum Commentarii". Argentorati 1738, im Drucke erscheinen lassen, was jedoch der Vater schon in der gedachten Hydraulica erwähnte. Während die hauptsächlichsten Endresultate, zu welchen Vater und Sohn gelangten, dieselben waren, basirte Johann Bernoulli seine Entwicklungen auf die Gesetze der allgemeinen Mechanik, Daniel Bernoulli dagegen auf das, zuerst von Huyghens zur Auflösung des Problems vom Mittelpunkte des Schwunges benutzte, Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Hierbei drückte Daniel Bernoulli das gedachte Princip in folgenden Worten aus: Zwischen dem actuellen Herabsteigen (descensum actualem) einer Flüssigkeit in einem Gefäße und dem virtuellen Aufsteigen (ascensum potentialem) findet stets Gleichheit statt.

Zur Unterstützung der betreffenden mathematischen Entwicklungen benutzten Beide den Satz vom „Parallelismus der Schichten"

---

[1]) Zweite Ausgabe von 1717, L. II, Sect. 7, Prop. 36.

[2]) Das Verhältniß des Mündungsquerschnittes zum Strahlquerschnitte würde hiernach betragen 1 : 0,707.

[3]) Die Geschwindigkeiten mit v_1 und v_2, die correspondirenden Druckhöhen mit h_1 und h_2 bezeichnet, hatte man:

$$v_1 : v_2 = \sqrt{h_1} : \sqrt{h_2}.$$

[4]) Geb. zu Basel 1667, gest. ebendaselbst 1748.

[5]) Geb. zu Gröningen 1700, gest. 1783 zu Basel.

und den Satz von der „Continuität der Flüssigkeiten". Ersteren Satz drückte man so aus, daß man sagte: „es strömen in gleichen Zeiten durch verschiedene Querschnitte gleiche Volumina", wonach sich die Flächeninhalte dieser Querschnitte umgekehrt wie die darin stattfindenden Geschwindigkeiten verhalten.

Der Satz von der Continuität der Flüssigkeit drückt die Bedingung aus, daß in der fortströmenden Masse nirgends Lücken oder Zwischenräume vorkommen, sondern überall inniger Zusammenhang stattfindet.

Die Fundamentalgleichung für den Ausfluß des Wassers aus Bodenöffnungen der Gefäße, unter Voraussetzung constanter Druckhöhe und dem Eintritte des Beharrungszustandes, war bei beiden Bernoulli's folgende:

$$z = \frac{v^2}{2g} = \frac{hA^2}{A^2 - a^2}.$$

Hierin ist v die Geschwindigkeit in der Bodenöffnung, a deren Flächeninhalt und A der überall gleiche Querschnitt des Sammelgefäßes, so wie z die sogenannte Geschwindigkeitshöhe. Auf v reducirt erhält man sonach:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}$$

Hieraus aber, wenn a klein genug gegen A ist und sonach $\left(\frac{a}{A}\right)^2$ gegen die Einheit vernachlässigt werden kann:

$$v = \sqrt{2gh},$$

welchen letzteren Werth man (aus begreiflichen Gründen) die Toricelli'sche Formel zu nennen pflegt.

Zweierlei Einwürfe waren es seiner Zeit insbesondere, welche man der Methode Daniel Bernoulli's machte, wovon sich jedoch später nur der eine als begründet erwies. Erstens nämlich war man mit dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte nicht einverstanden, weil (damals) noch der Beweis seiner allgemeinen Gültigkeit fehlte und weshalb selbst Johann Bernoulli seines Sohnes Methode „methodum indirectam" nannte. Zweitens schätzte Daniel Bernoulli den Einfluß oder den Verlust bei plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen falsch, weil ihm der später nach Carnot[1]) dem Vater benannte Satz unbekannt war, nach welchem immer die lebendige Kraft verloren geht, die der verlorenen Geschwindigkeit entspricht.

Der dritte in der Reihe der ausgezeichneten Männer, welche sich um die Theorie der Hydrodynamik verdient gemacht haben, ist d'Alembert[2]). In seinem Werke „Traité de l'équilibre et du mouvement", welches 1744 in Paris erschien, bediente sich d'Alembert zur Auflösung der hydraulischen Probleme des nach ihm benannten Princips,

---

[1]) Carnot (Lazare, Nicolas, Marguerit), geb. 1753 zu Nolay in Burgund, gest. 1823 in Magdeburg.

[2]) d'Alembert, geb. 1717 zu Paris, gest. 1783 ebendaselbst.

welches er bereits in einem vorausgegangenen Werke „Traité de Dynamique". Paris 1743, bei Untersuchungen über die Bewegungen fester Körper mit Erfolg in Anwendung gebracht hatte. In dieser Hinsicht hatte d'Alembert entschiedenes Glück, indem er durch Klarheit und Bestimmtheit der Auffassung, so wie durch Richtigkeit des Rechnungsganges die Einwürfe beseitigte, welche sich, in mehreren Beziehungen, gegen die Theorien der beiden Bernoulli's machen ließen[1]) so daß die d'Alembert'sche Methode noch gegenwärtig von vielen Schriftstellern der Hydrodynamik, als der Sache am entsprechendsten, beibehalten wird.

Das Vorzüglichste seiner Zeit, in Bezug auf eine streng wissenschaftliche Darstellung der theoretischen Hydrodynamik, lieferte Leonhard Euler. Dieser, nicht nur als einer der talentvollsten, fruchtbarsten und vielseitigsten Schriftsteller im Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, sondern auch wegen einleuchtender, verständlicher Darstellung, als vorzüglicher Lehrer bekannte Mann[2]), erschöpfte beinahe das Thema der Mechanik flüssiger Körper. Euler kam mehreremale auf die betreffenden Untersuchungen zurück, wovon jedoch ganz besonders folgende zwei Arbeiten zu erwähnen sind:

1. „Principes généraux du mouvement des fluides" in den Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. Année 1755, Pg. 274, und (die in lateinischer Sprache geschriebenen):

2. Commentarien der Petersburger Academie, Bd. 13—15, wovon bereits im Jahre 1805 der Professor Brandes in Leipzig (früher zu Eckwarden im Herzogthum Oldenburg) eine vortreffliche deutsche Bearbeitung unter dem Titel lieferte: „Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper". Dargestellt von Leonhard Euler. Leipzig 1806.

Seit Euler hat man daher auch recht bedeutsame Fortschritte im Gebiete der Hydrodynamik nicht machen können, abgerechnet die höchst eleganten Darstellungen von Lagrange in seiner Mécanique Analytique und von Laplace in der Mécanique Céleste, welcher dabei ganz Besonderes in der Anwendung allgemeiner hydrodynamischer Gleichungen auf die Gestalt der Erde, auf die Oscillationen des Meeres bei der Ebbe und Fluth etc., glücklich war, und endlich Cauchy[3]) in seinen schätzenswerthen Untersuchungen über Wellenbewegungen etc.

Von allen diesen vortrefflichen Arbeiten können wir hier (und zwar im folgenden Zusatze) nur die auch für Ingenieure wichtigen, sogenannten hydrodynamischen Grundgleichungen Euler's mittheilen, selbst diese aber auch nicht ohne wichtige Bemerkungen.

Zuvörderst sind diese allgemeinen partiellen Differenzialgleichungen der Bewegung flüssiger Körper nur in wenigen Fällen und selbst dann nur unter Zuziehung neuer Hypothesen integrirbar,

---

[1]) Man sehe hierüber besonders Kästners bereits vorher citirte „Hydrodynamik" (Zweite Auflage), S. 598 unter der Ueberschrift: „Ueber Herrn d'Alembert's Erinnerungen gegen Johann Bernoulli's Theorie", so wie eine Vorlesung Kästner's, welche er selbst S. 613 (§. 667) der Hydrodynamik citirt.

[2]) L. Euler, geb. zu Basel 1707, gest. zu St. Petersburg 1783.

[3]) Cauchy, geb. 1789 in Paris, gest. ebendas. 1856 (?).

woran die Schuld gewiß nicht in der Mangelhaftigkeit der mathematischen Analysis, sondern gewiß in der Begründung ihrer Herleitung und folgerecht in unserer schon früher erwähnten Unbekanntschaft mit der wahren Natur der Flüssigkeiten, in der Unbekanntschaft mit den Moleculargesetzen liegt.

Glaubt man nun auch in allerjüngster Zeit, in der Dynamik der Gase erhebliche Fortschritte und zwar unter Benutzung der mechanischen Wärmetheorie gemacht zu haben, so gilt von dieser Theorie für die technische Hydrodynamik gegenwärtig immer noch der Ausspruch, welchen bereits vor hundert Jahren Bossut in der Einleitung zu seiner Hydrodynamik machte und der folgendermaßen lautete:

„Malheureusement ces calculs sont si compliqués par la seule nature de la chose, qu'on ne peut les regarder que comme des vérités géométriques, précieuses en elles-mêmes, mais non comme des symboles propre à peindre l'image sensible du mouvement actuel et physique d'un fluide."

Zusatz. Die Euler'schen Differenzialgleichungen der Bewegung flüssiger Körper betreffend.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen in §. 7 und unter der dort gemachten Annahme, daß die geometrische Gestalt eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens als ein rechtwinkliges Parallelepiped vom Inhalte $dx\,dy\,dz$ und von der Masse $dm = \frac{\gamma}{g}\,dx\,dy\,dz$ gedacht werden kann, und dies einem Drucke p ausgesetzt ist, bezeichnen wir die Achsengeschwindigkeiten dieses Theilchens am Ende einer Zeit t:

nach der Richtung UX mit u,
" " " UY " v,
" " " UZ " w,

Sodann setzen wir in der Folge $\frac{\gamma}{g} = \varrho$, so daß letztere Größe die Masse der Volumeneinheit ist.

Offenbar sind u, v und w Functionen von x, y, z und t und man übersieht, daß, wenn t in Secunden ausgedrückt wird, für u, v und w der Raum gesetzt werden kann, der vermöge dieser Geschwindigkeiten in 1 Secunde durchlaufen würde[2]).

Die ganze Theorie der Bewegung flüssiger Körper ist dann darin enthalten, daß man aus der Natur des flüssigen Körpers, sofern nämlich p und ϱ gegenseitig von einander abhängen, und aus den Kräften, welche auf dieselben wirken, die Größen p, ϱ, u, v und w bestimme und dieselben durch x, y, z und t ausdrücke, um für jede gegebene Zeit und für jeden gegebenen Punkt der Flüssigkeit ihre Werthe angeben zu können.

Um letzteres auszuführen, nehmen wir an, daß am Ende der Zeit $t + dt$ die Coordinaten des Theilchens *abcdefmn*, Fig. 4 (S. 15), zu $x + udt$, $y + vdt$ und $z + wdt$ geworden sind. Da sich nun zunächst

[1]) Bossut, geb. 1730 zu Tartaras im Dép. Rhône, gest. 1814 zu Paris.

[2]) Der Verfasser folgt zunächst hier (so weit als möglich) wörtlich Euler (Brandes, Uebersetzung S. 119 ff.). Nachher verläßt er diesen Weg aus dabei angegebenen Gründen.

der allgemeine Werth von du (das vollständige Differenzial, aus der Summe der partiellen Differenziale) ergiebt zu:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{dz}{dt}\right) dz + \left(\frac{du}{dt}\right) dt,\text{[1]}$$

so erhält man, wegen $dx = udt$, $dy = vdt$ und $z = wdt$:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) udt + \left(\frac{du}{dy}\right) vdt + \left(\frac{du}{dz}\right) wdt + \left(\frac{du}{dt}\right) dt$$

und eben so:

$$dv = \left(\frac{dv}{dx}\right) udt + \left(\frac{dv}{dy}\right) vdt + \left(\frac{dv}{dz}\right) wdt + \left(\frac{dv}{dt}\right) dt;$$

$$dw = \left(\frac{dw}{dx}\right) udt + \left(\frac{dw}{dy}\right) vdt + \left(\frac{dw}{dz}\right) wdt + \left(\frac{dw}{dt}\right) dt.$$

Bezeichnet man daher die resultirenden Accelerationen oder Beschleunigungen parallel den drei rechtwinkligen Coordinatenachsen beziehungsweise mit J_x, J_y und J_z, so hat man

$$J_x = \frac{du}{dt},\; J_y = \frac{dv}{dt} \text{ und } J_z = \frac{dw}{dt},$$

d. i. nach vorstehenden Gleichungen (1), (2) und (3):

$$J_x = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right);$$

$$J_y = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right);$$

$$J_z = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dx}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Bringt man nun die resultirenden Bewegungsgrößen ϱJ_x, ϱJ_y und ϱJ_z entgegengesetzten Sinnes zu den eingeprägten Bewegungsgrößen an, d. h. beziehungsweise entgegengesetzt zu ϱX, ϱY und ϱZ an, so erhält man, nach dem d'Alembert'schen Principe und zufolge unserer Gleichungen (4), (5) und (6) in §. 7:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \varrho\,(X - J_x);\; \left(\frac{dp}{dy}\right) = \varrho\,(Y - J_y) \text{ und } \left(\frac{dp}{dz}\right) = \varrho\,(Z - J_z),$$

oder nach Einsetzung vorstehender Werthe für J_x, J_y und J_z:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{dp}{dx}\right) = \varrho \left\{X - u\left(\frac{du}{dx}\right) - v\left(\frac{du}{dy}\right) - w\left(\frac{du}{dz}\right) - \frac{du}{dt}\right\};$$

$$\text{II.}\quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \varrho \left\{Y - u\left(\frac{dv}{dx}\right) - v\left(\frac{dv}{dy}\right) - w\left(\frac{dv}{dz}\right) - \frac{dv}{dt}\right\};$$

$$\text{III.}\quad \left(\frac{dp}{dz}\right) = \varrho \left\{Z - u\left(\frac{dw}{dx}\right) - v\left(\frac{dw}{dy}\right) - w\left(\frac{dw}{dz}\right) - \frac{dw}{dt}\right\}.$$

Letztere drei Gleichungen genügen aber nicht zur Bestimmung

[1] Da es sich hier um die Geschichte des Gegenstandes handelt, so hat der Verfasser es für erforderlich gehalten, die Euler'sche Bezeichnung für die partiellen Differenziale, nämlich $\left(\frac{du}{dx}\right) dx$ . . . beizubehalten, statt daß man jetzt gewöhnlich setzt: $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ . . .

der fünf Functionen p, ϱ, u, v und w; es sind vielmehr noch zwei andere Gleichungen erforderlich, die wir im Nachstehenden zu gewinnen suchen wollen.

Wir gehen hierzu von der Bedingung aus, daß die Flüssigkeit eine zusammenhängende Masse bildet und denken uns auch für diesen Zweck die geometrische Gestalt des flüssigen Elementes als rechtwinkliges Parallelepipedum vom Inhalte $dx\,dy\,dz$[1]).

Die Masse der Flüssigkeit, welche am Ende der Zeit t in dem gedachten Elemente enthalten ist, beträgt sonach $\varrho\,dx\,dy\,dz$ und am Ende der Zeit $t + dt$, offenbar $\left[\varrho + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) dt\right] dx\,dy\,dz$.

Die durch die drei ersten Seitenflächen des Parallelepipeds in der Zeit dt eintretende Masse des Fluidums ist aber

$$dy\,dz\,.\,\varrho u dt + dx\,dz\,.\,\varrho v dt + dx\,dy\,.\,\varrho w dt,$$

dagegen ist die durch die drei entgegengesetzten Seitenflächen austretende Flüssigkeit

$$dy\,dz\left[\varrho u - \left(\frac{d\,.\,\varrho u}{dx}\right)dx\right]dt + dx\,dz\left[\varrho v + \left(\frac{d\,.\,\varrho v}{dy}\right)dy\right]dt +$$
$$+ dx\,dv\left[\varrho w + \left(\frac{d\,.\,\varrho w}{dz}\right)dz\right]dt.$$

Daher ist der Ueberschuß der ersteren Masse über die zweite:

$$-\,dx\,dy\,dz\left[\left(\frac{d\varrho\,.\,u}{dx}\right) + \left(\frac{d\,.\,\varrho v}{dy}\right) + \left(\frac{d\,.\,\varrho w}{dz}\right)\right]dt.$$

Setzt man aber diese Größe der Zunahme $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right).\,dt\,.\,dx\,dy\,dz$ gleich, so erhält man, mit Weglassung der gemeinsamen Factoren:

$$\text{IV.}\quad \frac{d\varrho}{dt} + \left(\frac{d\,.\,\varrho u}{dx}\right) + \left(\frac{d\,.\,\varrho v}{dy}\right) + \left(\frac{d\,.\,\varrho w}{dz}\right) = 0.$$

Dieser Ausdruck ist der, welchen man (S. 190) die Gleichung der Continuität der Flüssigkeit nennt.

Handelt es sich um eine tropfbare Flüssigkeit, deren Dichte in allen Punkten dieselbe und unabhängig von der Zeit ist, so reducirt sich IV. auf:

$$\text{IV}^{a}.\quad \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0.$$

Bei einer zusammendrückbaren Flüssigkeit von constanter Temperatur, erhält man als die fünfte der erforderlichen Gleichungen

$$\text{V.}\quad p = k\varrho,$$

wo k wie in §. 71 und ferner einen constanten Coefficienten bezeichnet.

(Anwendungen dieser allgemeinen Gleichungen auf besondere, auch technisch wichtige Fälle folgen später.)

---

[1]) Der Verfasser verläßt hier den Euler'schen Entwicklungsgang, welcher die geometrische Form des unendlich kleinen Flüssigkeittheilchens (Brandes a. a. O., §. 130) als dreiseitige Pyramide voraussetzt, dabei zu interessanten, aber etwas umständlichen Rechnungen kommt. Für gegenwärtiges Lehrbuch war es daher (des ersten Verständnisses wegen) entsprechender, den Annahmen Navier's (Mechanik §. 403), Delaunay's (Rationelle Mechanik §. 264) etc. zu folgen, welche das Flüssigkeitselement als rechtwinkliges Parallelepipedum annehmen.

Zur Orientirung im ganzen (schwierigen) Gebiete noch Folgendes:

1. In einem sehr ausgedehnten Falle kann man die Gleichungen I. II. und III. auf eine partielle Differenzialgleichung erster Ordnung reduciren und es so einrichten, daß die drei Unbekannten u, v und w von einer Größe abhängen. Wer sich hierüber belehren will, findet vollständigen Aufschluß bei Euler (a. a. O., Brandes Uebersetzung etc., §. 151 ff); ferner bei Poisson (Mechanik, Uebersetzung von Stern, §. 653).

2. Vorstehende 5 Gleichungen reichen nicht aus, wenn die Gleichung V. nicht in obiger Form benutzt werden darf, was z. B. der Fall ist, wenn die Bewegung so schnell ist, daß die Flüssigkeit nicht Zeit hat, auf ihre ursprüngliche Temperatur zurückzukommen, wie dies beispielsweise bei den Untersuchungen über Ausbreitung des Schalles stattfindet und worüber man ausführliche Belehrung bei Laplace „Mécanique Céleste", Oeuvres de Laplace V, Livre douzième, Chapitre III, Pg. 143, unter der Ueberschrift findet: „De la vitesse du son et du mouvement des fluides élastiques".

Empfehlenswerth ist es, schon mit dem Studium der Erörterungen zu beginnen, welche Laplace (Oeuvres etc., Tome Premier, Pg. 108) mit der Continuitätsgleichung IV. anhebt.

Daß in den Fällen, wo die Gleichung V. nicht statthat, die mechanische Wärmetheorie eine sehr wichtige Rolle spielt, hat, für Ingenieure brauchbar, in jüngster Zeit Grashof im ersten Bande seiner theoretischen Maschinenlehre gezeigt, woselbst dieser Autor zur Lösung der verschiedenen Aufgaben, in §. 12, unter der Ueberschrift „Allgemeine Gleichungen zur Bestimmung der Zustandsänderung einer Flüssigkeit" (im weiteren Sinne) unter gegebenen Umständen (S. 69) 7 Fundamentalgleichungen aufstellt.

Die betreffenden 7 Größen sind dann die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w, das specifische Volumen, die Pressung p, die Temperatur und das innere Arbeitsvermögen (S. 136 gegenwärtigen Buches).

Von den zu untersuchenden Bewegungen der Fülssigkeiten, die theils strömende, theils oscillatorische sind, bezeichnet Grashof (a. a. O., S. 380) eigentlich nur die ersteren von technischer Wichtigkeit, während die letzteren höchstens als Wellenbewegung des Wassers in den Bereich der technischen Studien zu ziehen sein würden.

Bei der unmittelbar practischen Bestimmung und bei der (wenn auch möglichst gründlichen) elementaren Behandlung des Stoffes der „Technischen Mechanik flüssiger Körper", hielt es der Verfasser gerathener, das Capitel „Wellenbewegung des Wassers" nicht aufzunehmen, deshalb hauptsächlich auf Grashof's schöne Behandlung dieses Gegenstandes, von S. 830 bis mit S. 866, zu verweisen und nur noch folgende Werke zu empfehlen, welche sich auf denselben Gegenstand beziehen:

Gerstner, „Theorie der Wellen" etc. Prag 1804. — Weber Gebrüder, „Wellenlehre auf Experimente gegründet". Leipzig 1825. — Emy, „Du Mouvement des ondes et des travaux hydrauliques maritimes". Paris 1831. — Hagen, „Ueber Wellen auf Gewässern von gleichmäßiger Tiefe". Berlin 1862.

§. 76.

Fortsetzung der geschichtlichen Notizen,

den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen betreffend.

Nachdem in theoretischer Hinsicht gleichsam Alles geleistet worden war, was der menschlische Geist nur immer vermochte, dessen ungeachtet aber selbst einfache Fragen, wie die der Contraction des Wassers, beim Ausflusse durch Oeffnungen der Gefäßwände, ungelöst blieben, erkannte man namentlich in dem zweiten Drittel des vorigen Jahrhunderts, daß für die Fortschritte unserer Kenntnisse im gedachten Gebiete (Ausfluß des Wassers aus Gefäßen) ein anderer Weg eingeschlagen werden müsse. Dieser Weg besteht darin, daß man die Complication der Elemente, welche in den Erscheinungen vorkommen, nicht durch die Rechnung darstellt, sondern vielmehr die ganze Theorie auf die Erscheinung selbst gründet und schließlich die Endresultate mit Hülfe geeigneter Versuche corrigirt. Und in der That darf dieser Weg, wo die Rechnung gleichsam mit der Erfahrung Hand in Hand geht, ein sehr glücklicher genannt werden, da er zu mannigfachen schönen Entdeckungen und zu wahrhaft practischen, mit der Erfahrung meist gut stimmenden Formeln geführt hat.

Unter den Männern, die sich in dieser Beziehung namentlich verdient machten, ist zuerst Borda[1]) zu nennen, und zwar insbesondere auch deshalb, weil er dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte diejenige Geltung verschaffte, die dasselbe für die Beantwortung hydraulischer Fragen verdient[2]). Daniel Bernoulli hatte insbesondere die Verluste an lebendiger Kraft nicht richtig bemessen, welche durch plötzliche Verengungen und Erweiterungen der Gefäße entstehen. Hierauf nahm Borda sorgfältig Rücksicht und zeigte, wie durch entsprechende Einführung derjenigen lebendigen Kraft, welche der verlorenen Geschwindigkeit entspricht (bekanntlich der nach Carnot dem Vater bekannte Satz), die Auflösung der betreffenden Aufgaben mit einer Richtigkeit erfolgen kann, wie es immer nur die Natur der Sache gestattet[3]).

Borda bestätigte gleichzeitig seine Rechnungen für gewisse Fälle durch entsprechende und sinnreiche Versuche. Unter Andern suchte Borda die Contractionsfrage, beim Ausflusse durch eine scharfkantige kreisförmige Oeffnung in dünner Wand, durch sorgfältige directe Messung der Strahlform an der Stelle der größten Zusammenziehung zu bestimmen. Dabei fand er das Verhältniß des Querschnittes der Mündung

---

[1]) Borda, geb. zu Dax im Dep. des Landes 1733, gest. zu Paris 1799.

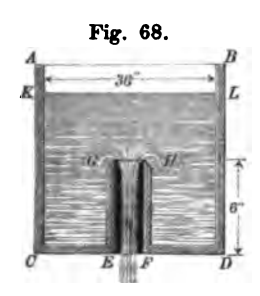
[2]) Mémoires de l'académie des sciences, 1766, Pg. 579 unter der Ueberschrift: „Mémoires sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases".

[3]) Zur Kenntnißnahme und Beurtheilung des Borda'schen Rechnungsganges theilen wir hier die Auflösung des Problems IV, a. a. O., Pg. 599, mit, welches folgendes ist:

Es sei $ABCD$, Fig. 67, ein cylindrisches Gefäß, welches mit einer kurzen Ansatzröhre EF versehen ist und wobei vorausgesetzt wird, daß die Flüssigkeit

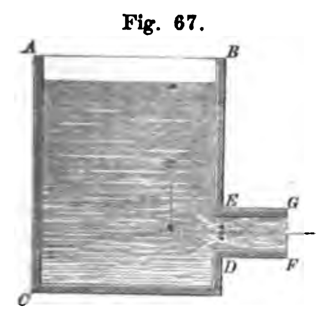
zu dem kleinsten Querschnitte des Strahles $154\frac{2}{3} : 100$, so daß dieser Querschnitt des Strahles 0,646 von dem der Mündung betrug.

Fig. 68.



Die allerstärkste Contraction fand Borda in dem neben skizzirten Falle, Fig. 68 (wobei die angegebenen Maaße altfranzösische sind), wenn der Ausfluß durch eine nach innen gerichtete cylindrische Röhre *EFGH* (von 6 Zoll Länge und 1 Zoll $2\frac{1}{10}$ Linie Durchmesser) mit oberhalb scharfen Kanten erfolgte. Zur Vergleichung dieses Falles mit jenem, wo der Ausfluß von *EF* durch eine dünne Wand erfolgt, legte er nach den ersten Versuchen eine 12 Zoll im Durchmesser haltende Platte so auf die Mündung *EF* der gedachten Röhre, daß die Oeffnung in der Platte (von ebenfalls 1 Zoll $2\frac{1}{10}$ Linie Durchmesser) mit jener Mündung genau concentrisch lag.

Fig. 67.



beim Ausströmen durch diese Röhre die Mündung *FG* genau ausfüllt und in dieser überall einerlei Geschwindigkeit besitzt. Man soll diese Ausflußgeschwindigkeit $= u$ bestimmen.

Borda bezeichnet nun die Druckhöhe über dem Schwerpunkte der Mündung mit x, setzt den Querschnitt der cylindrischen Röhre $EF = a$, den der größten Zusammenziehung des Strahles αa, wo $\alpha < 1$ ist, nimmt die unter Voraussetzung constanter Druckhöhe, in der Zeit dt zu- und abfließende Masse $= dx$ und schreibt dann, nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte

$$(1) \quad \tfrac{1}{2} u^2 dx = gx\, dx,$$

wo g die Acceleration (Beschleunigung) der Schwerkraft bezeichnet.

Sodann bemerkt Borda, daß, unter Annahme des Principes vom Parallelismus der Schichten, $au = \alpha a y$, wenn y die Geschwindigkeit in der Stelle der größten Zusammenziehung des Strahles bezeichnet, also $y = \frac{u}{\alpha}$ ist, ein Geschwindigkeitsverlust $y - u = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) u$ und demnach ein Verlust an lebendiger Kraft erfolge, der

$$\tfrac{1}{2} dx \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 u^2 \text{ ist.}$$

Letzterer Werth zur lebendigen Kraft in (1) addirt, giebt:

$$\tfrac{1}{2} u^2 dx + \tfrac{1}{2} dx \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 u^2 = gx\, dx, \text{ woraus}$$

$$u = \sqrt{\frac{2gx}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}}$$

folgt, ein Ausdruck, der noch heute für die Ausflußgeschwindigkeit kurzer cylindrischer Ansätze, deren Länge $1\frac{1}{2}$ bis 3 mal Durchmesser beträgt, als brauchbar bezeichnet wird und auf welchen wir später zurückkommen werden.

Da Borda die Zeit beobachtete, in welcher sich in beiden Fällen der Oberwasserspiegel *KL* von 11 Zoll 11 Linien auf 7 Zoll 11 Linien senkte, so gaben die Versuche offenbar die Verhältnisse der theoretischen zur wirklichen ausgeflossenen Wassermenge, also die Ausflußcoefficienten, und zwar erhielt er

für die nach innen mündende Röhre wie $194\frac{1}{5} : 100$;
" " dünnne Wand wie . . . . . $160 : 100$.

Hiernach ist der Ausflußcoefficient für die nach innen

mündende Röhre . . . . $\frac{500}{971} = 0,514$;

" ist der für die dünne Wand . . . . . . $\frac{100}{160} = 0,625$.

Vergleicht man diesen letzteren Versuch mit der vorherigen directen Messung des zusammengezogenen Wasserstrahles, so kann man schließen, daß bei einer Oeffnung in dünner Wand die Geschwindigkeit in der kleinsten Querschnittsstelle des Strahles $\frac{0,625}{0,646} = 0,967$ von der theoretischen Geschwindigkeit beträgt, welches Resultat den späteren und jüngsten Versuchen entspricht.

Bezeichnen wir daher den Ausflußcoefficienten mit μ, den Geschwindigkeitscoefficienten mit ψ und den Contractionscoefficienten mit α, so würde man setzen können:

$$\mu = \psi \cdot \alpha,$$

eine Annahme, die sich auch später als richtig herausstellte.

Zahlreich und großartig sind die Versuche, welche die beiden Italiener Michelotti (Vater und Sohn) in einem besonderen hydraulischen Observatorium, einer Meierei Parella bei Turin[1]), von 1763 bis 1785, anstellten. Dies Etablissement wurde 1763 durch Francesco Dominico Michelotti (dem Vater)[2]) unter der Protection des Königs von Sardinien gegründet und zu ausgedehnten Versuchen benutzt, die 20 Jahre später durch (den Sohn) Therese Michelotti[3]) wichtige Ergänzungen erfuhren.

Das Hauptwerk des hydraulischen Observatoriums war ein Thurm von über 30 Fuß Höhe, der im Innern einen verticalen Schacht mit quadratischem Querschnitte von 3 Fuß Seitenlänge bildete. In einem besonderen gemauerten Gerinne wurde diesem Thurme das erforderliche Wasser aus einem Seitenarme des Flusses Dora zugeführt. In der vorderen Seitenwand desselben befanden sich drei quadratische Ausflußöffnungen von 8 Zoll Seitenlänge in verschiedenen Höhen über einander. Die unterste Oeffnung war unmittelbar über dem durch einen Stein gebildeten Boden placirt, der Mittelpunkt der nächst höheren Oeffnung lag 10 Fuß 4 Zoll und der der obersten Mündung 15 Fuß 4 Zoll über dem Boden und 5 Fuß unter der Sohle des Zuflußcanales.

Diese Oeffnungen wurden von außen durch quadratische, 1 Fuß

---

[1]) Der Verfasser besuchte die Parella am 20. August 1860 und fand das hydraulische Etablissement leider nicht mehr in dem früheren Zustande, vielmehr etwas verfallen.

[2]) F. D. Michelotti, geb. 1710 zu Cincano, gest. 1777 zu Turin.

[3]) J. T. Michelotti, geb. 1764 zu Turin, gest. 1846 ebendaselbst.

lange und eben so hohe und 8 Linien dicke Messingplatten mit 3zölligen quadratischen Mündungen durch Anwendung von in Wachs und Fett getränktem Leder verschlossen. Außerdem waren noch fernere Anordnungen getroffen, um auch kleinere quadratische oder kreisförmige Mündungen anbringen zu können.

Die ausfließende Wassermenge wurde in einem 24 Fuß langen, 12 Fuß breiten und $2\frac{1}{2}$ Fuß tiefen ausgemauerten Behälter aufgefangen und darin gemessen (cubicirt).

Die Resultate dieser Versuche wurden in folgenden beiden Werken veröffentlicht: „Sperimenti idraulici di F. D. Michelotti". Torino 1767, und „Mémoire physico-mathématique contenant les resultats d'expériences hydrauliques". In den Mémoires de l'Académie des sciences de Turin. An. 1784—1785. Letztere Quelle enthält die Versuche des Sohnes J. T. Michelotti. Beide Arbeiten zusammen genommen wurden 1808 von Professor Zimmermann in Berlin in die deutsche Sprache übersetzt und mit Anmerkungen von Eytelwein begleitet.

Die Hauptergebnisse dieser Versuche lehrten, daß sich die Ausflußcoefficienten mit den Druckhöhen verändern, abnehmen, wenn die Druckhöhen wachsen. Indessen war die Veränderlichkeit dieser Coefficienten so klein, daß man allgemein für den Ausfluß des Wassers durch dünne Wände setzen konnte:

$$\mu = 0{,}619.$$

Eine interessante Bestätigung erhielten die Michelotti'schen Versuche durch die, welche Bossut[1]) von 1775 ab (auf Kosten des Herzogs von Choiseul) an den Wasserleitungen von Mézières anstellte.

Bossut bediente sich zu seinen Versuchen eines parallelepipedisch geformten Kastens von 12 Fuß Höhe und von quadratischem Querschnitte mit 2 Fuß Seitenlänge, wobei der Ausfluß durch kreisrunde und durch quadratische Mündungen erfolgte. Die größte Bossut'sche Druckköhe war 10 Fuß 9 Zoll mit 2 Zoll hohen Mündungen in dünner Wand (aus $\frac{1}{2}$ Linie dickem Kupferblech gebildet). Die ausgeflossene Wassermenge wurde in einem Fasse aufgefangen und hier mittelst eines geaichten, würfelförmigen Kupfergefäßes von $\frac{1}{8}$ Cubikfuß Inhalt genau gemessen. Bossut fand, daß die Ausflußcoefficienten mit der Druckhöhe abnehmen.

Specielles über seine Versuche enthält sein bereits S. 192 erwähntes Werk über Hydraulik[2]), von welchem Langsdorf Uebersetzungen lieferte, die 1792 in Frankfurt a. M. erschienen.

So verdienstlich und beachtenswerth auch die bis hierher angestellten Versuche genannt werden mußten, so genügten sie doch lange nicht den practischen Bedürfnissen. In dieser Beziehung werde namentlich auf zweierlei aufmerksam gemacht, nämlich erstens darauf, daß man die Ausflußmündungen verhältnißmäßig immer noch zu klein genommen hatte und zweitens, daß man auch nicht bei Oeffnungen Versuche angestellt hatte, welche bis zur Oberfläche des Wassers (bis zum Wasserspiegel) reichten, d. h. nicht bei sogenannten Ueberfällen, obwohl auch hier eine Contraction eintreten und mit dieser eine Verminderung des Ausflußquantums verbunden sein mußte.

---

[1]) Bossut, geb. 1730 zu Tartaras (Dép. Rhône), gest. zu Paris 1814.
[2]) Traité élément. d'hydrodynamique. 2 Vol. Paris 1772.

Die ersten beachtenswerthen Versuche über Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle (rectanguläre Seitenöffnungen bis zum Wasserspiegel reichend), stellte der französische Ingenieuroberst Du Buat[1]) an und veröffentlichte nachher dieselben in seinem berühmten Werke: „Principes d'hydraulique et d'hydrodynamique". Paris 1779[2]).

Du Buat benutzte hierzu einen künstlich gebildeten Canal, der quer-rechtwinklig auf seiner Länge, einen Einbau aus Brettern enthielt, in welchem eine oben offene Mündung gebildet war, durch die das Wasser in geeigneter Weise abfloß. Das durchgeflossene Wasserquantum wurde von einem cubicirten Bassin aufgenommen und demgemäß gemessen.

Bei 1,438 Fuß Breite der Ueberfallskante und bei Höhen des Wasserspiegels über der Ueberlaßschwelle von 0,140 Fuß bis 0,549 Fuß ergab sich aus 8 Versuchen für den Ausflußcoefficienten der Mittelwerth $\mu = 0,652$. Hierzu muß jedoch bemerkt werden, daß bei den ersten vier Versuchen der Ausfluß mit vollständiger Contraction, d. i. an der unteren (der horizontalen) Abflußkante und an beiden verticalen Seiten abgelöst, stattfand, bei den übrigen Versuchen aber mit partieller Contraction, weil hierbei die Abflußkante in der Mitte oder am Ende des Canales lag[3]).

Fast denselben Mittelwerth für den Ausflußcoefficienten bei Ueberfällen, gaben Versuche, welche die seiner Zeit berühmten englischen Ingenieure Brindley[4]) und Smeaton[5]) anstellten und worüber in den unten bezeichneten Quellen berichtet wird[6]).

Aus, wie behauptet wird, nicht sehr genau ausgeführten Versuchen Christian's[7]), welche in dem unten angegebenen, seiner Zeit geschätzten Werke[8]) notirt sind, ergaben sich theilweise mit Du Buat stimmende, theils mit Brindley und Smeaton widerstreitende Ergebnisse, so daß aus mehrfachen Gründen fernere und namentlich Versuche mit Ueberfällen größerer Dimensionen, wünschenswerth wurden. Die ersten derartigen Versuche wurden aber auf Veranlassung Eytelwein's[9]) (am Schlusse des vorigen Jahrhunderts) durch den Bauinspector Kypke, neben dem Bromberger Canale, eine Viertelmeile von der Stadt Bromberg an einem Bache angestellt, den man auf 260 Fuß (preuß.) Länge durch Bretter zu einem Canale umgestaltet hatte. In letzterem wurden Ueberfälle von 0,50 Fuß bis 3,448 Fuß (rhein.) Breite gebildet und

---

[1]) Du Buat (oder Dubuat), geb. 1732 in der Normandie, gest. 1787 zu Nançay (Dép. Cher & Inder).

[2]) Tome II, Nr. 409—415 (Ausgabe von 1816).

[3]) Ausführlich über diese Versuche Du Buat's berichtet Egen in seiner Schrift: „Untersuchungen etc. über Wasserwerke", S. 32. Berlin 1831.

[4]) Brindley, geb. 1716 zu Dunsted (Derby), gest. 1772 zu Turnhorst (Staffordshire).

[5]) Smeaton, geb. 1724 zu Austhorpe bei Leeds, gest. 1792 ebendaselbst.

[6]) Rees Cyclopaedia, Artikel „Water" und hiernach Weisbach in Hülse's „Maschinenencyclopädie", Artikel „Ausfluß", Bd. 1, S. 476. Ferner auch Egen a. a. O., S. 34.

[7]) Christian, geb. 1776 zu Verviers (Belgien), gest. 1832 zu Paris.

[8]) Traité de mécanique industrielle. Vol. I, Pg. 348.

[9]) Eytelwein, geb. 1764 zu Frankfurt a. M., gest. zu Berlin 1849.

Wasserstände (Druckhöhen) von 0,344 bis 1,250 Fuß angeordnet. Als Mittelwerth erhielt man $\mu = 0{,}629$ [1]).

Eytelwein vernachlässigte die Geschwindigkeit des zufließenden Wassers, was (wenigstens im Allgemeinen) als unrichtig bezeichnet werden muß und auf die Größe des Ausflußcoefficienten von Einfluß ist. Später folgende Experimentatoren (d'Aubuisson, Castel, Weisbach u. A.) haben angemessen hierauf Rücksicht genommen.

Aus der Periode gegen Ende des vorigen Jahrhunderts sind streng genommen noch einige Experimentatoren, insbesondere die Engländer Young und Vince[2]), so wie der Italiener Venturi[3]) zu verzeichnen.

---

[1]) Ausführlich über diese Versuche berichtet Eytelwein selbst in seinem Handbuche der Mechanik fester Körper und Hydraulik (Zweite Auflage), S. 123 ff. Zu Ehren des überhaupt um die practisch-wissenschaftliche Mechanik hochverdienten Mannes, lassen wir hier die Ergebnisse der 6 angestellten Versuche folgen und copiren treu die beigegebene Fig. 69:

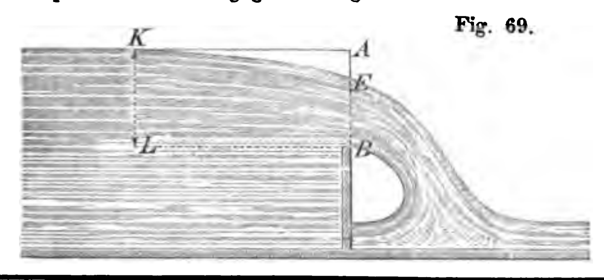


Fig. 69.

Nro. des Versuchs.	Breite der Oeffnung Fuß.	$\overline{EB}$ Strahldicke über der Abflußkante Fuß.	$\overline{AE}$ Senkung des Wasserspiegels Fuß.	$\overline{AB} = KL$ Drucköhe Fuß.	$\overline{AK}$ Abstand des ungesenkten Wasserspiegels Fuß.	Verhältniß $\frac{EB}{AB}$	Ausflußcoefficient $= \mu$.
1	0,500	1,219	0,031	1,250	0,330	0,975	0,632
2	0,833	0,853	0,047	0,900	0,540	0,947	0,621
3	1,167	0,645	0,075	0,720	0,790	0,895	0,633
4	1,500	0,523	0,073	0,596	0,810	0,877	0,640
5	2,146	0,408	0,072	0,480	0,750	0,850	0,619
6	3,448	0,292	0,052	0,344	0,660	0,848	0,634

[2]) Phil. Transact. 1795. P. I, Art. 2, und Gregory's Darstellung der mech. Wissenschaften (1828, Deutsch von Dietlein), Bd. 1, §. 464, und Gilbert's Annalen, Bd. II und III. Ferner Gehler's Physik. Wörterbuch, Bd. 5, Abth. 1, S. 535. Auch Kästner, Hydrodynamik, S. 71 und 123.

[3]) Venturi, geb. 1746 zu Bibano bei Reggio (Lombardei), gest. 1822 zu Reggio.

Ueber die Versuche (Ausfluß durch Bodenöffnungen) der ersteren finden sich Berichte in den vorher angegebenen Quellen.

Venturi's (seiner Zeit Professor in Modena) Versuche[1]) hatten mehr practischen Werth, indem sie über einige wichtige Fragen Auskunft gaben, u. A. über die Erscheinungen beim Ausfluß des Wassers durch gewisse Ansatzröhren, da hier außer der Capillarität (S. 6) auch noch eine innere Pressung des Wassers wirksam ist, vermöge welcher letzteres mit einer gewissen Kraft nach allen Seiten, folglich auch gegen die Wände der Ansatzröhren drückt, bekanntlich eine schon von Daniel Bernoulli (Hydrodynamica, Sect. III) in Betracht gezogene Erscheinung und die sich auch, unter Umständen, zu einem Ansaugen (Hydrodynamica, Sect. XII) gestalten kann. Alles Dinge, welche auch hier später ausführlich besprochen werden sollen[2]).

Etwas spätere Versuche des Franzosen Hachette[3]) bestätigten die Venturi's und erweiterten diese auch dahin, daß er Auskunft über die verschiedenen Formen der Wasserstrahlen beim Ausfließen durch kreisförmige, elliptische, trianguläre und quadratische Oeffnungen ertheilte. Ein practisch wichtiges Ergebniß hierbei war das, daß, im Allgemeinen, der Ausfluß durch verschiedene Mündungen in dünner Wand unabhängig von deren geometrischer Gestalt, jedoch nur so lange ist, als dieselben keinen einspringenden Winkel enthalten[4]).

Als einen der fruchtbarsten Experimentatoren im Gebiete der Hydraulik dieses Jahrhunderts von 1829 ab, muß man den Italiener Bidone[5]) bezeichnen. Die meisten seiner Versuche stellte dieser wackere Mann in dem Wasserschlosse der Parella bei Turin an, jener Schöpfung des älteren Michelotti, worüber bereits vorher S. 198 berichtet wurde.

Des großen Umfanges und der Vielseitigkeit der Bidone'schen Versuche wegen, muß auf die speciellen, hier später folgenden Abschnitte verwiesen werden, so daß wir hier nur kurz die hauptsächlichsten Experimente aus dem Gebiete des Ausflusses aus Gefäßen notiren[6]).

Hierher gehören zuerst (Hachette's Versuche ergänzend und weit

---

[1]) Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides. Par le Citoyen J. P. Venturi. Paris. An. VI (1797), Pg. 75 etc.

[2]) Einen schönen Auszug über diese Venturi'schen Versuche hat der verstorbene Bergrath Weisbach in der Hülse'schen Maschinenencycl., Bd. 1, S. 498 ff. geliefert. In neuerer Zeit hat Magnus in Berlin (1850) die Venturi'schen Versuche wiederholt und ist dabei in mehrfacher Hinsicht zu ganz anderen Resultaten gelangt. Man sehe deshalb Poggend. Annalen etc. Bd. 80, S. 1—36.

[3]) Hachette, geb. 1796 zu Mézières, gest. 1834 zu Paris.

[4]) Hachette's ausführlichste Arbeit hierüber findet sich in den Mémoiren der Pariser Academie vom Jahre 1805 und zwar unter den Volumes des savans étrangères, theilweise auch in den Annales de chim. et phys., T. I, Pg. 200, so wie endlich in seinem „Traité élémentaire des Machines". Nr. 111.

[5]) Georg Bidone, geb. 1781 zu Casal Noceto, gest. zu Turin 1839.

[6]) Die betreffenden literarischen Arbeiten sind hauptsächlich folgende: „Expériences sur la forme et la direction des veines et courans d'eau lancés par diverses ouvertures". Turin 1829. „Expériences expérimentales et théoriques sur la contraction partielles des veines d'eau" etc. Turin 1836. Dann vorzüglich die Mémoiren der Academie zu Turin von 1829, 1830, 1831 etc.

übertreffend) die Versuche über den Ausfluß aus Wandöffnungen unter Verwendung von Mundstücken der verschiedensten Formen, wobei Bidone die Wasserstrahlen auch außerhalb der Mündung studirte, beobachtete, zeichnete und dabei die den Wasserstrahl charakterisirenden Wendungen (ren versements), Knoten (noeud's), Blätter (nappes), Bäuche (ventres), welche sich in verschiedenen Entfernungen von den Mündungen bilden, kennen zu lernen bemüht war [1]).

Sodann sind besonders zu markiren Bidone's Versuche und Ergebnisse über partielle Contraction, so wie über den Ausfluß des Wassers bei breiten Ueberfällen u. m. A., worüber im Verlaufe der später folgenden Darstellungen der verschiedenen hydrodynamischen Erörterungen, Fragen und Aufgaben, ausführlich berichtet werden wird.

Die großartigsten, genauesten und für die practische Anwendung wichtigsten Versuche über den Ausfluß durch rectanguläre Seitenöffnungen sind die, welche auf Veranlassung des französischen Kriegsministeriums, 1827 bis 1829 von Poncelet [2]) und Lesbros [3]), und 1829 bis 1834 von Lesbros allein vorgenommen wurden [4]).

Beide Experimentatoren benutzten hierzu als Wassergefäß einen Festungsgraben der Stadt Metz und zwar den der früher vorhandenen Front „Saint-Vincent“ [5]), wobei die Speisung von der Obermosel aus geschehen und das benutzte Wasser in die Untermosel abgelassen werden konnte. Das erste Sammelgefäß hatte eine Oberfläche von 25000 Quadratmeter und würde allein schon entsprechend gewesen sein, hätte man seine Wasserstände gehörig reguliren können. Da letzteres nicht der Fall war, so setzte man dies Gefäß mit einem zweiten in Verbindung, dessen Oberfläche 15000 Quadratmeter betrug und wobei der Abfluß von $1\frac{1}{2}$ Cubikmeter Wasser eine Senkung des Oberwasserspiegels von nur 1 Millimeter veranlaßte.

Um ferner die Umstände des beabsichtigten Ausflusses so viel als möglich den in der Praxis vorkommenden Fällen anzupassen, wurde an der Mündungsstelle ein hölzernes Durchlaßwehr eingebaut, gleichsam ein dritter Behälter gebildet und in dessen Wand die Ausflußöffnung angebracht [6]).

Von letzterem Behälter führte ein unterirdischer Canal nach dem unteren Moselflusse und befand sich in diesem eine zweite Schutzvor-

---

[1]) Bidone's Erklärungen dieser Erscheinungen hat später (1855) Magnus in Berlin kritisirt und anders (besser) zu geben versucht. Man sehe deshalb Poggend. Annalen der Physik etc. Bd. 95, S. 1.

[2]) Poncelet, geb. 1. Juli 1788 zu Metz, gest. 22. Dec. 1868 zu Paris.

[3]) Lesbros, geb. 1790 zu Vynes (Hautes-Alpes).

[4]) Die betreffenden Hauptwerke sind folgende: Poncelet et Lesbros, Expériences hydrauliques etc. Paris 1832, und Lesbros, Expériences hydrauliques etc. Paris 1851.

[5]) Um diese geschichtlich wichtige Versuchsstelle kennen zu lernen, besuchte der Verfasser im August 1878 die Stadt Metz, fand aber die betreffenden Festungswerke und Wassergräben daselbst so verändert, daß nur durch die äußersten Bemühungen gütiger sachverständiger Freunde zu ermitteln war, daß die fragliche Anlage auf dem Glacis der jetzigen Bastion III der Stadtbefestigung, links von dem Ostende der Pontiffroy-Brücke, existirt hat.

[6]) Später folgt eine (größere) Abbildung dieses dritten Behälters etc.

richtung, die zum Reguliren des Abflusses und insofern ebenfalls dazu diente, das Niveau des Wassers im zweiten Behälter auf einerlei Höhe zu erhalten.

Die Versuche von 1828 erstreckten sich hauptsächlich auf rectanguläre Mündungen in dünner Wand von 0,2 Meter constanter Breite, mit Höhen von 0,01 Meter bis 0,20 Meter und auf Druckhöhen (Abständen des Oberwasserspiegels von der oberen Mündungskante) von 3 Millimeter bis 1,7 Meter. Auch auf einige (untergeordnete) Versuche hatte man Bedacht genommen.

Die Versuche, welche von 1829 bis 1834 Lesbros allein anstellte (der Zahl nach über 2000) übertrafen an Umfang und Mannigfaltigkeit die ersteren bedeutend und erstreckten sich namentlich auf viele bisher unerörterte Fälle der Praxis [1]).

Da ein Resumé aus allen diesen Versuchen dem Charakter der hier zu gebenden geschichtlichen Notizen unangemessen sein würde und später ausführliche Berichte folgen, so beschränken wir uns hier auf folgende Ergebnisse:

Die gemeinschaftlichen Versuche von Poncelet und Lesbros lehrten, daß sich die Ausflußcoefficienten mit den Druckhöhen und mit den Mündungshöhen ändern und daß sie (mit unbedeutenden Ausnahmen) größer werden, wenn Druckhöhen und Mündungshöhen abnehmen.

Ferner ergab sich, daß sich die Ausflußcoefficienten bei größeren Druckhöhen und verschiedenen Mündungshöhen der Mittelzahl 0,610 nähern.

Die von Lesbros allein angestellten Versuche bestätigten nicht nur die vorgenannten Ergebnisse, sondern führten auch noch zu folgendem interessanten und wichtigen Endresultate:

Daß die Ausflußcoefficienten, unter sonst gleichen Umständen, dieselben bleiben, welche Seite einer rectangulären Mündung auch zur Höhe der Basis genommen wird, sobald nur die größte Dimension die kleinste nicht um das Zwanzigfache übertrifft.

So ausgezeichnet und werthvoll diese Metzer Versuche auch im Allgemeinen genannt zu werden verdienen, so ließen sie doch eine für die Praxis bedeutsame Lücke, nämlich Versuche über den Ausfluß bei Ueberfällen größerer Dimensionen und unter den in der Praxis vorkommenden Umständen. Diese Lücke auszufüllen bemühte sich der Ingenieur Castel in Toulouse, auf Veranlassung der Academie der Wissenschaften in Toulouse und D'Aubuisson's de Voisins [2]), seiner Zeit Chefdirector des französischen Bergwerk-Corps.

Als Wasserwerk-Ingenieur der Stadt Toulouse stand Castel der sogenannte Wasserthurm (château d'eau) zur Verfügung, von welchem aus die Stadt stündlich mit 150000 bis 200000 Liter Wasser versorgt wird.

---

[1]) 1100 Versuche betrafen den Ausfluß durch dünne Wand in die freie Luft unter verschiedenen Dispositionen und Formen des Ausflußbehälters. 526 Versuche bei außerhalb angesetzten Gerinnen. 49 Versuche bei unter Wasser gesetzten Durchlaßmündungen. 353 Versuche bei Ueberfällen in die freie Luft mündend, oder mit angesetzten Gerinnen, Ueberfällen an den Enden von besonderen Gerinnen und unvollständigen, d. h. solchen Ueberfällen, welche zum Theil vom Unterwasser bedeckt werden.

[2]) d'Aubuisson, geb. 1769 zu Toulouse, gest. 1841 ebendaselbst.

Unter Berücksichtigung aller möglichen Umstände und mit Aufnahme des ausgeflossenen Wassers in besonderen Aichkasten, wurden nicht weniger als 494 Versuche in drei Reihen angestellt, wobei die Ueberfallsbreiten von 0,01 Meter bis 0,74 Meter variirten und zwar unter Druckhöhen über der Ueberfallschwelle von 0,03 Meter bis 0,24 Meter.

Während wir auf die betreffenden Endresultate bei den später zu erörternden Formeln zurückkommen, welche Castel bei seinen Versuchen zu Grunde legte, werde hier schon ein Hauptergebniß aller Versuche mitgetheilt, darin bestehend, daß der Ausflußcoefficient für verschiedene Breiten des Wandeinschnittes sehr verschieden ist und zwar bei weiteren Einschnitten auffallend größer als bei schmäleren, weshalb auch d'Aubuisson (in der unten notirten Hydraulik, §. 77) 4 Fälle beim Ausflusse des Wassers durch Ueberfälle unterscheidet [1]).

Mit dem Anfange der vierziger Jahre veröffentlichte Weisbach in Freiberg [2]) seine ersten Arbeiten aus dem Gebiete der Experimental-Hydraulik und beginnt damit jene große Reihe werthvoller Arbeiten, wofür ihm Theorie und Praxis für alle Zeiten ein dankbares Andenken widmen muß.

Den Anfang machten seine Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, dem schon ein Jahr später (1843) Versuche über unvollkommene Contraction des Wassers folgten und womit Weisbach ein Gesetz bestimmt ausdrückte, was namentlich Castel und d'Aubuisson nur ahnten, nicht aber zur Klarheit hierüber gelangten.

Von hier ab bezeichnet nämlich, nach Weisbach's Vorgange, die experimentelle, wissenschaftliche Hydraulik jede Contraction bei stillstehendem Oberwasser als vollkommen, dagegen die bei bewegtem Oberwasser als unvollkommen. Zugleich entschied Weisbach bestimmt, daß das Ausflußquantum bei letzterer Contraction stets größer als bei ersterer ist und zwar in dem Maaße, als der Flächenraum der Mündung a größer ist, wie der Querschnitt A des ankommenden Wassers (S. 190), oder der Inhalt der Wand, in welcher sich die Ausflußmündung befindet [3]).

Allgemeiner bekannt wurden Weisbach's fruchtbare Versuche in fast allen Gebieten der technischen Mechanik flüssiger Körper, erst durch die Herausgabe seiner „Ingenieur-Mechanik", wovon 1846 der erste Band erschien.

---

[1]) Die Hauptquelle der Castel'schen Versuchsresultate sind die Mémoires de l'Académie des sciences de Toulouse. T. IV, 1837. Dann d'Aubuisson's Hydraulique. Seconde Édition (1840), Pg. 79 fl. Annales des ponts et chaussées. 1837, 2e Sem., Pg. 113. Annales des chim. et de phys. Tom. 62, sowie Weisbach's Artikel „Ausfluß" in Hülse's Maschinenencyklopädie, Bd. 1, S. 484 ff.

[2]) Julius Weisbach, geb. 10. Aug. 1806 zu Mittelschmiedeberg bei Annaberg im Königreiche Sachsen, gest. 24. Febr. 1871 zu Freiberg.

[3]) Die Begriffe vollkommene und unvollkommene Contraction sind nicht zu verwechseln mit den Begriffen partielle und totale (vollständige) Contraction. Letztere beziehen sich auf die Erscheinungen, daß beziehungsweise der Strahl nur auf einen Theil seines Umfanges, oder überall zusammengezogen wird.

Hiernach bedarf es kaum der Bemerkung, daß wir in den nachfolgenden Theilen der Hydrodynamik auf die von Weisbach gewonnenen Versuchsresultate recht oft zurückkommen werden.

Nach Weisbach bemühte sich (von 1845 ab) Boileau[1]), französischer Artilleriecapitän und Professor in Metz, sowohl die in sehr kleinem Maaßstabe angestellten Versuche von Poncelet und Lesbros, zu vervollständigen, als auch neue Formeln für den Ausfluß bei Ueberfällen aufzustellen[2]). welche über die ganze Wand reichen. Hierbei tadelte Boileau namentlich, daß alle bis dahin aufgestellten Formeln das Oberflächengefälle gar nicht enthielten, und vergleicht deshalb den Ausfluß bei einem Ueberfalle mit dem Ausflusse durch eine Mündung unter Wasser. Auch hielt er für erforderlich, in seiner Formel für das Ausflußquantum die Höhe des Ueberfalls einzuführen. Jedenfalls ist das Urtheil[3]) über diese Arbeiten Boileau's richtig, daß es viel naturgemäßer ist, das Princip der unvollkommenen Contraction weiter zu verfolgen, als durch neue Annahmen und Wendungen der eigentlichen Sache aus dem Wege zu gehen. Später kommen wir auch auf die Boileau'schen Versuche zurück.

Zu fast derselben Zeit hatte auch der nordamerikanische Ingenieur Francis Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle bis zu 10 Fuß Breite und für Druckhöhen von 0,60 bis 1,60 Fuß angestellt[4]).

Die aus den Versuchen entnommenen Formeln folgen später und verdienen wohl beachtet zu werden.

Weniger günstig hat man eine Formel über den Ausfluß durch Ueberfälle beurtheilt, welche der französische Artillerie-Hauptmann Clarinvall im Jahre 1857 aufstellte[5]) und welche den merkwürdigen Charakter hat, daß sie das wahre, ausgeschlossene Wasserquantum angiebt, ohne eines Ausflußcoefficienten zu bedürfen.

Größeres Vertrauen hat sich dagegen eine Formel, ebenfalls für die Berechnung der Wassermenge bei Ueberfällen, erworben, welche Prof. Braschmann in Moskau im Anfange der sechziger Jahre aufstellte[6]) und die, dem Principe nach, der Weisbach'schen unvollkommenen Contraction entspricht. Wir werden auch diese Formel

---

[1]) Beiläufig gesagt, stellte Boileau seine Versuche in Metz an derselben Stelle wie Poncelet und Lesbros an.

[2]) „Mémoire sur le jaugeage des cours d'eau" im XIX. Bande des Journals de l'école polytechnique etc. (Paris, 1850), und als besondere Schrift: „Traité de la mesure des eaux courantes". Paris, 1854.

[3]) Bornemann, Vergleich der Formeln von Weisbach und Boileau über den Ausfluß durch Ueberfälle und Mündungen über die ganze Wand. In der Zeitschrift „Der Civilingenieur". Bd. 2, S. 72.

[4]) J. B. Francis, Lowell hydraulic experiments etc., on the flow of water over weirs etc. Boston, 1855.

[5]) Annales des Mines, Tome XII (1857), und Bornemann's Civilingenieur etc., Bd. 5 (1859), S. 210.

[6]) Stüssi in der Schweizerischen Polytechn. Zeitschrift. Bd. 9 (1864), S. 1—42 (nach einer gekrönten Preisschrift). Ferner Bornemann's Civilingenieur. Bd. IX (1863), S. 450. Dann Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, Jahrg. 1867, S. 32, und Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1868, S. 699.

später, bei der vergleichenden Berechnung eines und desselben practischen Falles benutzen.

Von beachtenswerthen Experimenten, über Ausfluß des Wassers aus Gefäßen, sind, aus jüngster Zeit und der Gegenwart, (leider) nur die des Herrn Kunstmeisters Bornemann in Freiberg, eines Schülers und würdigen Nachfolgers Weisbach's im Gebiete der practischen Hydrodynamik, rühmlichst zu nennen, dessen Versuche und Ergebnisse von 1866 ab bis zur Gegenwart reichen Von besonderem Nutzen werden uns später in diesem Buche die Bornemann'schen Versuchsresultate namentlich bei Berechnungen des Ausflusses durch Mündungen unter Wasser[1]) und bei vollkommenen[2]) und unvollkommenen Ueberfällen sein[3]).

Noch bleibt viel zu thun übrig, und steht zu hoffen, daß namentlich die vorhandenen Widersprüche und Lücken durch Versuche beseitigt und beziehungsweise ausgefüllt werden, welche insbesondere bei letztgenannten Ausflüssen bestehen und doch für ganz genaue Wassermessungen nothwendig sind, die man zur Ermittlung des Güteverhältnisses von Wassermotoren dringend bedarf.

Erstes Capitel.

Ausfluß des Wassers aus Bodenöffnungen bei constanter Druckhöhe.

§. 77.

Ausflußgeschwindigkeit.

Unter Voraussetzung der Gültigkeit des Satzes vom Parallelismus der Schichten (S. 189), ferner, daß die Bewegung bereits den Beharrungszustand erreicht hat und das Wasser die Gefäßquerschnitte überall ausfüllt, läßt sich mit Hülfe des Principes von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, in nachstehender Weise ein mathematischer Ausdruck für die Geschwindigkeit herleiten, mit welcher das Wasser aus der horizontalen Mündung NN' eines beliebig gestalteten Gefäßes (Fig. 70) fließt.

Fig. 70.

Angenommen wird überdies, daß die inneren Gefäßwände sanft gekrümmt sind, nirgends Vorsprünge, Ecken, Kanten, Löcher etc. vorkommen, auch von Reibungen, Adhäsion des Wassers etc., sowohl seiner Theilchen unter sich, als mit den Gefäßwänden, abgesehen wird.

Hiernach sei A der Querschnitt der Oberfläche MM' des Gefäßes, V die Geschwindigkeit, mit welcher sich in der betreffenden Schicht das Wasser fortwährend ersetzt. Der

---

[1]) Civilingenieur, Bd. XVII (1871), S. 46.
[2]) Ebendaselbst, Bd. XVI (1870), S. 291 und 375.
[3]) Desgleichen, Bd. XXII (1876), S. 87.

Querschnitt der Mündung NN' sei $= a$, die Ausflußgeschwindigkeit daselbst sei $= v$ und endlich der Verticalabstand des Mündungsquerschnittes vom horizontalen Oberwasserspiegel die sogenannte Druckhöhe $= h$.

Ueberdies werde vorerst die Flüssigkeit als allein der Schwerkraftswirkung unterworfen gedacht.

Ein Massenelement m, was in der sehr kleinen Zeit τ durch das Gefäß strömt, läßt sich ausdrücken, wenn γ und g die früheren Bedeutungen beibehalten, durch

$$m = \frac{\gamma A V \tau}{g} = \frac{\gamma a v \tau}{g}.$$

Die lebendige Kraft, welche der Schicht MM' inne wohnt, ist hiernach: $\frac{1}{2} m V^2$, oder weil, nach dem Satze vom Parallelismus der Schichten, $V = \frac{va}{A}$ ist, auch $\frac{1}{2} m \left(\frac{av}{A}\right)^2$. Die lebendige Kraft, welche diese Schicht erlangt hat, wenn sie nach NN' gekommen ist, beträgt: $\frac{1}{2} m v^2$.

Daher ist auch die beim Niedergange dieser Schicht von MM' nach NN' gewonnene lebendige Kraft:

$$\frac{1}{2} m \left[v^2 - \left(\frac{av}{A}\right)^2\right].$$

Da nun die Flüssigkeit allein der Schwerkraft unterworfen vorausgesetzt wurde, so wird die mechanische Arbeit, welche jenen Zuwachs an lebendiger Kraft erzeugte, sein: gmh und daher nach dem genannten Principe folgen:

$$(1) \quad \frac{1}{2} m \left[v^2 - \left(\frac{av}{A}\right)^2\right] = mgh,$$

woraus sich endlich ergiebt:

$$\text{I.} \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{a^2}{A^2}}},$$

ein bereits (nach S. 190) von Johann und Daniel Bernoulli, so wie von d'Alembert gefundener Ausdruck.

Ist a im Verhältniß zu A sehr klein, mindestens $\frac{a}{A} < \frac{1}{10}$, so kann man $\frac{a^2}{A^2}$ gegen 1 vernachlässigen und (wie S. 190) setzen:

$$\text{II.} \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Zusatz 1. Vorstehende Formeln geben die Ausflußgeschwindigkeiten etwas zu groß an, was seinen Grund in der unbeachtet gelassenen Reibung des Wassers an den Gefäßwänden und in der Klebrigkeit (viscosité) oder nicht völligen Flüssigkeit desselben hat. Daher wird auch die wirkliche Geschwindigkeit, womit Wasser aus horizontalen Bodenöffnungen in dünner Wand ausströmt, mittelst obiger Formeln nur erhalten, wenn man dieselben mit jener Zahl ψ (S. 198) multiplicirt, welche

kleiner als 1 ist und die man den **Geschwindigkeitscoefficienten** nennt [1])

Im Allgemeinen scheint dieser Coefficient, unter sonst gleichen Umständen, mit der Druckhöhe zu wachsen (?), indem sich aus **Weisbach's** [2]) Versuchen folgende Zusammenstellung machen läßt:

$h =$ in Metern	0,02	0,50	3,5	17,0	103,0
$\psi =$	0,959	0,967	0,975	0,994	0,994

Hierbei erfolgte der Ausfluß durch ein gut abgerundetes, nach Innen erweitertes Mundstück von 1 Centimeter Durchmesser.

Vorstehendem gemäß würde beim Ausflusse durch Mündungen in dünner Wand ein Verlust an Geschwindigkeit und somit auch an lebendiger Kraft oder an mechanischer Arbeit stattfinden.

Zusatz 2. Für $a = A$ wird $v = \infty$, was jedoch kein Widerspruch ist, sobald man beachtet, daß dann wegen $V = \frac{av}{A}$ auch $V = \infty$ sein muß.

Beispiel. Mit welcher Geschwindigkeit strömt Wasser aus einer horizontalen Bodenöffnung in dünner Wand von $a = 0^{\square m},02$ Inhalt, bei einer constanten Druckhöhe von $h = 4^m,0$, wenn der horizontale Oberwasserspiegel $A = 0^m,20$ ist und $g = 9,8088$ angenommen wird?

Auflösung. Man erhält ohne Weiteres:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 9,8088}{1 - \frac{1}{100}}} = 8^m,903.$$

Vernachlässigt man $\frac{a}{A}$ im Nenner, so folgt

$$v = 8^m,858.$$

Wird endlich der betreffende Geschwindigkeitscoefficient $= 0,97$ gesetzt, so ergiebt sich die wirkliche Geschwindigkeit

im ersten Falle: $0,97 \cdot 8^m,903 = 8^m,636$,
im zweiten Falle: $0,97 \cdot 8,858 = 8^m,502$.

§. 78.

In vorstehendem Paragraphen ist angenommen, daß die Flüssigkeit an der Oberfläche und Ausflußmündung gleichen Druck erfährt. Ist dies nicht der Fall, wird vielmehr die Einheit der Oberfläche mit einer Kraft P und die der Ausflußöffnung eben so mit einer Kraft p gedrückt, wobei erstere im Sinne der Bewegung, letztere entgegengesetzt wirkt, so gestalten sich die betreffenden Rechnungen folgendermaßen.

Die Größe der Arbeiten, welche während der Zeit τ von P

[1]) Die Nothwendigkeit der Einführung eines **allgemeinen** Geschwindigkeitscoefficienten hat zuerst **Bidone** (Turiner Mémoiren, T. XL, §. 19) nachgewiesen. In Deutschland ist dieser Gegenstand jedoch zuerst von **Weisbach** zur Geltung gebracht worden.

[2]) Ing.-Mech. Bd. I, Fünfte Auflage (1875), S. 969. Ausführlich in **Weisbach's** Mittheilungen etc. Civilingenieur, Bd. V (1859), S. 2 und S. 87.

und p der Flüssigkeit eingeprägt werden, sind nämlich

$$PAV\tau - pav\tau,$$

oder, weil $m = \frac{\gamma A V\tau}{g} = \frac{\gamma av\tau}{g}$ ist:

$$PAV\tau = \frac{gmP}{\gamma} \text{ und}$$

$$-pav\tau = -\frac{gmp}{\gamma}.$$

Daher wird die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen zu:

$$(1) \quad \tfrac{1}{2}mv^2\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) = gmh + \frac{gmP}{\gamma} - \frac{gmp}{\gamma},$$

so wie hieraus, wenn man zugleich den Geschwindigkeitscoefficienten ψ einführt:

$$v = \psi\sqrt{\frac{2g\left[h + \frac{P-p}{\gamma}\right]}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

Beispiel. Die horizontale Ausflußöffnung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes mündet in einen luftverdünnten Raum, woselbst eine Pressung von $\frac{1}{10}$ Atmosphäre statthat, während die Oberfläche durch die umgebende, äußere Luft pro Quadratmeter mit 10333 Kilogramm gepreßt wird. Man soll die Größe der Ausflußgeschwindigkeit für den Fall berechnen, daß die constante Druckhöhe $h = 1^m,0$, der Coefficient $\psi = 0,97$ ist, zugleich aber um den Einfluß des Werthes $\frac{a}{A}$, wo $a = 0^{\square m},01$ ist, beurtheilen zu können, auf einander folgend $\frac{a}{A} = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{25}$ und Null setzen.

Auflösung:

$$v = 0,97\sqrt{\frac{2.9,8088\left[1 + \frac{10333\,(1 - 0,1)}{1000}\right]}{1 - \frac{1}{25}}} = 14^m,0734 \text{ für } \frac{a}{A} = \frac{1}{5},$$

eben so

$$v = 13^m,8595 \text{ für } \frac{a}{A} = \frac{1}{10};$$

$$v = 13,8011 \quad \text{„} \quad \frac{a}{A} = \frac{1}{25};$$

$$v = 13,790 \quad \text{„} \quad \frac{a}{A} = \text{Null}.$$

§. 79.

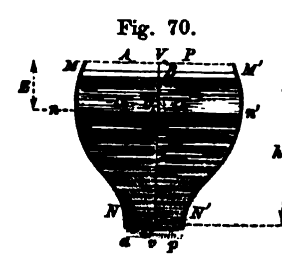
Hydraulischer Druck.

Aus (1) des vorigen Paragraphen folgt noch:

$$\frac{p}{\gamma} = h + \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right),$$

oder auch wegen $\frac{a}{A} = \frac{V}{v}$:

$$(1) \quad \frac{p}{\gamma} = h + \frac{P}{\gamma} - \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{V^2}{2g}\right).$$


Fig. 70.

Für eine Schicht nn', im Innern der Flüssigkeit um Z vom Oberwasserspiegel abstehend, deren Flächeninhalt O ist, woselbst die Wassertheilchen die Geschwindigkeit U besitzen und in ihr die Pressung Π stattfindet, wird sonach sein:

$$(2) \quad \frac{\Pi}{\gamma} = Z + \frac{P}{\gamma} - \left(\frac{U^2}{2g} - \frac{V^2}{2g}\right).$$

Hierbei sind $\frac{p}{\gamma}$ und $\frac{\Pi}{\gamma}$, nach §. 15, Zusatz 1, Wassersäulen, welche die betreffenden Drücke messen.

Die Ausdrücke (1) und (2) lehren, daß der Druck der bewegten Flüssigkeit auf die Wände des einschließenden Gefäßes von dem Drucke einer gleichen ruhenden Flüssigkeit verschieden ist, weshalb man ersteren den hydraulischen Druck, im Gegensatze zu dem letzteren, dem hydrostatischen, nennt.

Ueberhaupt ist der hydraulische Druck an einer beliebigen Wandstelle des Gefäßes gleich dem hydrostatischen Drucke an derselben Stelle, letzteren vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen eben daselbst und an der Oberfläche der im Gefäße befindlichen Flüssigkeit.

Je schneller also das Wasser durch einen bestimmten Querschnitt strömt, um so weniger Druck übt dasselbe gegen die Wände des betreffenden Gefäßes aus.

Diese bereits von Daniel Bernoulli[1]) aufgefundenen Sätze, stimmen auch ganz gut mit betreffenden Versuchen überein.

Zusatz 1. Aus der Gleichung (2) folgt überdies, da $U = \frac{av}{O}$ und $V = \frac{av}{A}$ ist,

$$(3) \quad \frac{\Pi}{\gamma} = Z + \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2g}\left(\frac{a^2}{O^2} - \frac{a^2}{A^2}\right).$$

In den Fällen, wo $\frac{a}{A} < \frac{1}{25}$ ist und $P = p$ in die Geschwindigkeitsformel, §. 78, gesetzt werden kann, was fast immer der Fall ist, wenn das Gefäß überall von atmosphärischer Luft umgeben wird, läßt sich als hinreichend genau, wegen $\frac{v^2}{2g} = h$, setzen:

$$(4) \quad \frac{\Pi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + z - h\frac{a^2}{O^2}.$$

Hier bezeichnet nun $\frac{P}{\gamma}$ die den Atmosphärendruck messende Wassersäule $b = 10^m{,}333$, so daß überhaupt z und O veränderliche Größen sind. Allgemein für $\frac{\Pi}{\gamma}$ kann man daher schreiben:

---

[1]) Hydraulico-statico (Hydrodynamica, Sectio XII) und Karsten, Lehrbegriff der gesammten Mathematik. (Die Hydraulik.) 5. Theil. §. 220.

$$\frac{\Pi}{\gamma} = b \pm \chi,$$

wenn

$$z - h\,\frac{a^2}{O^2} = \pm \chi \text{ gesetzt wird.}$$

Ist, wie bereits oben bemerkt, das fragliche Wassergefäß überall von atmosphärischer Luft umgeben, so erfährt eine Wandstelle desselben im Abstande z vom Oberwasserspiegel, von Innen nach Außen, einen Druck, welcher gleich $b \pm \chi$ ist, dagegen einen Druck von Außen nach Innen $= b$, so daß der resultirende oder wirkliche Druck beträgt:

$$\chi = z - h\,\frac{a^2}{O^2}.$$

Wie leicht einzusehen, sind nun in Bezug auf diesen Druck folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1. Es ist der Druck χ positiv, d. h. von Innen nach Außen gerichtet, wenn $z > h\,\frac{a^2}{O^2}$, oder $O^2 > \frac{h}{z}\,a^2$ ist.

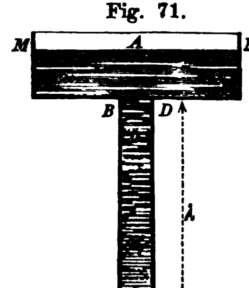
2. Der fragliche Druck ist Null, sobald $z = h\,\frac{a^2}{O^2}$ oder $O^2 = \frac{a^2 h}{z}$.

3. Negativ ist endlich dieser Druck, d. h. er verwandelt sich in ein Saugen, wenn

$$z > h\,\frac{a^2}{O^2} \text{ oder } O^2 < \frac{a^2 h}{z} \text{ ist.}$$

In letzterem Falle ist zugleich der Querschnitt O die Stelle, wo sich das voranlaufende Wasser von dem nachfolgenden trennen wird, oder es wird sich das Wasser daselbst von der Wand losreißen und innerhalb der Röhre einen freien Strahl bilden.

Fig. 71.



Bildet das Wassergefäß einen größeren Behälter MM von der Höhe $= l$, Fig. 71, in Verbindung mit einer prismatischen Röhre, deren überall gleicher Querschnitt $= a$ und Höhe $= \lambda$ ist, so wird aus (1) wegen $O = a$, $z = l$ und $h = \lambda + l$:

$$\frac{\Pi}{\gamma} = b + l - (\lambda + l), \text{ d. i. } \frac{\Pi}{\gamma} = b - \lambda.$$

Soll daher das durch die Röhre BF abfließende Wasser ein zusammenhängender Körper bleiben, so darf die Röhre λ nicht über $b = 10^m,333$ hoch sein. Hat aber λ eine größere Höhe, so wird bei BD das voranlaufende Wasser von dem nachfolgenden abreißen und überhaupt so weit ein luftleerer Raum gebildet werden, bis im unteren Theile der Röhre eine $10^m,333$ hohe Wassersäule gleichsam hängen bleibt oder von der Atmosphäre getragen wird[1]. Eben so wird das Wasser durch EF nur in sofern abfließen, in wie weit das durch BD nachlaufende Wasser diese untere Säule immer wieder erhöht, so daß man sehr fehlen würde, wollte man die Geschwindigkeit des durch

[1]) Dieser Satz ist unter andern von Wichtigkeit bei den sogenannten Henschel-Jonval'schen Turbinen (Achsial-Turbinen).

EF ausfließenden Wassers so berechnen, als entspräche ihr die Druckhöhe $l + \lambda$.

Zusatz 2. Auf das hervorgehobene, unter bestimmten Umständen und Verhältnissen eintretende Saugen einer verticalen Röhre, durch welche Wasser herabfließt, gründet sich unter Andern das sogenannte Wassertrommelgebläse (Trombe)[1], Fig. 72.

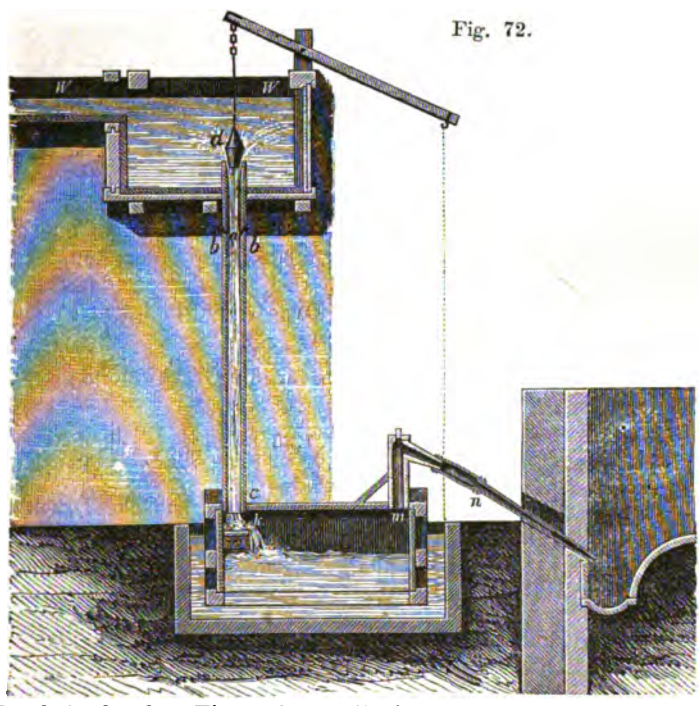


Fig. 72.

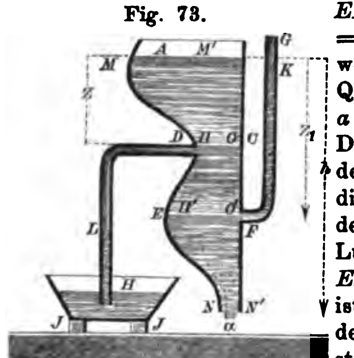
In beistehender Figur ist *WW* der Spiegel des zuströmenden Wassers, welches nach Erhebung des Propfen *d* in der Röhre *bc* herabstürzt, dabei einen Strahl bildet, welcher die Röhre, namentlich bei *a*, nicht ausfüllt und folglich durch die in die Röhrwand gebohrten Löcher *bb* äußere Luft ansaugt. Unter der Mündung schlägt der Wasserstrahl auf eine feste Platte *k*, wodurch die Luft vom Wasser noch mehr getrennt und übrigens abgesperrt zum Ausflusse nach *m* in die Düse *n* genöthigt wird, während das Wasser am Boden der ganzen Anordnung abfließen kann.

---

[1]) Ausführlicheres über diese Gebläse (Tromben) giebt Chaptal in Gilb. Annalen, Bd. 3, S. 182. D'Aubuisson in den Annales des Mines von 1828, Nr. 3 und 4. Ueber die Wirksamkeit des Wassertrommelgebläses handelt besonders Magnus im 80. Bande (1850), S. 32, von Poggend. Annalen. Auf dieselbe Weise wie das Wassertrommelgebläse wirkt auch die sogenannte Saugstrahlpumpe von Thomson (Weisb. Ing. Mech., Bd. 3, S. 1188), und die von Nagel (Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. X, 1866, S. 126). Ferner ist von ähnlicher Wirkung die Giffard'sche Dampfstrahlpumpe (Zeuner, Grundzüge der mech. Wärmetheorie, 2. Auflage, S. 391) etc. etc.

Beispiel. Es sind die Pressungen oder hydraulischen Druckhöhen in den Schichten DC, Fig. 73, vom Inhalte $O = 0{,}03$ Quadratmeter, in der Entfernung $AO = Z = 0^m{,}4$ vom Oberwasserspiegel und in $EF = O_1 = 0{,}15$ Quadratmeter um $AO' = Z_1 = 0^m{,}90$ Entfernung anzugeben, wenn der Querschnitt $MM' = A = 0{,}2$ Quadratmeter, die Abflußöffnung (NN') $a = 0{,}025$ Quadratmeter und die constante Druckhöhe $MN = h = 1^m{,}25$ ist. Außerdem ist anzugeben, auf welche Höhe sich die Flüssigkeit in einer Röhre FG erhebt, deren oberes Ende mit der atmosphärischen Luft, das untere F aber mit der Schicht EF communicirt, sowie endlich anzugeben ist, wie hoch das Wasser aus einem besonderen Gefäße J in einer Röhre HD aufsteigen wird, welche an der Stelle D in das Innere des Gefäßes mündet. Der Geschwindigkeitscoefficient ψ werde $= 1$ gesetzt.

Fig. 73.



Auflösung. Zuerst erhält man für die Geschwindigkeit $= v$ der Bodenmündung NN':

$$v = \sqrt{\frac{2 \,.\, 9{,}8088 \,.\, 1{,}25}{1 - (\frac{1}{8})^2}} = 4^m{,}991.$$

Sodann ergiebt sich mittelst Formel (4) die hydraulische Druckhöhe im Innern von DC:

$$\frac{\Pi}{\gamma} = 0{,}4 + 10{,}333 - \frac{(4{,}9911)^2}{2 \,.\, 9{,}8088}\left[\left(\frac{0{,}025}{0{,}030}\right)^2 - \left(\frac{0{,}025}{0{,}200}\right)^2\right] 9^m{,}910.$$

Daher die Druckdifferenz, weil 10,333 dem Drucke der äußeren Luft an derselben Stelle entspricht:

$$9^m{,}910 - 10{,}333 = -0^m{,}423.$$

Der resultirende Druck in DC ist folglich negativ, so daß $0^m{,}423$ zugleich die Höhe HL ist, bis zu welcher sich das Wasser in der Röhre HD erhebt.

Für die hydraulische Druckhöhe in der Schicht EF ergiebt sich eben so:

$$\frac{\Pi'}{\gamma} = 0{,}9 + 10{,}333 - \frac{(4{,}9911)^2}{2 \,.\, 9{,}8088}\left[\left(\frac{0{,}025}{0{,}150}\right)^2 - \left(\frac{0{,}025}{0{,}200}\right)^2\right] = 11^m{,}221.$$

Dem resultirenden Drucke an der Wandstelle F entspricht folglich die Höhe:

$$11{,}221 - 10{,}333 = 0^m{,}888,$$

welches zugleich diejenige ist, zu welcher das Wasser in der Röhre FG empor steigt.

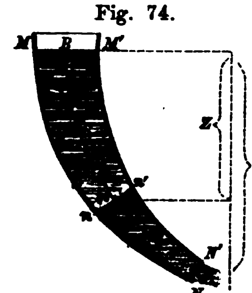
Bei betreffenden Versuchen werden sich, der passiven Widerstände, Reibungen, Krümmungen etc. wegen, die hier berechneten Höhen etwas geringer herausstellen.

§. 80.

Ausfluß aus Gefäßen mit nicht verticaler Achse, wenn der Beharrungszustand noch nicht eingetreten ist.

Hierzu denken wir uns das Gefäß als eine beliebig gekrümmte aber enge Röhre MN, Fig. 74, damit die Hypothese vom Parallelismus der Schichten noch Anwendung finden, d. h. angenommen werden kann, daß sich die Wassertheilchen in Schichten fortbewegen, welche auf der Röhrenachse normal stehen; alle anderen bisherigen Voraussetzungen mögen unverändert Geltung behalten. In gleicher Weise mögen die Bezeichnungen dieselben bleiben, nur werde für den beliebigen Querschnitt nn' in der Entfernung z vom Oberwasserspiegel der Flächeninhalt $= \omega$, die Geschwindigkeit der Wassertheilchen daselbst $= u$, die ganze Achsenlänge der Röhre BC mit S, und die eines beliebigen Theiles wie mC aber $= s$ gesetzt.

Fig. 74.



Das Gewicht q einer unendlich dünnen Schicht nn' von der Länge ds in der Achsenrichtung gemessen, ist zunächst:

$$q = \gamma \omega ds, \text{ so wie deren Masse: } m = \frac{\gamma \omega ds}{g}.$$

Fig. 75.

Sodann aber ergiebt sich für die in der Achsenrichtung der Röhre wirkende Kraft, wenn α den Winkel bezeichnet, welchen das Element ds mit der Verticalen einschließt und mit Bezug auf Fig. 75:

$$q \cos \alpha = \gamma \omega ds \,.\, \cos \alpha = \gamma \omega ds \frac{dz}{ds} = \gamma \omega dz.$$

Ferner ist die wirklich zu Stande gekommene Acceleration: $\frac{du}{dt}$ und die ihr entsprechende Bewegungsgröße:

$$m \frac{du}{dt} = \frac{\gamma \omega ds}{g} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Sonach ist die im Sinne des d'Alembert'schen Principes verlorene Bewegungsgröße der betreffenden Schicht:

$$\frac{\gamma}{g} \omega \left(g dz - \frac{du}{dt} ds \right),$$

so wie die verlorene mechanische Arbeit, wenn man den letzteren Werth mit dem in der Zeit dt zurückgelegten Wege udt multiplicirt:

$$\frac{\gamma}{g} \omega \left(g dz - \frac{du}{dt} ds \right) u dt.$$

Endlich ergiebt sich hiernach die in der ganzen Ausdehnung S der Röhre verlorene mechanische Arbeit, wenn noch beachtet wird, daß $AVdt = \omega u dt = a v dt$ constante Producte sind:

$$(1) \quad \frac{\gamma}{g} \omega u dt \left(\int_0^h g dz - \int_0^S \frac{du}{dt} ds \right).$$

Die gleichzeitigen Arbeiten, welche den Pressungen P und p entsprechen, sind:

$$\Sigma\, \omega\, \Pi\, u dt = \omega u dt\, (P - p),$$

weshalb überhaupt statt (1) entsprechend dem angeführten Principe erhalten wird:

$$0 = \omega u dt\, (P - p) + \frac{\gamma}{g}\, \omega u dt \left(\int_0^h g dz - \int_0^s \frac{du}{dt} ds \right), \text{ oder}$$

$$(2)\quad 0 = P - p + \gamma h - \frac{\gamma}{g} \int_0^s \frac{du}{dt}\, ds.$$

Es bleibt zur vollständigen Auflösung der vorliegenden Aufgabe, nämlich die Ausflußgeschwindigkeit für den Fall des noch nicht eingetretenen Beharrungszustandes anzugeben, nur noch die nähere Bestimmung von $\frac{du}{dt}\, ds$ übrig, was auf nachstehende Weise geschehen kann.

Man beachte, daß aus $u = \frac{av}{\omega}$, wo v und ω als von einander unabhängige Variabeln zu betrachten sind, durch Differenziation erhalten wird:

$$du = \left(\frac{du}{dv}\right) dv + \left(\frac{du}{d\omega}\right) d\omega, \text{ oder}$$

$$\text{weil } \frac{du}{dv} = \frac{a}{\omega},\ \frac{du}{d\omega} = -\frac{av}{\omega^2} \text{ ist, auch}$$

$$du = \frac{a}{\omega}\, dv - av\, \frac{d\omega}{\omega^2}.$$

Es ist aber v eine Function von t, ω eine Function von s und s wieder eine Function von t, folglich auch

$$du = \frac{a}{\omega}\, \frac{dv}{dt}\, dt - \frac{av}{\omega^2}\, \frac{d\omega}{ds}\, \frac{ds}{dt}\, dt, \text{ oder}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{a}{\omega}\, \frac{dv}{dt} - \frac{av}{\omega^2}\, \frac{d\omega}{ds}\, \frac{ds}{dt}.$$

Beachtet man nun noch, daß $\frac{ds}{dt} = u = \frac{av}{\omega}$ ist, so wird letztere Gleichung zu:

$$\frac{du}{dt} = \frac{a}{\omega}\, \frac{dv}{dt} - \frac{a^2 v^2}{\omega^3}\, \frac{d\omega}{ds}, \text{ oder}$$

$$\frac{du}{dt}\, ds = a\, \frac{dv}{dt}\, \frac{ds}{\omega} - a^2 v^2\, \frac{d\omega}{\omega^3}.$$

Ueberhaupt erhält man nunmehr aus (2):

$$0 = (P - p) + \gamma h - \frac{\gamma}{g}\, a\, \frac{dv}{dt} \int_0^s \frac{ds}{\omega} + \frac{\gamma}{g}\, a^2 v^2 \int_A^a \frac{d\omega}{\omega^3}, \text{ d. i.}$$

wenn die Integration im letzten Gliede ausgeführt und das von der Gefäßform abhängige Integral $\int_0^s \frac{ds}{\omega}$ mit N bezeichnet wird:

$$0 = (P - p) + \gamma h - \frac{\gamma a}{g}\frac{dv}{dt} N + \frac{\gamma}{g}\frac{a^2 v^2}{2}\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{a^2}\right),$$

oder

$$(3) \quad 0 = 2g\left[\frac{P-p}{\gamma} + h\right] - 2aN\frac{dv}{dt} - v^2\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Zur Abkürzung werde jetzt

$$2g\left[\frac{P-p}{\gamma} + h\right] = D,$$

$$2aN = B \text{ und } 1 - \frac{a^2}{A^2} = C \text{ gesetzt,}$$

woraus folgt:

$$0 = D - B\frac{dv}{dt} - Cv^2$$

und weiter sich ergiebt

$$dt = \frac{B \,.\, dv}{D - Cv^2}.$$

Durch Integration findet man ferner: [1])

$$t = \frac{B}{2\sqrt{DC}} \operatorname{Lgnt} \frac{\sqrt{D} + v\sqrt{C}}{\sqrt{D} - v\sqrt{C}}$$

und hieraus endlich:

$$v = \sqrt{\frac{D}{C}} \frac{-1 + e^{\frac{2\sqrt{DC}}{B}t}}{1 + e^{\frac{2\sqrt{BC}}{D}t}}.$$

Uebersteigt, wie gewöhnlich in der Praxis, der Oberflächenquerschnitt des Wassers den Mündungsquerschnitt sehr bedeutend, so wächst v rasch mit der Zeit t. Nach verhältnißmäßig kurzer Zeit werden daher die Potenzen von e so groß, daß man die Einheiten im vorstehenden Werthe von v gegen die Potenzen von e vernachlässigen, also schreiben kann

$$v = \sqrt{\frac{D}{C}}, \text{ d. i.}$$

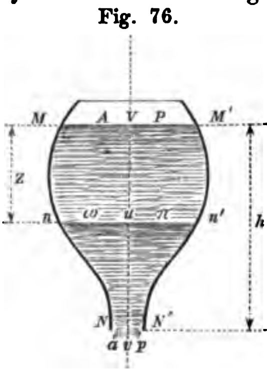
$$v = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{P-p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

[1]) $\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \operatorname{Lgnt} \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} + \text{const.}$

Derselbe Werth wäre sofort erhalten worden, hätte man in (3) $\frac{dv}{dt}$ = Null, also den Beharrungszustand als bereits eingetreten vorausgesetzt, was ganz der Ableitung desselben Ausdruckes in §. 77 entspricht.

Zusatz. Um eine Anwendung von den Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen (S. 193) zu machen, werde letzterer Ausdruck nochmals, jedoch für den einfacheren Fall, Fig. 76, abgeleitet, wo die Achse des Gefäßes als vertical gerichtet vorausgesetzt wurde. Man erhält dann zunächst ohne Weiteres, wenn die Richtung der Schwerkraft als mit der Z Achse zusammenfallend angenommen wird und wegen $Z = g$:

Fig. 76.



$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{dp}{dz}\right) = g - \left(\frac{dw}{dt}\right) - w\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

oder, wenn wir, den Bezeichnungen nebenstehender Figur 76 entsprechend, Π statt p und u statt w schreiben:

$$(4) \quad \frac{1}{\varrho}\left(\frac{d\Pi}{dz}\right) = g - \left(\frac{du}{dt}\right) - u\left(\frac{du}{dz}\right).$$

Dann ist aber auch $u = \frac{av}{\omega}$ und demnach:

$$\frac{du}{dt} = \frac{a}{\omega}\frac{dv}{dt} \text{ und } u\left(\frac{du}{dz}\right) = -\frac{a^2v^2}{\omega^3}\frac{d\omega}{dz}, \text{ daher aus (4)}$$

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{d\Pi}{dz}\right) = g - \frac{a}{\omega}\frac{dv}{dt} + \frac{a^2v^2}{\omega^3}\frac{d\omega}{dz}.$$

Multiplicirt man hier auf beiden Seiten mit dz und integrirt, so folgt:

$$\Pi = \varrho\left[gz - a\frac{dv}{dt}\int\frac{dz}{\omega} - \frac{a^2v^2}{2\omega^2}\right] + C.$$

Setzt man dann sogleich den Fall voraus, welcher am Ende des Paragraphen erwähnt wurde, wofür also $\frac{dv}{dt}$ = Null ist, so erhält man:

$$(5) \quad \Pi = \varrho\left[gz - \frac{a^2v^2}{2\omega^2}\right] + C.$$

Hiernach ergeben sich aber, mit Bezug auf die Berechnungen unserer Figur und wegen $\varrho = \frac{\gamma}{g}$, die beiden Gleichungen:

$$P = -\frac{\gamma}{g}\frac{a^2v^2}{2A^2} + C \text{ und } p = \frac{\gamma}{g}\left(gh - \frac{v^2}{2}\right) + C.$$

Demnach

$$p - P = \gamma h - \frac{\gamma}{g}\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{g}\frac{a^2v^2}{2A^2},$$

d. i. schließlich wieder:

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{P-p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

§. 81.

Wassermenge.

Um die aus einer horizontalen Gefäßmündung während einer Zeit t fließende Wassermenge zu berechnen, denkt man sich den Weg vt, welchen ein Wasserelement während dieser Zeit durchlaufen würde, als Höhe eines auf der Gefäßmündung normal stehenden Prismas, dessen cubischer Inhalt sonach die fragliche Wassermenge ausdrücken wird.

Bezeichnet demnach Q die pro Secunde ausfließende Wassermenge in Cubikeinheiten, so ist

$$Qt = avt$$
$$Q = av, \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad Q = \psi a \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{P-p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

Ist $P = p$ und $\frac{a}{A} < \frac{1}{25}$, so darf man setzen:

$$\text{II.} \quad Q = \psi a \sqrt{2gh}.$$

Zusatz 1. Unter Beibehaltung von ψ und a erhält man für eine andere Wassermenge Q', wenn h' die entsprechende Druckhöhe ist, die Proportion:

$$Q : Q' = \sqrt{h} : \sqrt{h'} = v : v'.$$

Zur Vergleichung dieses Satzes mit der Erfahrung können Versuche Bossut's[1]) dienen, der bei nachbemerkten Druckhöhen aus Kreismündungen von 1 Zoll Durchmesser pro Minute an Wassermengen in pariser Cubikzollen beobachtete:

Druckhöhen.	Wassermengen.
1 Fuß	2722
2 „	3846
3 „	4710
4 „	5436

Nach vorstehender Proportion müßte daher sein:

$$2722 : 3846 = \sqrt{1} : \sqrt{2}$$
$$3846 : 4710 = \sqrt{2} : \sqrt{3}$$
$$4710 : 5436 = \sqrt{3} : \sqrt{4}$$
$$2722 : 5436 = \sqrt{1} : \sqrt{4}$$
etc. etc.

was genau genug der Fall ist.

---

[1]) Traité d'hydrodynamique §. 513.

§. 82.

Contraction des ausfließenden Wasserstrahles.

Aus dem, was in der geschichtlichen Einleitung Seite 188 und Seite 198 hinsichtlich der hier in der Ueberschrift genannten Erscheinung aus Gefäßmündungen fließender Wassermassen erörtert wurde, erhellt bereits die Thatsache, daß vorstehende Rechnungsresultate viel größere Werthe liefern, als die wirklich beobachteten Ausflußmengen, wenn auch das Verhältniß dieser Wassermassen mit der theoretischen Bestimmung nicht im Widerspruche steht, wie vorher gezeigt wurde. Die Ursache der Contraction der Wasserstrahlen liegt hauptsächlich darin, daß nahe zu der Mündung (noch innerhalb des Gefäßes) der Parallelismus der Schichten gänzlich aufhört, weil besonders die seitwärts der Mündung zuströmenden Wassertheilchen eine Ablenkung des Strahles von der ursprünglichen Richtung erzeugen und hierdurch, so wie durch (wahrscheinlich) noch andere Ursachen (Reibung der Wassertheilchen unter einander und Molecularwirkungen) veranlaßt, eine Zusammenziehung des Strahles (contractio venae) bewirken, wodurch die Mündung nur zum Theil oder gar nicht vom durchfließenden Wasser ausgefüllt wird. Etwas vor der Mündung, außerhalb des Gefäßes, findet die kleinste Zusammenziehung (wenigstens meistentheils) statt und daselbst ist auch der Parallelismus der Schichten wiederhergestellt, weshalb man diesen Querschnitt an die Stelle des Mündungsquerschnittes in die Formeln einführt. Der echte Bruch $= \alpha$, welcher dabei angiebt, um wie viel der Strahlquerschnitt in der kleinsten Zusammenziehung kleiner als der Mündungsquerschnitt ist, oder, womit die letztere Mündung multiplicirt werden muß, um den Strahlquerschnitt zu erhalten, wird (Seite 198) der Contractionscoefficient genannt.

Man erhält daher für die wirkliche (effective) aus horizontaler Bodenmündung vom Querschnitt a pro Secunde fließende Wassermasse $= Q$:

$$Q = \psi \alpha a v.$$

Wie bereits in der geschichtlichen Einleitung (Seite 198) erörtert wurde, setzt man:

$$\mu = \psi \alpha,$$

welche Gleichung dem Bidone'schen Satze entspricht, daß der Ausflußcoefficient das Product aus Geschwindigkeits- und Contractionscoefficient ist.

Zusatz 1. Im Allgemeinen ist die Contraction ausfließender Wasserstrahlen von sehr vielen Umständen abhängig, die leider lange noch nicht so vollständig bekannt sind, als dies die technische (practische) Hydrodynamik wünschenswerth macht. Das Hauptsächlichste, was sich bis jetzt[1]) hierüber (als auch für die Praxis wichtig) sagen läßt, ist folgendes:

---

[1]) Die beachtenswerthesten Abhandlungen, Werke etc., welche Bemühungen enthalten, die Contractionsfragen auf mathematischem Wege zu erörtern, beziehungsweise die betreffenden Coefficienten zu berechnen, sind folgende: Bidone, Mémoire sur la Détermination théorique de la section contractée

a. Zunächst hängt die Contraction von der Größe der Druckhöhe und der Mündungsfläche ab (ob auch letztere einspringende Winkel besitzt oder nicht) und wird geringer (die Ausflußmenge größer), je kleiner die Mündungen und je niedriger die Druckhöhen sind.

b. Ferner ist die Contraction davon abhängig, ob die Mündung unmittelbar in der Gefäßwand angebracht ist[1]), oder ob dieselbe durch kurze (cylindrische, conische oder conoidische) innere oder äußere Ansatzröhren gebildet wird. Am kleinsten wird die Contraction, wenn ein derartiges außerhalb der Wandmündung angesetztes Rohr die Gestalt des zusammengezogenen Wasserstrahles hat (siehe nächstfolgenden Zusatz), dagegen wird die Contraction am größten, wenn dies kurze Ansatzrohr cylindrisch, nach Innen, wie Fig. 67 (Seite 197), gerichtet ist und der Ausfluß so bewirkt wird, daß das Wasser die Röhre niemals ausfüllt.

c. Ist die Contraction von der Fläche abhängig, worin sich die Mündung befindet, und zwar wird sie geringer, wenn die Fläche nach Innen zu concav, größer, wenn sie convex ist.

d. Ferner hängt die Contraction davon ab, ob die Mündung im Gefäße bis an eine oder mehrere Seitenwände reicht, oder inwendig mit Blech etc. eingefaßt (armirt) ist. Sodann ist die Contraction an den betreffenden Mündungsstellen aufgehoben und man nennt die ganze Erscheinung (Seite 200) die partielle Contraction, im Gegensatze zu der, welche an allen Stellen der Mündung statt hat und deshalb die vollständige Contraction genannt wird. Unter allen Umständen wird die Ausflußmenge vergrößert, sobald eine partielle Contraction auftritt.

e. Endlich ist die Contraction noch davon abhängig, ob das Wasser mit großer oder kleiner Geschwindigkeit vor der Ausflußmündung ankommt, was sich im Allgemeinen wiederum darnach richtet, ob der Mündungsinhalt in Beziehung auf die Gefäßwand oder auf dem Querschnitt des Gefäßes beträchtlich oder gering ist.

Befindet sich das Wasser vor der Ausflußmündung beinahe in Ruhe, so heißt die dann stattfindende Contraction (Seite 205) eine vollkommene, während sie unvollkommen genannt wird, wenn das Wasser mit beträchtlicher Geschwindigkeit vor der Mündung anlangt. Unter sonst gleichen Umständen wird durch das Auftreten der unvollkommenen Contraction die Ausflußmenge vergrößert.

---

des veines liquides. Memoiren der Turiner Academie, Bd. 34 (1830). — Gerstner, Handbuch der Mechanik, Bd. II (1833), S. 142 (§. 104, Anmerkung). — Navier, Résumé des leçons sur l'application mécanique. Seconde partie. Nr. 53. — Buff, Poggend. Annalen der Physik und Chemie. Bd. 46 (1839), S. 227. — Feilitsch, Ueber den Ausfluß der Flüssigkeiten aus Oeffnungen in dünner Wand etc. etc. Poggend. Annalen etc., Bd. 63 (1844), S. 1 und S. 215. — Bayer, Theorie der Contraction des Wassers beim Ausflusse durch Oeffnungen in ebener, dünner Wand. Crelle's Journal f. d. Baukunst. 1847, S. 131. — Scheffler, Die Principien der Hydrostatik und Hydraulik. Erster Band (1847), S. 224, §. 82 ff. — Boussinesq, „Essai sur la théorie des eaux courantes". Paris 1877, und zwar, von §. 203 ab, unter der Ueberschrift: „Équations differencielles dont doit dépendre la forme de la veine".

[1]) Ob diese Wand selbst dünn oder dick ist.

f. Schließlich hängt die Contraction noch davon ab, ob der Strahl nach Verlassen der Mündung ungehindert in die freie Luft tritt, oder ob sich vor der Mündung, und zwar unterhalb oder seitwärts derselben, Platten oder Flächen finden, an welche sich das Wasser zum Theil hängen und in seiner Bewegung verzögert werden kann, wie solches namentlich bei den Schützenöffnnngen der Wasserräder der Fall ist.

Zusatz 2. Um zunächst in Bezug auf die eben bemerkten wichtigen Fragen einige speciellere Antworten beim Ausflusse aus einer kreisförmigen und aus einer quadratischen horizontalen Bodenmündung in dünner Wand[1]), bei vollständiger und vollkommener Contraction, zu liefern, theilen wir folgende Versuche Bossut's[2]) mit.

Die Mündung war in einer $\frac{1}{2}$ Linien dicken Platte angebracht und die constante Druckhöhe betrug 11 Fuß 8 Zoll 10 Linien pariser Maß (die Acceleration $g = 30{,}1958$ pariser Fuß):

Durchmesser des Kreises oder Größe der Quadratseite in Linien $= d$.	Kleinster Durchmesser $= \delta$ des zusammengezogenen Strahles in Linien.	Abstand $= e$ der kleinsten Zusammenziehung von der Mündung in Linien.	$\frac{\delta}{d}$	$\frac{e}{d}$	μ	α	φ
Kreis { 12	9,8	6—7	0,816	0,542	0,6164	0,666	0,926
Kreis { 24	19,5	12—13	0,812	0,521	0,6179	0,659	0,937
Quadrat = 12	9,8	7	0,816	0,583	0,6157	0,6658	0,924

Aus Versuchen und directen Strahlmessungen, beim Ausflusse durch horizontale, kreisförmige Bodenöffnungen, welche Michelotti der Sohn[3]) anstellte, läßt sich eine ähnliche Zusammenstellung machen, die wir hier (des Vergleiches wegen) noch folgen lassen:

Druckhöhe in Pariser Zollen.	Mündungsdurchmesser $= \delta$ in Linien.	Kleinste Strahldicke $= \delta$ in Linien.	Abstand $= e$ der kleinsten Zusammenziehung von der Mündung in Linien.	$\frac{\delta}{d}$	$\frac{e}{d}$	μ
77,50	72,0	56,850	28,45	0,789	0,395	0,619
135,25	72,0	56,756	28,35	0,788	0,394	0,618
82,78	36,0	28,285	14,15	0,785	0,393	0,612
140,87	36,0	28,185	13,85	0,783	0,385	0,611

Als Mittelwerth für Annäherungsrechnungen könnte man hiernach für Oeffnungen in dünner Wand, den Contractionscoefficienten

[1]) Ueber die Contractionserscheinungen beim Ausflusse des Wassers durch cylindrische, prismatische, conische und conoidische Ansätze, wird später ausführlich berichtet und gehandelt.

[2]) Traité d'hydronamique. Tome second, §. 462, §. 487 und §. 488.

[3]) Hydraulische Versuche. Deutsche Ausgabe, S. 244.

$$\alpha = 0,666\ldots = \tfrac{2}{3},$$

den Ausflußcoefficienten $\mu = 0,616$ und

den Geschwindigkeitscoefficienten $\psi = \frac{\mu}{\alpha} = 0,925$

in Rechnung bringen.

Annäherungsweise und für viele practische Fälle hinreichend genau läßt sich auch nach den Bossut'schen Versuchen die Form des zusammengezogenen Strahles dadurch bestimmen, daß man das Verhältniß der Mündung zur kleinsten Strahldicke, zur Entfernung der letzteren, wie $d : \delta : e = 10 : 8 : 5$ setzt, wonach sich auch der Krümmungshalbmesser $oa = oc$ der Begrenzungscurve ac des Conoides $abcd$ zu 13 ergiebt, wenn man anders die Curve ac als einen Kreisbogen betrachtet.

Fig. 77.

Die Michelotti'schen Werthe liefern das Verhältniß

$$d : \delta : e = 100 : 79 : 39.$$

Zusatz 3. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich überdies noch der höchst wichtige Satz, daß in allen Fällen, wo man eine Contraction des Wasserstrahles zu erwarten hat, die Fläche der Mündung a, durch welche das Wasser läuft, durch den Querschnitt αa der größten Zusammenziehung in den betreffenden Formeln ersetzt werden muß.

Aus den Gleichungen für v, S. 210 und 3, §. 79, wird sonach:

$$v = \psi \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{P-p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}}} \text{ und}$$

$$\frac{\Pi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + z - \left(\frac{\alpha^2 a^2}{O^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right).$$

Für die pro Secunde aus der Mündung vom Querschnitte a wirklich ausfließende Wassermenge erhält man endlich:

$$Q = \psi\alpha a v = \mu a v = \mu a \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{P-p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}}}.$$

Beispiel. Welche Wassermenge fließt durch eine kreisförmige Bodenöffnung in dünner Wand bei vollkommener und vollständiger Contraction, wenn die constante Druckhöhe $h = 4^m,0$, der Mündungsquerschnitt $a = 0\square^m,02$, der Querschnitt des horizontalen Oberwasserspiegels $A = 0\square^m,80$ beträgt, der Contractionscoefficient $\alpha = 0,64$ und der Ausflußcoefficient $\mu = 0,62$, endlich der Druck P gegen den Oberwasserspiegel gleich dem p gegen die Mündung gesetzt werden kann.

Auflösung. Da $\sqrt{2g} = 4,4292$, $\sqrt{2gh} = 2 \,.\, 4,4292 = 8^m,8584$, ferner $\left(\frac{\alpha a}{A}\right)^2 = 0,000256$, so ergiebt sich

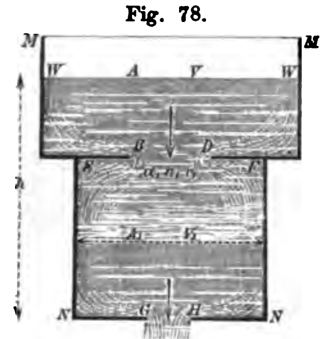
$$v = 8^m,86 \text{ und}$$

$$Q = 0,62 \,.\, 0,02 \,.\, 8,86 = 0,1099 \text{ Cubikmeter pro Secunde.}$$

§. 83.

Verengungen und Erweiterungen im Innern der Gefäße.

Fig. 78.



Kommen im Innern eines Gefäßes, aus welchem Wasser strömt, dünne Scheidewände, wie in Fig. 78 vor, so treten plötzliche Geschwindigkeitsänderungen und somit Verluste an lebendiger Kraft ein, welche mehr oder weniger auf die Größe der Ausflußgeschwindigkeit und Wassermenge von Einfluß sind.

Die betreffenden Rechnungen in solchen Fällen haben, bei Anwendung des Principes der lebendigen Kräfte, ganz einfach auf die vorkommenden Geschwindigkeitsverluste (nach dem Vorgange Borda's, S. 197 und nach dem Carnot'schen Principe) Rücksicht zu nehmen, sind aber sonst den vorhergehenden ganz gleich zu führen.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen, sei jetzt α_1 der Contractionscoefficient für die Mündung BD, a_1 der Querschnitt der letzteren und v_1 die Geschwindigkeit daselbst. Das Gefäß EN habe überall den Querschnitt A_1 und die Schicht EF in demselben besitze die Geschwindigkeit $= V_1$. Die Pressungen in A und a mögen gleich groß sein.

Zuerst werde sodann bemerkt, daß hier

$$AV = \alpha_1 a_1 v_1 = A_1 V_1 = \alpha a v, \text{ oder}$$

$$v_1 = \frac{\alpha a}{\alpha_1 a_1} v \text{ und } V_1 = \frac{\alpha a v}{A_1} \text{ ist.}$$

Wegen des plötzlichen Ueberganges der Bewegung aus dem Querschnitt BD in den Querschnitt EF entsteht ein Geschwindigkeitsverlust:

$$v_1 - V_1 = \frac{\alpha a}{\alpha_1 a_1} v - \frac{\alpha a}{A_1} v$$

und daher ein Verlust an lebendiger Kraft:

$$\frac{m}{2}(v_1 - V_1)^2 = \frac{m v^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha_1^2 a_1^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)^2 \alpha^2 a^2.$$

So wie nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

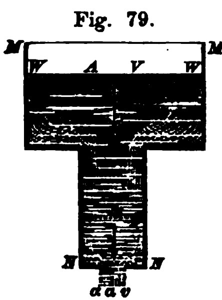
$$\tfrac{1}{2} m (v^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} m v^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 a_1} - \frac{1}{A_1}\right)^2 \alpha^2 a^2 = gmh, \text{ oder}$$

$$v^2 \left\{\left(1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right) + \alpha^2 a^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 a_1} - \frac{1}{A_1}\right)^2\right\} = 2gh,$$

so wie

$$\text{I.} \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right) + \alpha^2 a^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 a_1} - \frac{1}{A_1}\right)^2}}.$$

Fig. 79.



Für den Fall, daß das Gefäß die Form wie Fig. 79 besitzt, also $a_1 = A_1$ ist, wird aus I:

$$\text{II.} \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right) + \frac{\alpha^2 a^2}{A_1^2}\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2}}.$$

Nimmt endlich das Gefäß die Gestalt von Fig. 80 an, d. h. wird $a = A_1$, $\alpha = 1$, so erhält man:

$$\text{III.} \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2}},$$

Fig. 80.

oder endlich, wenn $\frac{a}{A}$ recht klein ist, ergiebt sich:

$$\text{IV.} \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2}},$$

ein bereits (nach S. 197) von Borda für die Ausflußgeschwindigkeit bei kurzen cylindrischen Ansatzröhren gefundener Ausdruck.

Für $\alpha_1 = 0{,}64$ wird aus IV:

$$v = 0{,}872 \sqrt{2gh},$$

während der Mittelwerth aus den directen Versuchen giebt:

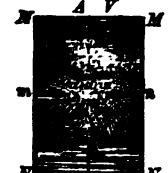
$$v = 0{,}816 \sqrt{2gh}.$$

Die Ursache der nicht völligen Uebereinstimmung liegt wahrscheinlich an der Nichtbeachtung des Anhängens der flüssigen Massen an den Gefäßwänden, so wie überhaupt an unserer Nichtbekanntschaft mit der wahren Natur der flüssigen Massen.

Spätere Paragraphen werden weitere Erfahrungen und Aufschlüsse über diesen Gegenstand enthalten.

Zusatz 1. Mannigfache technische Anwendungen machen die Betrachtung einiger speciellen Fälle besonders wünschenswerth.

Fig. 81.



Bei einer Verengung, wie Fig. 81, erhält man, wenn die in der Figur eingeschriebenen Bezeichnungen angenommen werden, einen Verlust an lebendiger Kraft:

$$\tfrac{1}{2} m (v_1 - V)^2 = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{A}{\alpha_1 a_1} - 1\right)^2 V^2.$$

Bezeichnet man mit z die Widerstandshöhe oder den Druckhöhenverlust, so giebt das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

$$\tfrac{1}{2} m \left(\frac{A}{\alpha_1 a_1} - 1\right)^2 V^2 = gmz, \text{ d. i.}$$

$$z = \left(\frac{A}{\alpha_1 a_1} - 1\right)^2 \frac{V^2}{2g}.$$

Wird hier $\left(\frac{A}{\alpha_1 a_1} - 1\right)^2 \frac{V^2}{2g} = \eta$ gesetzt und η (nach Weisbach) der Widerstandscoefficient genannt, so erhält man auch

$$z = \eta \frac{V^2}{2g}.$$

Fig. 82.

Zusatz 2. Hat das Gefäß die Form von Fig. 82 und machen wir von den eingeschriebenen Bezeichnungen Gebrauch, so erhält man für den Verlust an lebendiger Kraft, wegen der Erweiterung bei ab:

$$\tfrac{1}{2} m (V - V_1)^2 = \tfrac{1}{2} m V^2 \left(1 - \frac{A}{A_1}\right)^2.$$

Ferner wegen der Verengung bei cd, einen Verlust:

$$\tfrac{1}{2} m \left(\frac{V}{\alpha} - V\right)^2 = \tfrac{1}{2} m V^2 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Und wenn z_1 den Verlust an Druckhöhe oder die sogenannte Widerstandshöhe bezeichnet, nach bekanntem Principe:

$$\tfrac{1}{2} m V^2 \left(1 - \frac{A}{A_1}\right)^2 + \tfrac{1}{2} m V^2 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = gmz_1, \text{ d. i.}$$

$$z_1 = \frac{V^2}{2g} \left\{\left(1 - \frac{A}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right\}.$$

Fig. 83.

Zusatz 3. Besitzt endlich das Gefäß die Gestalt von Fig. 83, so wird bei ab ein Verlust an lebendiger Kraft entstehen, der gleich ist:

$$\tfrac{1}{2} m \left(\frac{V_1}{\alpha_1} - V_1\right)^2 = \tfrac{1}{2} m V^2 \left(\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{A}{A_1}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m V^2 \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 \left(\frac{A}{A_1}\right)^2;$$

ferner bei cd ein Verlust stattfinden, der gleich ist:

$$\tfrac{1}{2} m (V_1 - V)^2 = \tfrac{1}{2} m V^2 \left(\frac{A}{A_2} - 1\right)^2.$$

Bezeichnet daher jetzt z_2 die Widerstandshöhe, so folgt, wie vorher:

$$\tfrac{1}{2} m V^2 \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 \left(\frac{A}{A_1}\right)^2 + \tfrac{1}{2} m V^2 \left(\frac{A}{A_1} - 1\right)^2 = gmz_2,$$

woraus sich ergiebt:

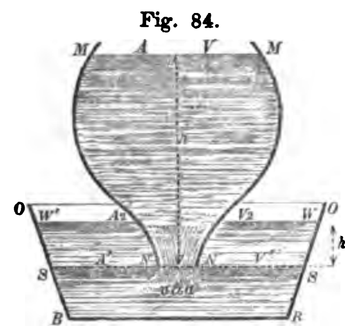
$$z_2 = \frac{V^2}{2g} \left\{\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 \left(\frac{A}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{A}{A_1} - 1\right)^2\right\}.$$

§. 84.

Ausfluß durch Bodenmündungen unter Wasser.

Es sei MN, Fig. 84, ein beliebiges Gefäß ohne innere Kanten und Vorsprünge, überall sanfte Uebergänge von einer Wandstelle zur anderen bildend, dessen Mündung NN auf eine Tiefe h_1 unter dem constanten Wasserspiegel OO in dem besonderen Gefäße RR taucht. Unmittelbar bei NN verbreite sich die ausströmende Flüs-

Fig. 84.



sigkeit plötzlich in den Querschnitt SS, während die über NN vorhandene Druckhöhe h während des ganzen Ausflusses dieselbe bleibt, endlich die Pressungen auf dem Spiegel bei MM und OO einander gleich sind.

Gebraucht man auch hier die in den Figuren eingeschriebenen Bezeichnungen, wobei dieselben Buchstaben die bereits früher festgestellten Bedeutungen haben, so erhält man, ohne zuvörderst Rücksicht auf plötzliche Geschwindigkeitsänderungen zu nehmen, nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

$$(1) \quad \tfrac{1}{2} m (V_2^2 - V^2) = gm (h - h_1).$$

Wegen der plötzlichen Geschwindigkeitsänderung im Querschnitte SS hat man nach Carnot's Satze einen Verlust an lebendiger Kraft in Rechnung zu bringen, der

$$\tfrac{1}{2} m (v - V_1)^2$$

beträgt. Deshalb nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

$$(2) \quad \tfrac{1}{2} m (V_2^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} m (v - V_1)^2 = gm (h - h_1).$$

Nun ist aber $\alpha a v = A V = A_1 V_1 = A_2 V_2$, folglich:

$$V = \frac{\alpha a}{A} v, \; V_2 = \frac{\alpha a}{A_2} v, \; V_1 = \frac{\alpha a}{A_1} v$$

und daher aus (2)

$$\tfrac{1}{2} m v^2 \left(\frac{\alpha^2 a^2}{A_2^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2} \right) + \tfrac{1}{2} m \left(v - \frac{\alpha a}{A_1} v \right)^2 = gm (h - h_1), \text{ d. i.}$$

$$\text{I.} \quad v = \sqrt{\frac{2g (h - h_1)}{\alpha^2 a^2 \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A^2} \right) + \left(1 - \frac{\alpha a}{A_1} \right)^2}}.$$

Sind A, A_1 und A_2 recht groß und a recht klein, so folgt genau genug

$$\text{II.} \quad v = \sqrt{2g (h - h_1)}.$$

§. 85.

Ausfluß aus bewegten Gefäßen.

Es sei MN, Fig. 85, ein beliebiges Gefäß, welches sich in einer gleichförmigen Drehbewegung um die Verticalachse XX und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit ω befindet. Im Boden dieses Gefäßes sind sehr kleine Oeffnungen BD und EF angebracht, durch welche Wasser strömt, und zwar in der Art, daß die ausgeflossene Wassermenge stets durch einen genau eben so großen Zufluß ersetzt wird, die Druckhöhen über den Mündungen also constant sind, endlich auch der Beharrungszustand des Ausflusses bereits eingetreten ist.

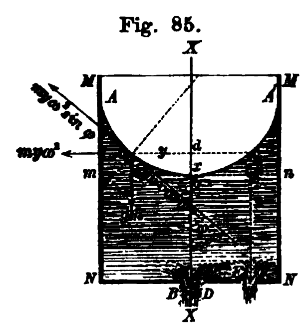


Fig. 85.

Aus §. 7, Zusatz 3, ist für diesen Fall bekannt, daß die Oberfläche der flüssigen Masse ein Paraboloid und die Durchschnittslinie $AabcA'$ der Oberfläche mit einer Verticalebene eine gemeine Parabel bildet, deren Parameter $\frac{2g}{\omega^2}$ ist, wenn g wie bisher die Acceleration der Schwerkraft bezeichnet[1]).

Die Gleichung der betreffenden Durchschnittslinie ist sonach:

$$y^2 = \frac{2g}{\omega^2} x$$

und woraus folgt:

$$\frac{(y\omega)^2}{2g} = x.$$

Da nun $y\omega$ die Umfangsgeschwindigkeit ist, welche ein Punkt a der Oberfläche besitzt, der sich in einer Entfernung $= y$ von der Drehachse befindet, so erhält man auch, wenn diese Geschwindigkeit mit u bezeichnet wird:

$$\frac{u^2}{2g} = x\ (= \overline{ck}).$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks wird man aber in den Stand gesetzt, anzugeben, um wie viel die Druckhöhen für Ausflußmündungen sich vergrößern, die nicht unmittelbar an der Drehachse angebracht sind.

Bezeichnet man daher die Druckhöhe eb für die sehr kleine Mündung BD mit h, so erhält man für die Druckhöhe einer ebenfalls kleinen Mündung EF, die um eg von der Drehachse absteht,

---

[1]) Der Beweis hierzu läßt sich u. A. auch folgendermaßen führen. Es sei a ein beliebiger Punkt der gedachten Durchschnittslinie, so wird ein daselbst befindliches Wasserelement $= m$ mit der Kraft gm vertical niederwärts, zufolge der Fliehkraft aber auch gleichzeitig mit der Kraft $my\omega^2$ radial auswärts getrieben, wenn y die Entfernung des fraglichen Elementes von der Drehachse XX bezeichnet. Zerlegt man diese beiden Kräfte in Composanten, welche mit der Tangente des Curvenelementes bei a zusammenfallen, während andere in die Richtung der Normale zu liegen kommen, und beachtet, daß, für den Gleichgewichtszustand, letztere durch die Cohäsionskraft der Wasseroberfläche aufgehoben werden müssen, erstere sich aber das Gleichgewicht halten, so erhält man für letzteren Fall die Bedingungsgleichung:

$$(1)\quad my\omega \sin\varphi = gm \cos\varphi,$$

sobald φ den Winkel bezeichnet, welche die Tangente bei a mit der Verticale einschließt. Beachtet man nun, daß, wenn $bd = x$ und $ad = y$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes a sind, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$ ist, so folgt aus (1)

$$\omega^2 y \operatorname{tg}\varphi = g \text{ und } \omega^2 y \frac{dy}{dx} = g, \text{ oder } y dy = \frac{g}{\omega^2} dx.$$

Integrirt man den letzteren Ausdruck, so ergiebt sich endlich:

$$y^2 = \frac{2g}{\omega^2} x.$$

mittelst des obigen Ausdrucks

$$\overline{cg} = h + \overline{ck} = h + \frac{u^2}{2g},$$

wobei natürlich, wegen $\overline{cd} = \overline{eg}$, die Größe u die Umfangsgeschwindigkeit bezeichnet, welche die Mitte der Mündung $\overline{EF}$ bei gleichförmiger Umdrehung des Gefäßes um die Achse XX besitzt.

Aus der Mündung EF wird daher das Wasser mit einer Geschwindigkeit $= v$ fließen, welche ist:

$$\text{I.} \quad v = \psi \sqrt{2g\left(h + \frac{u^2}{2g}\right)} = \psi \sqrt{2g\left(h + \frac{y^2\omega^2}{2g}\right)}.$$

Aus der Mündung $\overline{BD}$ strömt dagegen das Wasser mit einer Geschwindigkeit:

$$\text{II.} \quad v = \psi \sqrt{2gh}.$$

Diese Formeln sind übrigens von der Gefäßform ganz unabhängig und sind selbst dann noch anwendbar, wenn sich unterhalb b, in der Richtung mbn eine Wand befindet, welche das Zustandekommen des Paraboloids ganz verhindert, wie dies namentlich bei gewissen horizontalen Wasserrädern der Fall ist.

Beispiel. Welche Wassermenge fließt pro Secunde aus einer Bodenöffnung EF von $a = 0^m{,}01$ Querschnitt in dünner Wand eines cylindrischen Gefäßes MN angebracht, welches sich gleichförmig um eine Verticalachse dreht, wenn die constante Druckhöhe an der Stelle der Drehachse gemessen $h = 4^m{,}0$ beträgt, die Mitte der Oeffnung EF um $0^m{,}2$ von der Drehachse absteht, der Radius des kreisförmigen Querschnittes $bn = eN = 0^m{,}3$ ist und endlich pro Minute 80 Umdrehungen erfolgen, der Ausflußcoefficient aber gleich 0,62 gesetzt werden kann.

Auflösung. Zuerst ist $\omega = \frac{2\pi \,.\, 80}{60} = 8{,}3773$, folglich:

$$u = x\omega = 0{,}2 \times 8{,}3773 = 1{,}67546, \text{ daher:}$$

$$v = \sqrt{2 \,.\, 9{,}8088 \,.\, 4 + (1{,}67546)^2}$$

$$v = 9^m{,}01 \text{ und}$$

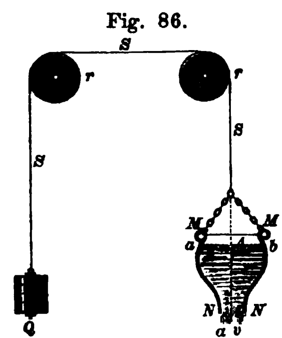
$$Q = 0{,}62 \,.\, 0{,}01 \,.\, 9{,}01 = 0{,}05558 \text{ Cubikmeter.}$$

§. 86.

Ausfluß aus einem Gefäße mit verticaler Achse, welches mit bestimmter Acceleration auf- (oder abwärts) bewegt wird.

Es sei MN, Fig. 86, das bemerkte Gefäß, dessen Masse, einschließlich des darin befindlichen Wassers, am Ende einer Zeit t gleich m (also vorerst veränderlich) gesetzt werden mag, ferner sei M die Masse eines Gewichtes Q, wodurch eine Bewegung des Gefäßes MN vertical aufwärts veranlaßt wird, endlich V die Geschwindigkeit, welche am Ende der Zeit t, Gefäß wie Gewicht Q gemeinschaftlich besitzen. Die Masse der Rollen rr, über welche für den gedachten Zweck die völlig biegsame Schnur S geleitet ist,

Fig. 86.



werde eben so vernachlässigt, wie die Reibung der Rollzapfen in ihren Lagern.

Am Ende der Zeit t wohnt daher dem bewegten Systeme eine lebendige Kraft inne, welche gleich ist:

$$\tfrac{1}{2}(M+m)V^2.$$

Der Zuwachs an lebendiger Kraft innerhalb eines Zeitelementes dt wird daher betragen:

$$(1)\quad d\left[(M+m)\frac{V^2}{2}\right]=(M+m)VdV+\tfrac{1}{2}V^2dm.$$

Die mechanische Arbeit, welche dem Systeme während derselben Zeit dt eingeprägt wird, beträgt ferner

$$(2)\quad g(M-m)Vdt;$$

daher nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, aus der Vergleichung von (1) und (2)

$$(M+m)VdV+\tfrac{1}{2}V^2dm=g(M-m)Vdt,$$

woraus gefunden werden kann:

$$(3)\quad (M+m)\frac{dV}{dt}=g(M-m)+\tfrac{1}{2}\frac{dm}{dt}V.$$

Für die Bewegung des Wassers im Gefäße, bevor der Beharrungszustand eingetreten ist, hat man ferner nach (3), §. 80, für gegenwärtigen Fall:

$$(4)\quad \left(g+\frac{dV}{dt}\right)z-a\frac{dv}{dt}\int_0^s\frac{dz}{\omega}-\frac{v^2}{2}\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right)=0.$$

Aus der Verbindung von (3) mit (4) erhält man leicht v und somit die Lösung der fraglichen Aufgabe, unter der Voraussetzung, daß die Druckhöhe z constant ist.

Ist bereits der Beharrungszustand des Wasserflusses eingetreten, so werden auch v und m constant, folglich dv und dm zu Null und daher aus (3) und (4):

$$(5)\quad \frac{dV}{dt}=g\frac{M-m}{M+m},$$

$$g\left\{1+\frac{M-m}{M+m}\right\}z=\frac{v^2}{2}\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right) \text{ und}$$

$$v=\sqrt{2gz\frac{2M}{(M+m)\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right)}}.$$

Wird das Gefäß mit unveränderlicher Geschwindigkeit, also gleichförmig aufwärts bewegt, so ist $\frac{dV}{dt}=$ Null zu setzen, in welchem Falle aus v wird:

$$v=\sqrt{2gz},$$

d. h. das Wasser strömt mit derselben Geschwindigkeit aus, als befände sich das Gefäß im Zustande der Ruhe. Für den Fall der Abwärtsbewegung des Gefäßes ist die Acceleration $\frac{dV}{dt}$ negativ in Rechnung zu bringen.

Weiteres über den Ausfluß aus bewegten Gefäßen findet sich in folgenden Werken: Bossut, Traité d'hydrodynamique (auch deutsch von Langsdorf). Tome premier. §. 296. — Scheffler, die Principien der Hydrostatik und Hydraulik, Bd. I, §. 126. — Grashof, theoretische Maschinenlehre. Bd. I (Hydraulik), §. 81.

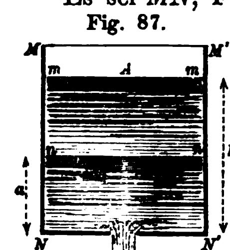
Zweites Capitel.

Ausfluß aus horizontalen Bodenöffnungen bei veränderlicher Druckhöhe.

§. 87.

Es sei MN, Fig. 87, ein prismatisches Gefäß vom Querschnitte $= A$, welches von der Bodenmündung, deren Querschnitt $= a$ ist, bis zu einer Höhe $\overline{Nm} = \overline{N_1 m_1} = h$, mit Wasser gefüllt ist und daher das Volumen des letzteren gleich $A \,.\, h$ einschließt.

Fig. 87.



Man soll die Zeit $= t$ finden, nach welcher die anfängliche Druckhöhe auf $\overline{nN} = \overline{n_1 N_1} = x$ herabgesunken ist. Hierzu erhält man sofort die Gleichung:

$$-Adx = \mu a dt \sqrt{2gx}, \text{ also}$$

$$dt = -\frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}, \text{ woraus folgt:}$$

$$t = -\frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \int_h^x dx x^{-\frac{1}{2}}, \text{ d. i.}$$

$$\text{I. } \quad t = \frac{2A}{\mu a \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{x}).$$

Für die Zeit $= t_1$ des völligen Leerlaufens, wo $x =$ Null, erhält man sonach:

$$\text{II. } \quad t_1 = \frac{2A\sqrt{h}}{\mu a \sqrt{2g}}.$$

Die Zeit t_2, während welcher, unter Voraussetzung einer constanten Druckhöhe $= h$, das Volumen $A \,.\, h$ aus demselben Gefäße geflossen sein würde, läßt sich ohne Weiteres durch die Gleichung finden:

$$\mu a t_2 \sqrt{2gh} = Ah, \text{ woraus folgt:}$$

$$t_2 = \frac{A\sqrt{h}}{\mu a \sqrt{2g}}.$$

Die Zeit des Leerlaufens eines prismatischen Gefäßes ist hiernach genau doppelt so groß als die Zeit, welche erforderlich sein würde, wenn dasselbe Volumen bei constanter Druckhöhe herausfließen sollte.

Anmerkung. Die Formel II. enthält die Voraussetzung, daß der Ausfluß, vom Anfange bis zur völligen Entleerung des Gefäßes keine Störungen durch Wirbel und Einsenkung in der Mitte des niedergehenden Wasserspiegels erfährt, was in der Wirklichkeit nicht der Fall ist. Sobald vielmehr der Wasserspiegel bis zu einer gewissen Tiefe herabgesunken ist, bildet sich über der Mündung ein Trichter, der eine Verminderung der Druckhöhe zur Folge hat und der selbst dann nicht vollständig vermieden werden kann, wenn man auf der Oberfläche der Flüssigkeit, in geeigneter Weise, leichte Körper, z. B. eine Holzscheibe, schwimmen läßt, die sich mit dem Wasserspiegel gleichmäßig senken. Die Uebereinstimmung der Formel II. mit der Beobachtung ist aus diesen Gründen nicht so groß, wie dies bei der Formel I. der Fall ist, sobald die Senkung nicht zu tief herabgegangen ist, wie insbesondere aus nachfolgendem Beispiele und desfalligen Experimenten Bossut's hervorgeht[1]).

Beispiel 1. In welcher Zeit senkt sich der Wasserspiegel in einem prismatischen Gefäße vom Querschnitte $= A = 9$ □Fuß (Pariser Maaß), um 4 Fuß, wenn die anfängliche Druckhöhe 11 Fuß 8 Zoll beträgt und die Ausflußöffnung in dünner Wand ein Kreis von 2 Zoll Durchmesser ist?

Auflösung. Nimmt man mit Bossut $\mu = \frac{5}{8} = 0{,}625$ an, so findet sich nach I:

$$t = \frac{2\,.\,9}{0{,}625\,.\,0{,}785\,(\frac{1}{6})^2\,\sqrt{2g}}\,(\sqrt{11{,}66} - \sqrt{7{,}66})$$

und wenn (ebenfalls mit Bossut) $g = 30{,}1958$ Pariser Fuß gesetzt wird, folgt $t = 110{,}59$ Sec. $=$ 1 Minute 50,59 Sec., während die Beobachtung $t = 1$ Minute 52 Sec. gab.

Diese mit noch anderen Beobachtungen desselben Experimentators stellen wir in folgender Tabelle zusammen, wobei bemerkt werden mag, daß die Uebereinstimmung noch größer gewesen wäre, hätte Bossut μ entsprechender angenommen.

Anfängliche Druckhöhe.	Durchmesser der kreisförmigen Mündung.	Senkung des Oberwasserspiegels.	Beobachtete Zeit.	Berechnete Zeit.
11 Fuß 8 Zoll	1 Zoll	4 Fuß	7 Min. 25½ Sec.	7 Min. 22,36 S.
—	2 „	— „	1 „ 52 „	1 „ 50,59 „
—	1 „	9 „	20 „ 24½ „	20 „ 16,0 „
—	2 „	9 „	5 „ 6 „	5 „ 4,0 „

Beispiel 2. Zur Bestimmung des Ausflußcoefficienten in ebener

[1]) Bossut, Traité d'hydrodynamique. Tome second. Nr. 560 und 561.

dünner (Blech-) Wand bei vollständiger und vollkommener Contraction, maß und beobachtete Weisbach[1]) den Querschnitt des betreffenden prismatischen Gefäßes $A = 4388{,}7$ Quadratcentimeter, folglich

$$\frac{2A}{\sqrt{2g}} = 1981{,}7,\ (\sqrt{2g} = 4{,}4292);$$

ferner fand derselbe den Durchmesser der kreisförmigen Mündung $= 3{,}965$ Centimeter, daher den Inhalt der Mündung: $12{,}347$ Quadratcentimeter, die anfängliche Druckhöhe $h = 0^m{,}7520$ und am Ende der Beobachtungszeit von $t = 63{,}5$ Secunden, die Druckhöhe $h_1 = 0{,}3940$. Es fragt sich, wie groß sich hiernach μ berechnet?

Auflösung. Unsere Formel I. giebt:

$$\mu = \frac{2A(\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{at\sqrt{2g}},\ \text{d. i.}$$

$$\mu = \frac{1981{,}7}{12{,}347\,.\,63{,}5}(\sqrt{0{,}7520} - \sqrt{0{,}3940}),$$

$$\mu = 0{,}605.$$

§. 88.

Um die Aufgabe des Ausflusses bei veränderlicher Druckhöhe allgemein zu lösen, müßte man mit Hülfe des (§. 80) die Beziehung zwischen der veränderlichen Druckhöhe x über der Gefäßmündung a, Fig. 88, und der entsprechenden Ausflußgeschwindigkeit v für jede beliebige Zeit aufstellen.

Fig. 88.

Wir wählen hierzu den Fall, daß das Gefäß eine verticale Achse, aber veränderlichen Querschnitt hat, so daß, unter Beibehaltung der Bezeichnungen des (§. 80), A den veränderlichen Flächeninhalt des sinkenden Oberwasserspiegels bezeichnet und aus der Gleichung (3) des gedachten Paragraphen folgt:

$$(1)\ 0 = 2g\left[\frac{P-p}{\gamma} + x\right] - 2aN\frac{dv}{dt} - v^2\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Zu dieser Gleichung kommt noch die sich von selbst verstehende Bedingung:

$$(2)\quad avdt = -Adx.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen t und setzt überdies $v = \sqrt{2g\eta}$, wo η eine veränderliche Druckhöhe bezeichnet, so ergiebt sich:

$$(3)\quad 0 = \left[\frac{P-p}{\gamma} + x\right]dx + \frac{a^2}{A}Nd\eta - \eta\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)dx.$$

Die Integration dieser Gleichung ist ohne besondere Einschränkung für die meisten Fälle mit so besonderen Schwierigkeiten verknüpft, daß für unsere Zwecke auf Navier's „Résumé des

[1]) Hydraulische Versuche. Abtheilung I, S. 90.

leçons" etc., Deuxième Partie, Nr. 42, verwiesen werden muß. Für die meisten unserer practischen Anwendungen kann man in der Regel a^2 so klein gegenüber A voraussetzen, daß alle mit a^2 multiplicirten Glieder wegzulassen sind und aus (3) erhalten wird

$$\frac{P-p}{\gamma} + x = \eta,$$

oder wenn man zu gleicher Zeit $P = p$ voraussetzt:

$$x = \eta = \frac{v^2}{2g}, \text{ d. i.}$$

$$(4) \quad v = \sqrt{2gx}.$$

Aus der Verbindung von (2) mit (4) folgt aber sodann, wenn zugleich μa statt a gesetzt wird:

$$\mu a dt \sqrt{2gx} = -Adx, \text{ folglich:}$$

$$(5) \quad dt = \frac{-Adx}{\mu a \sqrt{2gx}}.$$

Ist A constant und die anfängliche Druckhöhe $= h$, so erhält man für die Zeit der Senkung um $h - x$, so daß die Druckhöhe am Ende der Zeit t zu x geworden ist, ohne Weiteres:

$$(6) \quad t = -\frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \int_h^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2A}{\mu a \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{x}),$$

d. h. denselben Ausdruck, welcher bereits §. 87 gefunden wurde.

Die Gleichung (5) werde nunmehr dahin erweitert, daß sie für den Fall brauchbar ist, wo pro Secunde ein Wasserquantum q oder qdt pro Zeit dt zufließt, welches kleiner oder größer ist, wie die durch die Mündung abfließende Wassermenge.

Da die Geschwindigkeit, womit sich das Wasser an der Oberfläche ersetzt $\frac{q}{A}$ ist, so erhält man statt (2):

$$\mu a dt \sqrt{2gx + \left(\frac{q}{A}\right)^2} = -Adx + qdt, \text{ sonach}$$

$$dt = \frac{-Adx}{-q + \mu a \sqrt{2gx + \left(\frac{q}{A}\right)^2}}.$$

In den meisten Fällen ist jedoch $\left(\frac{q}{A}\right)^2$ als klein genug zu vernachlässigen, so daß überhaupt folgt:

$$(7) \quad dt = \frac{-Adx}{-q + \mu a \sqrt{2gx}}.$$

Hierbei ist einleuchtend, daß der Oberwasserspiegel sinkt oder steigt, je nachdem $q \lessgtr \mu a \sqrt{2gx}$ ist. Ebenso versteht sich von selbst, daß bei nicht prismatischen Gefäßen von der Integration

der Gleichungen (5) oder (7) der veränderliche Querschnitt A als Function von x ausgedrückt werden muß. Aufgaben der folgenden Paragraphen werden über alle diese Bemerkungen vollständigen Aufschluß geben.

§. 89.

Aufgabe 1. Wasseruhren. Ein cylindrisches Gefäß von kreisförmigem Querschnitte, dessen Durchmesser $D = 1$ Meter, mit senkrechter Achse, ist bis auf $h = 4$ Meter Höhe mit Wasser gefüllt. Im Boden desselben soll eine kreisförmige Mündung und an den Seiten des Gefäßes oder an einem (leichten) Schwimmstabe eine derartige Scala angebracht werden, daß in entsprechender Weise Stunden und Minuten abgelesen werden können, überhaupt eine sogenannte Wasseruhr (klepsydera) entsteht, welche zwölf Stunden geht[1].

Es fragt sich, welche Größe die Ausflußöffnung erhalten muß, und nach welcher Regel die Scala anzufertigen ist.

Auflösung. Zuerst liefert die Gleichung II, §. 88, den erforderlichen Werth von $a = \frac{d^2\pi}{4}$, wenn d den Durchmesser der kreisförmigen Mündung bezeichnet:

$$d = D \sqrt{\frac{2\sqrt{h}}{\mu t_1 \sqrt{2g}}}.$$

Der Aufgabe gemäß ist hier $D = 1$, $h = 4$ und $t_1 = 12 . 3600$ (Secunden), daher (wegen $\sqrt{2g} = 4{,}43$), wenn $\mu = 0{,}62$ angenommen wird:

$$d = \sqrt{\frac{2 . 2}{0{,}62 . 12 . 3600 . 4{,}43}}.$$

$$d = 5{,}806 \text{ Millimeter.}$$

Ist, wie vorausgesetzt, t_1 die Zeit, in welcher das Gefäß ganz leer läuft und h_1 die anfängliche Druckhöhe, so erhält man die einer andern Zeit t_2 entsprechende Druckhöhe $= h_2$, nach II, §. 88, durch die Proportion:

$$t_1 : t_2 = \sqrt{h_1} : \sqrt{h_2}, \text{ also}$$

$$t_2 = t_1 \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

Nach letzterer Formel erhält man für die Scala einer Zwölf-Stunden-Uhr:

Zeiten in Stunden.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Höhen vom Gefäßboden aus gerechnet.	4^m	$3^m,361$	$2^m,777$	$2^m,250$	$1^m,777$	$1^m,361$	$1^m,00$	$0^m,694$	$0^m,444$	$0^m,250$	$0^m,111$	$0^m,028$	0

[1]) Abbildungen derartiger Uhren findet man in Rees' „Cyclopaedia". Artikel: Horology, Plates Vol. II.

Jedenfalls darf diese Uhr nur so weit ablaufen, daß die bereits §. 87 erwähnte Trichterbildung über der Mündung nicht eintreten kann.

Zusatz. Wäre ein Gefäß anzugeben verlangt worden, dessen Querschnitte Rechtecke von constanter Breite $= b$, aber veränderlicher Länge $= y$ bilden, welches die Eigenschaft besitzt, daß sich beim Ausflusse aus einer kleinen Bodenöffnung a desselben der Wasserspiegel in gleichen Zeiten um gleich viel senkt, so brauchte man in (5), §. 88, die Ausflußgeschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ nur constant $= -\frac{1}{k}$ zu setzen, worauf man erhalten hätte

$$k = \frac{by}{\mu a \sqrt{2gx}}.$$

Da jedoch $A = by$ angenommen wurde, so folgt:

$$k = \frac{A}{\mu a \sqrt{2gx}}, \text{ woraus sich}$$

$$y^2 = \left(\frac{\mu a k \sqrt{2g}}{b}\right)^2 . x$$

ergiebt, d. h. die Querschnitte rechtwinklig zur Seite b müßten gemeine Parabeln bilden, deren Parameter $\left(\frac{\mu a k \sqrt{2g}}{b}\right)^2$ ist.

§. 90.

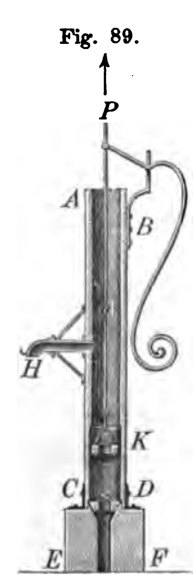


Fig. 89.

Aufgabe 2. Geschwindigkeit der Kolben bei Wasserpumpen. Es ist die Geschwindigkeit anzugeben, mit welcher der Kolben K einer Wasserpumpe, Fig. 89, aufwärts gezogen werden darf, damit das Wasser noch im Stande ist, dem aufsteigenden Kolben zu folgen.

Auflösung. Hierzu ist zuvörderst die Zeit t zu berechnen, innerhalb welcher das Wasser den Raum vom Saugventile CD bis zum höchsten Kolbenstande durchläuft, was, nach einiger Ueberlegung, mit Hülfe von Gleichung I, §. 87, geschehen kann, sobald man von den passiven Widerständen absieht, welche das aufsteigende Wasser zu überwinden hat.

Bezeichnet daher δ den Durchmesser der Ventilöffnung, D den des Kolbens, λ den Abstand des Saugventils vom Unterwasser, l den Kolbenhub und b die Wassersäule ($= 10^m,333$), welche dem Drucke einer Atmosphäre entspricht, so erhält man für die anfängliche Druckhöhe $= h$:

$$h = b - \lambda,$$

ferner für die Druckhöhe am Ende des Hubes:

$$x = b - \lambda - l,$$

sowie

$$\frac{A}{a} = \frac{D^2}{\delta^2}$$

und somit

$$t = \frac{2D^2}{\mu\delta^2 \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{b - \lambda} - \sqrt{b - \lambda - l} \right\}.$$

Sodann ergiebt sich die Geschwindigkeit u, womit das Wasser dem Kolben folgt, zu $u = \frac{l}{t}$. Besitzt nun der Kolben selbst eine Geschwindigkeit $= v$, so muß offenbar $u > v$ sein, wenn das aufsteigende Wasser den Raum hinter dem Kolben stets gehörig ausfüllen, also die Pumpe überhaupt gut wirken soll.

Um die vorerwähnten, passiven Widerstände einigermaßen zu corrigiren, kann man mit D'Aubuisson[1]) den kleinsten möglichen Werth von μ, nämlich 0,5, in Rechnung bringen[2]).

Beispiel. Bei einer Pumpe, wo $l = 1^m,453$ beträgt und pro Minute $4\frac{1}{2}$ Hübe erfolgen, ist $v = \frac{2 \cdot 1,453 \cdot 4,5}{60} = 0^m,218$.

Ist ferner $D = 0^m,3248$, $d = 0^m,135$, $\lambda = 8^m,0$ und wird $b = 10^m,0$ gesetzt, so liefert vorstehende Formel:

$$t = 3,508 \text{ Secunden},$$

sonach $u = \frac{1,453}{3,508} = 0^m,414$, was beinahe noch einmal so groß als v, folglich ganz entsprechend ist.

§. 91.

Aufgabe 3. Ausfluß aus pontonförmigen Gefäßen. In dem Boden des pontonförmigen Gefäßes, Fig. 35, befinde sich eine Mündung vom Inhalte $= a$, die Länge des Wasserspiegels sei $= L$, seine Breite $= B$ und die anfängliche Druckhöhe $= h$. Für die Bodenfläche sei l die Länge und b die Breite.

Man soll die Zeit bestimmen, nach welcher so viel Wasser ausgeflossen ist, daß die dann vorhandene Druckhöhe $= x$ beträgt.

Auflösung. Die Beantwortung der hier gestellten Frage ergiebt sich unmittelbar mit Hülfe von Formel (5), §. 88, sobald man A als Function von x ausgedrückt hat.

---

[1]) Traité d'hydraulique, Nr. 447.

[2]) Prof. Fink in seinem empfehlenswerthen Buche „Theorie und Construction der Brunnenanlagen" etc., 2. Auflage (Berlin 1878), S. 121, findet für (Metermaaße) die Maximal-Kolbengeschwindigkeit $= u$ der Wasserpumpen

$$u = \sqrt{\frac{2g\,(b - \lambda - h_2)}{9}}$$ für einfach wirkende Pumpen mit Saugwindkessel,

$$u = \sqrt{\frac{2g\,(b - \lambda - h_2)}{4,8}}$$ für doppelt wirkende Pumpen mit Saugwindkessel.

Mit h_2 bezeichnet Fink die Druckhöhe, wodurch die Reibungswiderstände gemessen werden.

Nach §. 33, S. 63 erhält man aber für die veränderliche Länge α der Wasserfläche im Abstande x vom Boden

$$\alpha = l + \frac{x(L-l)}{h},$$

so wie für die betreffende Breite $= \beta$:

$$\beta = b + \frac{x(B-b)}{h}, \text{ folglich}$$

$$A = \alpha \cdot \beta = \frac{[lh + x(L-l)][bh + x(B-b)]}{h^2},$$

daher

$$-\mu a dt \cdot h^2 \sqrt{2g} = dx \left\{ \frac{blh^2 + x[(B-b)lh + (L-l)bh] + x^2(L-l)(B-b)}{\sqrt{x}} \right\},$$

so wie hieraus durch Integration:

$$t = \frac{1}{\mu a h^2 \sqrt{2g}} \left\{ 2blh^2(h^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{2}{3}[(B-b)lh + (L-l)bh](h^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) + \right.$$
$$\left. \tfrac{2}{5}(L-l)(B-b)(h^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}}) \right\}.$$

Für die Zeit der völligen Entleerung, wenn die Trichterbildung über der Mündung vermieden werden könnte, erhielte man, weil dann $x =$ Null zu setzen wäre:

$$t = \tfrac{2}{15} \frac{\sqrt{h}}{\mu a \sqrt{2g}} \left\{ 8bl + 2(Bl + bh) + 3BL \right\}.$$

Zusatz 1. Ist das Gefäß ganz unregelmäßig gestaltet, wie dies z. B. bei Teichen oftmals der Fall ist, so hat man sich zur Berechnung der Ausflußzeit einer Annäherungsmethode zu bedienen, wobei am Besten von der Simpson'schen Regel Gebrauch gemacht wird.

Bezeichnet man zu diesem Zwecke die Senkung des Wasserspiegels mit $h_0 - h_n$, theilt letzteren Abstand in n gleiche Theile, bezeichnet die Flächeninhalte der correspondirenden Wasserspiegel respective mit $A_0, A_1, A_2 \ldots A_n$, so wie die entsprechenden Druckhöhen mit $h_0, h_1, h_2 \ldots h_n$ und beachtet endlich die Form der Gleichung 5 (§. 89): $dt = \frac{Adx}{\mu a \sqrt{2gx}}$, behält übrigens die bisherigen Bezeichnungen bei, so findet sich:

$$t = \frac{h_0 - h_n}{3n\mu a \sqrt{2g}} \left\{ \frac{A_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{A_n}{\sqrt{h_n}} + 4\left(\frac{A_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{A_3}{\sqrt{h_3}} \cdots \frac{A_{n-1}}{\sqrt{h_{n-1}}}\right) + \right.$$
$$\left. 2\left(\frac{A_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{A_4}{\sqrt{h_4}} \cdots \frac{A_{n-2}}{\sqrt{h_{n-2}}}\right) \right\}.$$

Die Wassermenge $= Q$, welche in dieser Zeit ausgeflossen ist, erhält man zu:

$$Q = \frac{h_0 - h_n}{3n} \left\{ A_0 + A_n + 4(A_1 + A_3 + \ldots A_{n-1}) + 2(A_2 + A_4 \ldots A_{n-2}) \right\}.$$

Zusatz 2. In dem Falle endlich, wo die Gestalt und Größe des Wasserbehälters, aus welchem der Ausfluß erfolgt (auch der etwaige Zufluß), unbekannt, dagegen die Mündungsgröße gegeben ist, sucht man

ebenfalls mit Hülfe der Simpson'schen Regel der Formel $dQ = \mu a dt \sqrt{2gx}$ Genüge zu leisten, was folgendermaßen geschehen kann.

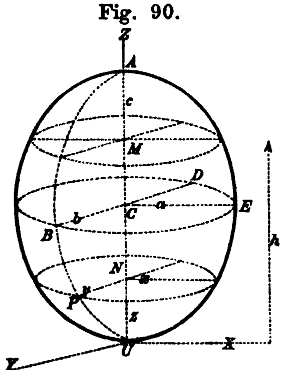
Man theilt die ganze Zeit, während welcher der Ausfluß beobachtet wird, in n gleiche Theile und trägt $\frac{\tau}{n}$ $(= dt)$ als Abscissen einer Curve, auf deren Ordinaten die während der Zeitintervalle $\frac{\tau}{n}$ beobachteten Druckhöhen h_0, h_1, h_2 ... h_n sind. Der Inhalt der betreffenden Fläche entspricht sodann der Summe von $dt\sqrt{x}$, so daß die während τ Zeit ausgeflossene Wassermenge Q überhaupt dargestellt wird durch

$$Q = \mu a \frac{\tau}{3n} \sqrt{2g} \Big\{ \sqrt{h_0} + \sqrt{h_n} + 4\,(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_3} \ldots \sqrt{h_{n-1}}) + 2\,(\sqrt{h_2} + \sqrt{h_4} \ldots \sqrt{h_{n-2}}) \Big\}.$$

§. 92.

Aufgabe 4. Ausfluß aus einem dreiachsigen Ellipsoid. Es sei $ABCDUEA$, Fig. 90, ein hohles dreiachsiges Ellipsoid, wobei die Größe der Halbachsen a, b, c ist. Am Ende U der vertical gestellten Achse $UA = 2c$ sei eine kleine Oeffnung vom Inhalte ω angebracht. Bei Herstellung der letzteren sei das Ellipsoid auf eine Höhe $UM = h$ mit Wasser gefüllt, man soll die Zeit finden, nach welcher der Spiegel so weit gesunken ist, daß diese Druckhöhe nur noch $UN = z$ beträgt. Alle sonstigen Voraussetzungen und Bezeichnungen mögen die vorigen bleiben.

Fig. 90.



Auflösung. Denkt man sich durch die Hauptachse $2c$ entsprechende Ebenen gelegt, so erhält man:

$$\text{Für die Ellipse } AEU: x^2 = \frac{a^2}{c^2}(2cz - z^2).$$

$$\text{Für die Ellipse } ABU: y^2 = \frac{b^2}{c^2}(2cz - z^2).$$

Hiernach ergiebt sich der Flächeninhalt A einer beliebigen Wasserschicht in der Höhe z von der Mündung aus gerechnet zu:

$$A = \pi xy = \frac{\pi ab}{c^2}(2cz - z^2).$$

Nach (5), §. 89, ist sonach

$$dt = -\frac{\pi ab}{\mu\omega c^2 \sqrt{2g}} \left(\frac{2cz - z^2}{\sqrt{z}}\right) dz.$$

Hieraus folgt aber durch Integration:

$$\text{I.} \quad t = \frac{\pi ab}{\mu\omega c^2 \sqrt{2g}} \Big\{ \tfrac{4}{3} c\,(h^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{3}{2}}) - \tfrac{2}{5}\,(h^{\frac{5}{2}} - z^{\frac{5}{2}}) \Big\}.$$

Zusatz. Für die Zeit, in welcher ein auf h Höhe gefülltes Kugelsegment leer läuft, folgt aus I, wenn der Radius der ganzen Kugel r, also $a = b = c = r$ gesetzt wird:

$$t = \tfrac{2}{15} \frac{\pi}{\mu\omega\sqrt{2g}} (10 r h^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{5}{2}}).$$

§. 93.

Aufgabe 5. Ausfluß bei gleichzeitigem Zufluß. Ein prismatisches Gefäß (Fig. 87) vom Querschnitte A erhält pro Sec. q Cubikeinheiten Wasserzufluß, jedoch weniger (oder mehr) als durch eine Bodenöffnung a desselben abfließt. Die anfängliche Druckhöhe sei h und es fragt sich, nach welcher Zeit der Wasserspiegel so weit herabgesunken (oder gestiegen) ist, daß die vorhandene Druckhöhe x beträgt.

Auflösung. Die Auflösung besteht hier einfach in der Integration der Gleichung (7) (§. 88). Man erhält zu diesem Ende

$$t = \frac{A}{\mu a\sqrt{2g}} \int \frac{-dx}{-\frac{q}{\mu a\sqrt{2g}} + \sqrt{x}},$$

oder wenn $\frac{A}{\mu a\sqrt{2g}} = B$ und $\frac{q}{\mu a\sqrt{2g}} = \sqrt{k}$ gesetzt wird:

$$t = B \int_h^x \frac{-dx}{-\sqrt{k} + \sqrt{x}}, \text{ d. i.}^{1)}$$

$$t = 2B \left\{ \sqrt{k} \,.\, \text{Lgnt} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{h}}{\sqrt{k} - \sqrt{x}} + \sqrt{h} - \sqrt{x} \right\}, \text{ oder}$$

$$t = \frac{2A}{\mu a\sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{h} - \sqrt{x} + \sqrt{k}\ \text{Lgnt} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{h}}{\sqrt{k} - \sqrt{x}} \right\}, \text{ oder endlich}$$

$$t = \frac{2A}{(\mu a\sqrt{2g})^2} \left\{ \mu a\sqrt{2g}\,(\sqrt{h} - \sqrt{x}) + q\ \text{Lgnt} \frac{\mu a\sqrt{2gh} - q}{\mu a\sqrt{2gx} - q} \right\}.$$

Beispiel. Ein Teich, auf prismatische Form reducirt, hat 3600 Quadratmeter Oberfläche, $3^m,2$ Tiefe und wird durch einen Bach gespeist, der pro Secunde 0,95 Cubikmeter Wasser zuführt. Eine Abflußöffnung am Boden des Teiches hat 0,66 Quadratmeter Querschnitt. Man soll die Zeit bestimmen, binnen welcher die anfängliche Druckhöhe so weit herabgesunken ist, daß sie nur noch $0^m,4$ beträgt. Der entsprechend vortheilhaft gestalteten Mündung wegen kann der Ausflußcoefficient $\mu = 0,7$ gesetzt werden.

Auflösung. Hiernach ist $\mu a\sqrt{2g} = 2,0462$;

$$q = 0,95 \text{ und Lgnt} \frac{\mu a\sqrt{2gh} - q}{\mu a\sqrt{2gx} - q} = 2,303\ \text{Lg Brg} \frac{2,7105}{0,3442} = 2,303 \,.\, 0,8962.$$

Daher

$$t = \frac{2 \,.\, 3600}{(2,0462)^2} \left\{ 2,0462\,(\sqrt{3,2} - \sqrt{0,4}) + 0,95 \,.\, 2,303 \,.\, 0,8962 \right\},$$

$$t = 7442 \text{ Sec.} = 2 \text{ Stund. } 6 \text{ Min. } 2 \text{ Sec.}$$

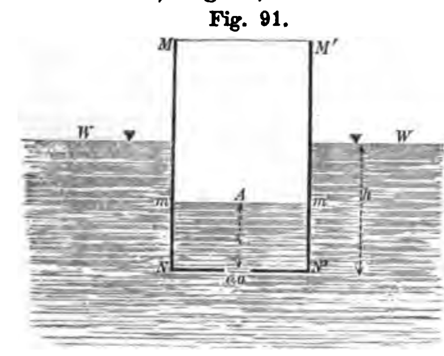
---

1) Zum Zwecke des Integrirens $-\sqrt{k} + \sqrt{x} = y$ gesetzt.

§. 94.

Aufgabe 6. Mit welcher Geschwindigkeit tritt unbegrenztes Wasser WW, Fig. 91, in ein leeres oben offenes cylindrisches Gefäß MN' vom Querschnitte $= A$ durch die Bodenöffnung a desselben, wenn constant die Mündung a um h vom Oberwasserspiegel absteht, und welches ist die größte Höhe, auf welche das Wasser im Gefäße steigt?

Fig. 91.



Auflösung. Hat sich am Ende der Zeit t das Wasser im Gefäße auf die Höhe $Nm = x$ erhoben, so beträgt die Masse $Nmm'N'$ der Flüssigkeit:

$M = \frac{\gamma A x}{g}$, weshalb die pro Zeit dt eingetretene Masse $\frac{\gamma A}{g}\,dx$ ist. Bezeichnet ferner u die Geschwindigkeit der Schicht mm', am Ende der Zeit t, so wird die entsprechende lebendige Kraft der ganzen Masse dargestellt durch $\frac{1}{2} M u^2$ und daher der Zuwachs an lebendiger Kraft in der Zeit dt betragen: $d\,(\frac{1}{2} M u^2) = d\left(\frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} A x u^2\right)$, d. i.

$$(1)\quad \frac{\gamma}{g} A x u du + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} A u^2 dx.$$

Die während derselben Zeit dt verrichtete mechanische Arbeit ist aber auszudrücken durch:

$$(2)\quad \gamma A\,(h - x)\,dx,$$

da man sich vorstellen kann, der hydrostatische Druck $\gamma A\,(h - x)$ treibe die Schicht mm', während gedachter Zeit durch dx Weg.

Ferner beachte man, daß der Wasserstrahl vom Querschnitte αa in der Mündung a sich nach dem Eintritte in das Gefäß plötzlich zum Querschnitte A erweitern muß, folglich ein Verlust an lebendiger Kraft eintritt, der gleich ist:

$$(3)\quad \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} A dx \left(\frac{A}{\alpha a} - 1\right)^2 u^2.$$

Nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte erhält man daher:

$$\frac{\gamma}{g} A x u du + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} A u^2 dx + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} A dx \left(\frac{A}{\alpha a} - 1\right)^2 u^2 = \gamma A\,(h - x)\,dx,$$

so wie hieraus, wenn $1 + \left(\frac{A}{\alpha a} - 1\right)^2 = k$ gesetzt wird:

$$k u^2 dx + 2 x u du + 2 g x dx = 2 g h dx.$$

Diese Differenzialgleichung wird integrirbar, wenn sie mit x^{k-1} multiplicirt wird. Man erhält nämlich

$$k x^{k-1} u^2 dx + 2 x^k u du + 2 g x^k dx = 2 g h x^{k-1} dx, \text{ d. i.}$$

$$d\,(u^2 x^k) + 2gx^k\,dx = 2ghx^{k-1}\,dx,$$

woraus durch Integration folgt:

$$u^2 x^k + \frac{2g}{k+1}\,x^{k+1} = \frac{2g}{k}\,hx^k.$$

Sonach ist

$$\text{I.}\quad u^2 = \frac{2g}{k}\,h - \frac{2g}{k+1}\,x.$$

Um die größte Höhe H zu bestimmen, auf welche das Wasser im Gefäße steigt, hat man in I. $u =$ Null und $x = H$ zu setzen, wonach erhalten wird:

$$H = h + \frac{h}{k},\ \text{oder}$$

$$H = h + \frac{h}{1 + \left(\frac{A}{\alpha a} - 1\right)^2}.$$

Ist ferner $A = a$, so folgt:

$$H = h\left(\frac{3\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}\right).$$

Endlich ergiebt sich, wenn $\alpha = 1$ ist:

$$H = 2h.$$

Diese höchst interessanten Resultate hat zuerst Borda[1]) entwickelt und durch Versuche bestätigt.

Bei einem Versuche Bossut's[2]) hatte das Gefäß (Röhre) MN einen Fuß Höhe und 20 Linien Durchmesser. Wurde $A = a$ gemacht und die Röhre 7 Zoll 7 Linien tief eingetaucht, so stieg das Wasser bis zum oberen Rande der Röhre. Umgab man jedoch das untere Ende der Röhre mit einem Blechringe, so stieg das Wasser schon bis zum oberen Röhrenrande bei nur 6 Zoll $11\frac{1}{2}$ Linien Eintauchung.

Drittes Capitel.

Ausfluß des Wassers durch Mündungen in den Seitenwänden der Gefäße bei constanter Druckhöhe.

§. 95.

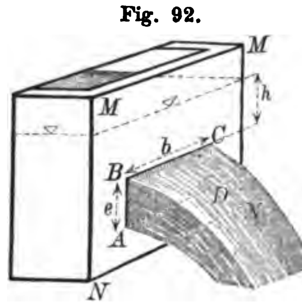
Um hierbei zunächst die Menge des ausfließenden Wassers zu berechnen, werde vor Allem beachtet, daß die Druckhöhen für die verschiedenen Höhenpunkte einer Seitenmündung nicht gleich sind und folglich auch die entsprechenden Geschwindigkeiten verschieden sein müssen, mit denen das Wasser aus den betreffenden Mündungsstellen heraustritt.

---

[1]) Mémoire de l'académie des sciences, 1766, pag. 579.

[2]) Traité d'hydrodynamique, T. II, §. 569.

Fig. 92.



Mit Beachtung dieses wichtigen Umstandes und unter Beibehaltung der sonstigen Voraussetzungen und Bezeichnungen in den vorhergehenden Capiteln, ergiebt sich, mittelst der Rechnungen im folgenden Paragraphen, die pro Secunde aus einer rectangulären Seitenmündung $ABCD$, Fig. 92, strömende Wassermenge $= Q$ zu:

$$\text{I.} \quad Q = \tfrac{2}{3}\mu b \sqrt{2g} \left\{ H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

Dabei bezeichnet b die Länge jeder der horizontalen Mündungskanten $\overline{AD} = \overline{BC}$, H den Abstand der unteren Kante und h den Abstand der oberen Kante von dem horizontalen Wasserspiegel.

Dividirt man diesen Werth durch den kleinsten Querschnitt $\alpha b\,(H - h)$ des zusammengezogenen Wasserstrahles, so erhält man einen Quotienten, welcher die mittlere Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers genannt wird und die wir mit V bezeichnen wollen. Daher

$$V = \frac{Q}{\alpha b\,(H - h)}, \text{ oder}$$

$$(1) \quad V = \tfrac{2}{3}\,\psi \sqrt{2g}\, \frac{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}}{H - h}.$$

Hieraus ergiebt sich ferner ($\psi = 1$ d. i. $\alpha = \mu$ gesetzt) die V entsprechende, oder die mittlere Druckhöhe $= z$ zu:

$$(2) \quad z = \frac{1}{2g} \left\{ \frac{Q}{\alpha b\,(H - h)} \right\}^2, \text{ oder}$$

$$z = \tfrac{4}{9} \left\{ \frac{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}}{H - h} \right\}^2, \text{ oder}$$

wenn die Höhe der Mündung mit e bezeichnet, also $H - h = e$ gesetzt wird,

$$z = \frac{4}{9e^2} \left\{ H^{\frac{3}{2}} - (H - e)^{\frac{3}{2}} \right\}^2.$$

Setzt man hier e so klein gegen H voraus, daß, mit Beibehaltung dreier Glieder der Reihenentwickelung von $(H - e)^{\frac{3}{2}}$, ein für die Praxis hinreichender Annäherungsausdruck erhalten wird, so folgt:

$$z = \frac{4}{9e^2} \left\{ \tfrac{3}{2}\, e H^{\frac{1}{2}} - \frac{3e^2}{8H} \right\}^2 = \frac{4}{9e^2} \left\{ \tfrac{9}{4}\, e^2 H - \frac{9e^3}{8} + \tfrac{9}{64} \frac{e^4}{H} \right\}.$$

Wird hier endlich noch der (meistentheils sehr kleine) Werth $\frac{e^4}{H}$ vernachlässigt, so erhält man:

$$z = H - \tfrac{1}{2}\, e = \frac{H + h}{2}, \text{ d. h.}$$

bei niedrigen Seitenmündungen ist als mittlere Druckhöhe der Abstand des Schwerpunktes der Mündungsfläche vom Oberwasserspiegel in Rechnung zu bringen.

Führt man letzteren Werth von z in (2) ein, so ergiebt sich unter bemerkter Voraussetzung:

$$\frac{H+h}{2} = \frac{1}{2g}\left\{\frac{Q}{ab\,(H+h)}\right\}^2, \text{ oder}$$

$$\text{II.} \quad Q = ab\,(H-h)\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}.$$

Um für practische Anwendungen etwas mehr Aufschluß über die Grenzen zu erhalten, innerhalb welcher letzterer Ausdruck noch anwendbar ist, sei η die Druckhöhe für den Schwerpunkt der Mündung und die Höhe der letzteren

$$H - h = \frac{\eta}{2}.$$

Sodann ist zunächst, weil gleichzeitig $\eta = \frac{H+h}{2}$ sein muß, $H = \frac{5}{4}\eta$, $h = \frac{3}{4}\eta$, folglich, nach (1):

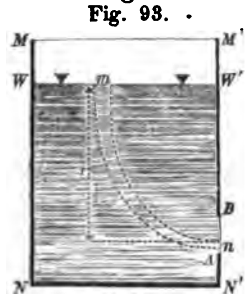
$$V = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\frac{(\frac{5}{4}\eta)^{\frac{3}{2}} - (\frac{3}{4}\eta)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\eta} = 0{,}999\,..\sqrt{2g\eta} = 0{,}999\,..\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}.$$

Der Werth II. ist sonach für practische Zwecke so lange als hinreichend genau zu betrachten, als die Schwerpunktsdruckhöhe nicht kleiner wird, wie die doppelte Mündungshöhe, d. h. so lange $\eta \geqq 2\,(H-h)$ ist.

§. 96.

Der im vorigen Paragraphen behandelte Gegenstand gehört zur allgemeinen Aufgabe, die Wassermenge zu bestimmen, welche durch beliebig gestaltete Seitenöffnungen der Gefäße unter Voraussetzung constanter Druckhöhe strömt.

Fig. 93.



Für den Zweck der Ableitung eines entsprechenden mathematischen Ausdruckes für diese Wassermenge stelle Fig. 93 das Profil eines beliebigen Gefäßes mit ebener Seitenmündung dar, aus welcher Wasser fließt, das man sich dabei in gekrümmte Röhrchen mn zertheilt vorstellt. Nach §. 80 ist sodann die Geschwindigkeit in der Mündungsstelle n unabhängig von der Form dieser Röhrchen und entsprechend dem Verticalabstande nW des Punktes n vom Oberwasserspiegel, so daß man für die bemerkte Geschwindigkeit erhält, wenn $nW' = x$ gesetzt wird: $\sqrt{2gx}$.

Wird ferner die Breite des als unendlich kleinen Rechtecks zu denkenden Querschnitts bei n mit dy bezeichnet, so ergiebt sich ohne Weiteres das Differenzial des pro Secunde ausfließenden Wasserquantums dQ zu:

$$dQ = \mu dx dy \sqrt{2gx},$$

ein Ausdruck, dessen bestimmtes Integral die Auflösung der gestellten Aufgabe liefert.

1. Rectanguläre Mündung
mit respective horizontalen und verticalen Seiten.

Behält man die Bezeichnung des vorigen Paragraphen bei und beachtet überdies die Geschwindigkeit $= c$, mit welcher das Wasser unmittelbar vor der Mündung ankommt[1]), so erhält man für die rectanguläre Mündung:

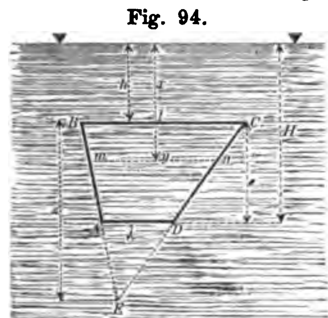
$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_0^b dy \int_{h+\frac{c^2}{2g}}^{H+\frac{c^2}{2g}} dx \sqrt{x}, \text{ d. i.}$$

$$\text{I.} \quad Q = \tfrac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left\{ \left(H + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(h + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

Ist c klein genug, was z. B. der Fall ist wenn der Mündungsquerschnitt gering ist, im Verhältniß zur Wandfläche, in welcher sich die Seitenöffnung befindet, so ergiebt sich I. des vorigen Paragraphen.

2. Trapez- und Dreieckmündung.

Fig. 94.



Die Seitenlinie $\overline{BC} = l$ und $\overline{AD} = \lambda$ der Mündung, Fig. 94, mögen parallel zum Oberwasserspiegel liegen, die veränderliche Breite $mn \parallel BC$ werde mit y, die zugehörige Druckhöhe mit x bezeichnet, die Höhe des Dreiecks BCE, welches durch Verlängerung der Seiten BA und CD entsteht, sei $= z$, alle anderen Bezeichnungen sollen die bisherigen bleiben.

Zunächst ist sodann:

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_h^{h+e} dx \sqrt{x} \int_0^y dy.$$

Um ferner y als Function von x auszudrücken, bemerke man, daß $z = l \dfrac{x-h}{l-y}$ und auch $z = \dfrac{el}{l-\lambda}$, folglich

$$y = \frac{l(e+h) - \lambda h}{e} - \frac{l-\lambda}{e} \,.\, x \text{ ist,}$$

wofür gesetzt werden mag: $y = m - nx$.

---

[1]) Bezeichnet A den Querschnitt des Behälters parallel zur Mündung, so kann man $c = \dfrac{Q}{A}$ setzen.

Sodann ergiebt sich aber:

$$\text{II.}\quad Q = \mu \sqrt{2g} \left\{ \tfrac{2}{3}\, m \left[(h+e)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right] - \tfrac{2}{5}\, n \left[(h+e)^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}\right] \right\},$$

wo $m = \dfrac{(e+h)\, l - h\lambda}{e}$ und $n = \dfrac{l-\lambda}{e}$ ist.

Für eine Mündung, welche ein mit der Spitze nach unten gekehrtes Dreieck bildet, wird $\lambda = \text{Null}$, $m = \dfrac{Hl}{H-h}$, $n = \dfrac{l}{e}$ und daher

$$Q = \mu \sqrt{2g} \left\{ \tfrac{2}{3} \frac{Hl}{H-h} \left[H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right] - \tfrac{2}{5} \frac{l}{H-h} \left[H^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}\right] \right\}, \text{ oder}$$

$$\text{III.}\quad Q = \frac{2\mu l \sqrt{2g}}{15} \left\{ \frac{2H^{\frac{5}{2}} - 5H^{\frac{3}{2}} + 3h^{\frac{5}{2}}}{H-h} \right\}.$$

Sind die Mündungshöhen $e = H - h$ sehr klein in Bezug auf die Druckhöhe h, so läßt sich auch hier, wie §. 95, der Schwerpunktsabstand der Fläche vom Oberwasserspiegel als mittlere Druckhöhe einführen.

3. Ellipsen- und Kreismündung.

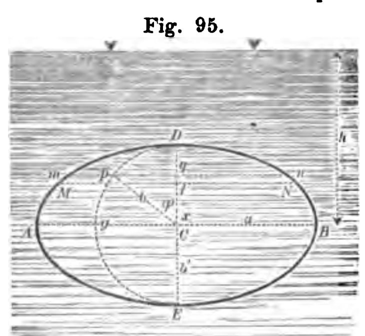


Fig. 95.

Wir bezeichnen die Halbachsen der Ellipse $ABDE$ mit a und b, die Druckhöhe über dem Mittelpunkte C mit h. Ferner sei mN ein zu AB parallel liegendes Flächenelement der Ellipse von der unendlich kleinen Breite qt. Für den Flächeninhalt dieses Elementes erhält man, wenn $\angle pCq = \varphi$ gesetzt wird, wegen

$\overline{mn} = 2a \sin\varphi$, und $\overline{tq} = b \sin\varphi\, d\varphi$ [1])

$$\text{Fläche } mN = 2ab \sin^2\varphi d\varphi.$$

Da die Druckhöhe für dies Flächenelement $h - b\cos\varphi$ ist, so folgt endlich:

$$dQ = 2\mu ab \sin^2\varphi d\varphi \sqrt{2g\,(h - b\cos\varphi)}$$

oder wenn $\dfrac{b}{h} = m$ gesetzt und eine Reihenentwickelung vorgenommen wird:

$$dQ = 2\mu ab \sqrt{2gh} \left\{ \sin^2\varphi d\varphi \left(1 - \frac{m}{2}\cos\varphi - \frac{m^2}{8}\cos^2\varphi - 16\cos^3\varphi - \tfrac{5}{128}\, m^4 \cos^4\varphi \ldots\ldots \right) \right\}.$$

Bildet die ganze Ellipsenfläche die fragliche Mündung, so ist das

---

[1]) Es ist bekanntlich: $\overline{mq}^2 = \dfrac{a^2}{b^2}\,(b^2 - x^2)$; $\overline{pq}^2 = b^2 - x^2$; ferner $\overline{pq} = b \sin\varphi$, folglich: $\overline{mq} = a\sin\varphi$, $\overline{2mq} = \overline{mn} = 2a\sin\varphi$. Endlich wegen $\overline{Cq} = b\,(1 - \cos\varphi)$ auch $\overline{tq} = b \sin\varphi\, d\varphi$.

Integral des letzteren Ausdruckes zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ zu nehmen und man erhält[1]):

$$\text{IV.}\quad Q = \mu ab\pi \sqrt{2gh} \left\{1 - \tfrac{1}{32}\frac{b^2}{h^2} - \tfrac{5}{1024}\frac{b^4}{h^4} \ldots \right\}.$$

Für eine kreisförmige Mündung, deren Radius $= r$ ist, ergiebt sich:

$$\text{V.}\quad Q = \mu r^2\pi \sqrt{2gh} \left\{1 - \tfrac{1}{32}\frac{r^2}{h^2} - \tfrac{5}{1024}\frac{r^4}{h^4} \ldots \right\}.$$

Für $h = r$ folgt noch

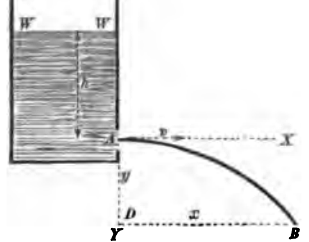
$$\text{VI.}\quad Q = 0{,}964\,\mu r^2\pi \cdot \sqrt{2gh}.$$

Anmerkung. Mit Hülfe der letzten Formel würde sich unter besonderen Umständen das Quantum Wasser bestimmen lassen, welches dem von Mariotte eingeführten „Wasserzoll“ (pouce d'eau), S. 188, Note 1, entspricht.

§. 97.

Was die Frage nach der Form des mittleren Wasserfadens AB, Fig. 96, eines Strahles anlangt, welcher aus einer Seitenöffnung unmittelbar in die freie Luft tritt, wenn man den Widerstand der letzteren als gering genug vernachlässigt, so läßt sich die betreffende Antwort wie folgt geben:

Fig. 96.



Mit Bezug auf die Figur erhält man ohne Weiteres die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0;\quad \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Hieraus aber durch Integration, wenn man zugleich beachtet, daß die betreffenden Constanten Null sind:

$$\frac{dx}{dt} = v \text{ und } \frac{dy}{dt} = gt$$

Hieraus ferner, durch nochmalige Integration:

$$x = vt \text{ und } y = \frac{gt^2}{2}$$

---

[1]) Man beachte, daß $\int_0^\pi dx \sin^2 x = \frac{\pi}{2}$; $\int_0^\pi dx \sin^2 x \cos^n x = \frac{1}{2+n}\int_0^\pi dx \cos^n x$,

endlich: $\int_0^\pi dx \cos^n x = (\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\ldots)\frac{\pi}{2}$, wenn n eine gerade,

$\int_0^\pi dx \cos^n x =$ Null, wenn n eine ungerade Zahl ist.

und durch Elimination der Zeit t:

$$\text{I.} \quad y = \frac{g}{2v^2} x^2.$$

Die Curve (des mittleren Wasserfadens) AB ist demnach eine gemeine Parabel mit dem Parameter: $\frac{g}{2v^2}$.

Eliminirt man in letzterer Gleichung v mittelst $v = \sqrt{2gh}$ (II, S. 208), so ergiebt sich:

$$\text{I.} \quad y = \frac{x^2}{4h}, \text{ so wie}$$

$$\text{II.} \quad x = 2\sqrt{h \cdot y} \text{ und endlich:}$$

$$\text{III.} \quad v = x\sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Ist der mittlere Wasserfaden bei seinem Austritte aus der Mündung A unter einem Winkel α, abwärts gegen den Horizont geneigt, so erhält man statt I, die Gleichung V:

$$\text{V.} \quad y = xtg\alpha + \frac{g}{2v^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2.$$

Die für die Praxis hinreichende Uebereinstimmung dieser Gleichungen mit der Erfahrung haben in jüngster Zeit Boileau[1]) und Weisbach[2]) nachgewiesen. Andere betreffende Versuche (mit Hinzufügung der Geschwindigkeitscoefficienten) sind in folgender Tabelle zusammengestellt, wobei y und x die beobachteten (respective verticalen und horizontalen) Coordinaten, x_1 die berechnete Abscisse und v_1 die nach Formel III. berechnete Geschwindigkeit bezeichnet[3]).

---

[1]) Journal de l'école polytechnique. T. XIX, Cahier 33 (1850), p. 206.

[2]) Die Experimental-Hydraulik. Freiberg 1855, S. 52 ff.

[3]) Man sehe hierüber auch Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. I, S. 442.

Die Mündungen sind sämmtlich kreisförmig. Die ersten beiden Versuche beziehen sich auf franz. Zolle und Fuße ($g = 30{,}1958$ Fuß), die übrigen auf Metermaaße.

Beobachter	Durchmesser der Kreismündung	Druckhöhe $= h$	Beobachtet y	Beobachtet x	Aus der Beobachtung berechnet $x_1 = 2\sqrt{hy}$	Aus der Beobachtung berechnet $v = x\sqrt{\frac{g}{2y}}$	Theoretische Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gh}$	$\psi = \frac{v}{v_1}$	Mündung
Bossut [1]) .	½ Zoll	9,0 Fuß	$4',2986$	$12',270$	$12',439$	$22',997$	$23',313$	0,986	dünne Wand
Venturi [2]) .	1½ Zoll	2,708	$4',500$	$6',791$	$6',973$	$12',444$	$12',798$	0,973	desgl.
Michelotti [3])	$0^m,02710$	$7^m,190$	$1^m,410$	$6^m,250$	$6^m,368$	$11^m,670$	$11^m,880$	0,983	desgl.
Castel [4]) .	$0^m,01550$	$2^m,004$	$0^m,8926$	$2^m,2100$	$2^m,6740$	$5^m,181$	$6^m,269$	0,826	Cylind. Ansatz außerhalb von $0^m,040$ Länge
Desgl. . . .	$0^m,01550$	$2^m,006$	$0^m,8926$	$2^m,5590$	$2^m,672$	$6^m,272$	$6^m,003$	0,975	Conischer Ansatz von 13°4 Convergenzwinkel

§. 98.

Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Seitenöffnungen.

I. Es ist Druckwasser über der oberen Mündungskante vorhanden. (Durchlaßöffnungen.)

Wie bereits S. 203 erwähnt wurde, hat man bis heute weder großartigere noch umfangreichere Versuche über den Ausfluß des Wassers aus Seitenmündungen angestellt, als die an gedachter Stelle erörterten Metzer Versuche von Poncelet und Lesbros.

Deshalb vervollständigen wir im Nachstehenden die bereits S. 203 gemachten Angaben, welche sich auf die späteren, von Lesbros allein angestellten Versuche beziehen.

Der an gedachter Stelle erwähnte dritte Behälter, in dessen Wand sich die Ausflußöffnung befand, ist, mit den von Lesbros angebrachten Veränderungen, Fig. 97 bis mit Fig. 97b abgebildet und zwar zeigt die erstere Figur den Verticaldurchschnitt nach der Richtung von *EFFGGH* der Grundrißfigur 97a genommen, während

[1]) Traité d'hydrodynamique, §. 609.
[2]) Gilbert's Annalen, Bd. III, S. 40.
[3]) D'Aubuisson Hydraulique, §. 37. Michelotti (deutsche Uebersetzung), S. 158.
[4]) Annales des Mines 1838, T. XIV, p. 187.

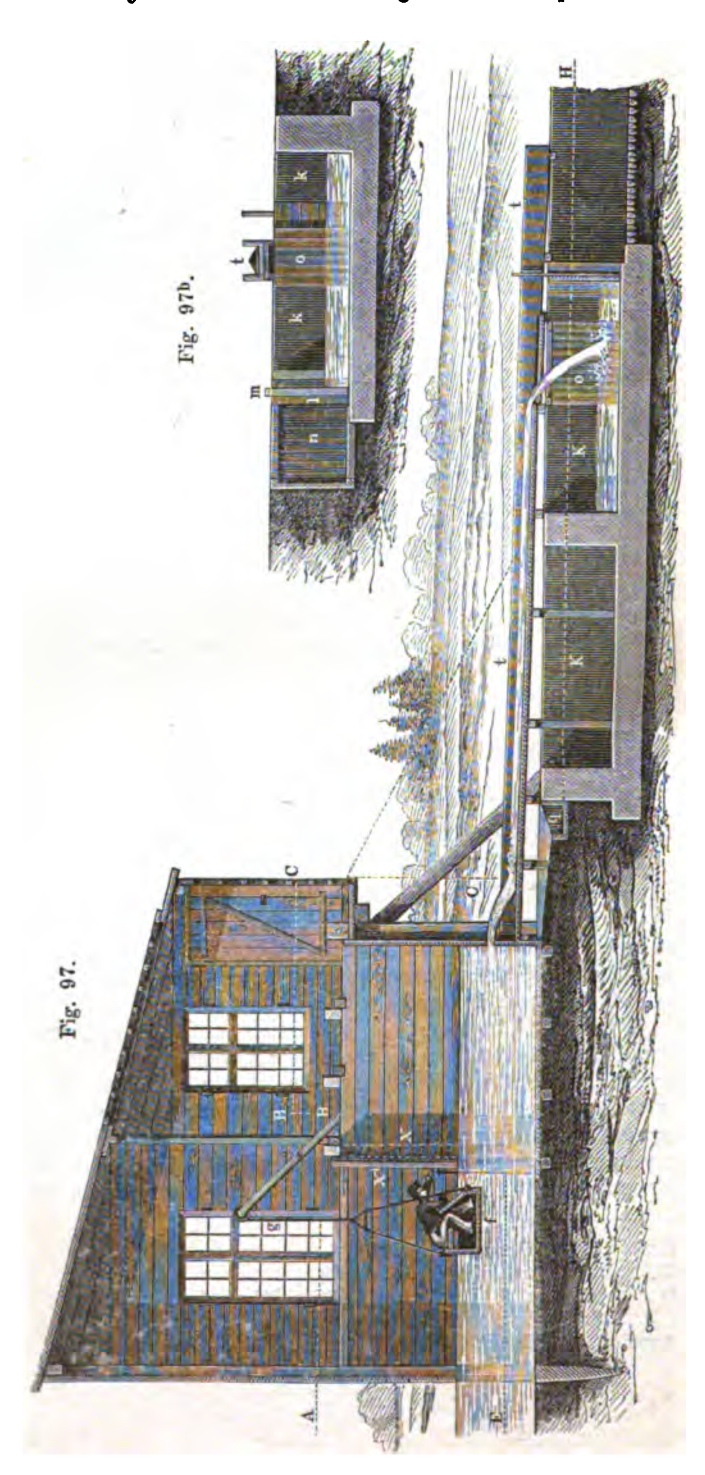


Fig. 97.

Fig. 97b.

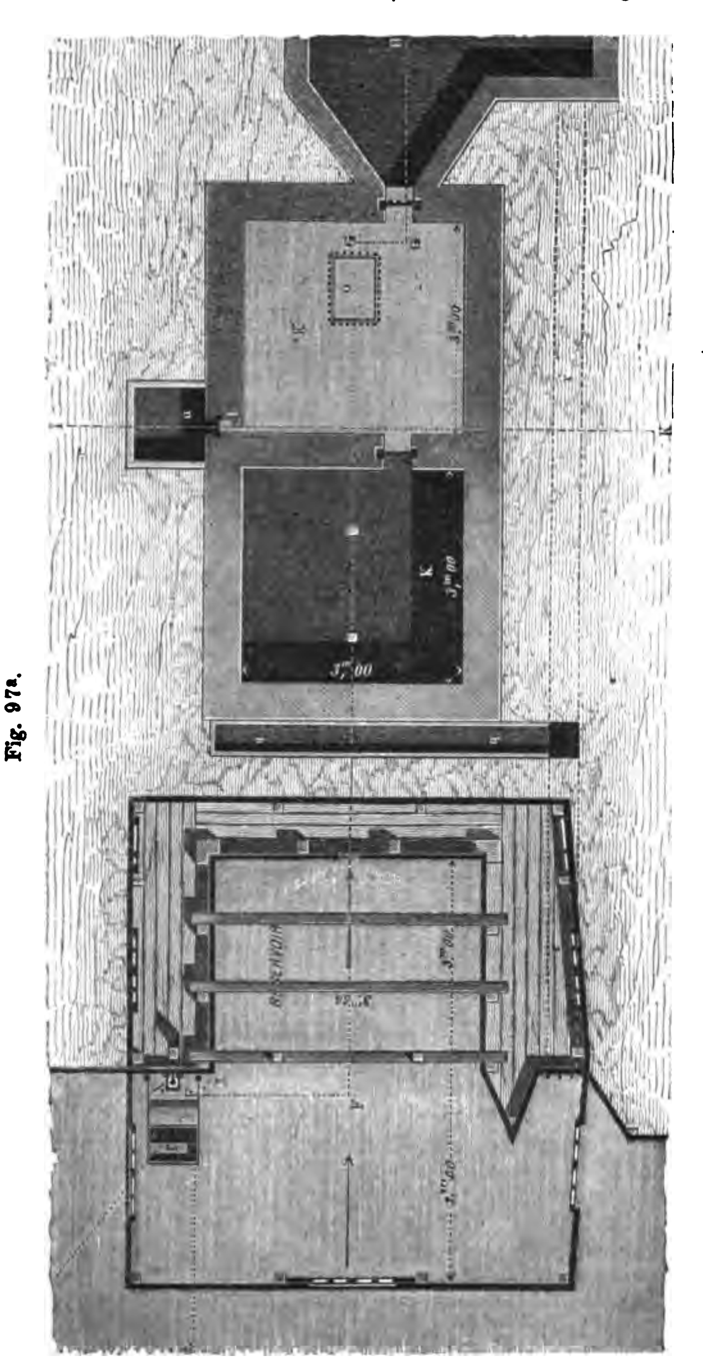


Fig. 97a.

letztere Figur der Schnittrichtung *ABBCCD* der Fig. 97 und die Querprofilansicht, Fig. 97ᵇ, der Schnittrichtung *JK* des Grundrisses entspricht.

Lesbros schloß das früher ganz freie Ausfluß-Reservoir (Fig. 97ᵃ) so ein, wie es die Grundrißfigur erkennen läßt, versah es auch (gegen Sonne und Wetter) mit einem Dache, ließ den Beobachter des Wasserstandes seitwärts vom Stromstriche in einem Schwimmkasten *fg* Platz finden, stellte den zur Ermittelung des ruhigen Wasserspiegels (weit von der Mündung) erforderlichen Maaßstab (Pegel) [1]) in X' (statt früher mit Poncelet bei X) auf etc.

Vor der Ausflußmündung brachte man (statt der vorher hölzernen) in hydraulischen Mörtel gemauerte Aichräume k von je $3.3.1 = 9$ Cubikmeter $= 9000$ Liter an, führte diesen das ausgeflossene Wasser durch ein Gerinne t (in der Grundrißfigur weggelassen) zu und stellte unter der Bodenöffnung in diesem Gerinne ein durchbrochenes Gefäß o auf, um das ankommende Wasser zu zertheilen, seine lebendige Kraft größtentheils zu vernichten und nachtheilige Schwankungen zu vermindern.

Das Wasser beider Aichräume k konnte durch Schützen mit einander in Verbindung gesetzt, abgesperrt oder in die Untermosel (nach der Richtung *GH* der Grundrißfigur) abgelassen werden.

Die Seitenwand des zweiten Gefäßes k wurde bei l (Fig. 97ᵃ) durchbrochen und daselbst ein parallelepipedischer Raum (Kasten) von $0^m,2$ Seite gebildet, der mittelst eines kleinen Schützens von k abgesperrt werden konnte. An dem Boden des Kastens l befestigte man in geeigneter Weise einen Stab (Pegel) m, Fig. 97ᵇ, mit Scala, Nonius etc. versehen, um damit die Wasserstände der Aichgefäße k bestimmen zu können. Hinter l wurde ein vertiefter Raum n angebracht, groß genug, um einer Person Platz zu verschaffen, die mittelst eines Spiegels den Augenblick zu beobachten hatte, wo eine Spitze des gedachten Pegels die steigende Wasserfläche berührte.

Zur Abführung etwaigen Filterwassers diente ein Canal q, während ein längerer Canal rr zum Zwecke hatte, das Wasser im Hauptreservoir zu reguliren, oder dasselbe völlig in die Untermosel ablassen zu können.

Um nicht eine mathematisch genaue Form der Aichgefäße voraussetzen zu müssen, wurden diese Räume besonders und zwar dadurch gemessen, daß man Gefäße von genau bekanntem Inhalte (die wieder durch kleinere Gefäße von noch genauer bestimmtem cubischen Raum gefüllt worden waren) in dieselben ausleerte und die jeder Entleerung entsprechende Wasserhöhe mit aller denkbaren Sorgfalt maß.

---

[1]) Auf die treffliche Anordnung und Herstellung dieser Maaßstäbe, sowie auf das Messen selbst, wurde die äußerste Sorgfalt verwendet und überhaupt alle betreffenden Arbeiten mit einer Genauigkeit und Vorsicht ausgeführt, deren Nachahmung für ähnliche Fälle nicht genug empfohlen werden kann. Wegen des Speciellen hierüber muß auf die S. 208 angeführten Quellen verwiesen werden.

§. 99.

Strahlenmessungen.

Von den Resultaten der vorher erörterten eben so interessanten als practisch wichtigen Versuche mögen zuerst einige Ergebnisse directer Strahlenmessungen mitgetheilt werden.

Fig. 98.

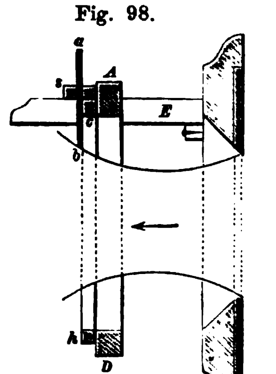


Fig. 98a.

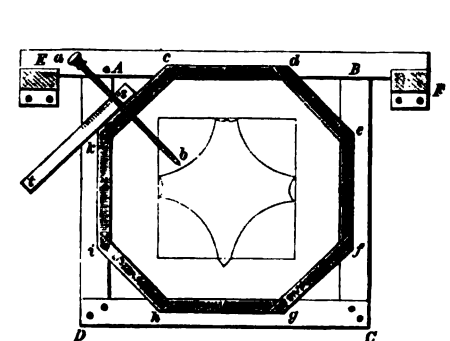


Fig. 98 zeigt die hierzu angewandte Vorrichtung in der Vorder- und Fig. 98a in der Seitenansicht, wenn man sich erstere Figur in der Mitte vertical durchschnitten denkt.

Dabei ist *ABCD* ein in Trägern *EF* verschiebbar vor der Ausflußöffnung aufgehangener hölzerner Rahmen, auf welchem außerhalb ein reguläres aus Schienen mit Scaleneintheilung gebildetes Achteck *cdefghik* in der Art befestigt ist, daß es den ausfließenden Strahl überall umgiebt. Auf jeder dieser Polygonseiten läßt sich ein mit Nonius versehenes Lineal *ts* aufbringen und verschieben, welches zugleich die Mutter einer langen Schraube *ab* enthält, deren feine Spitze *b* man nach und nach mit allen Punkten des ausfließenden Strahles in Berührung zu bringen sucht.

Bei einer quadratischen Oeffnung *MNOPRSTQ*, Fig. 99, von $0^m,2$ Seite in dünner Wand, mündend in die freie Luft, bei vollständiger Contraction und einer Druckhöhe von $1^m,68$ über der Mitte, erhielten Poncelet und Lesbros auf dem beschriebenen Wege:

Fig. 99.

das Profil *mntpros* bei 15 Centimeter Abstand von der Mündung und von 237,46 Quadrat-Centimeter Inhalt,

das Profil $m_1 n_1 t_1 p_1 o_1 s_1 q_1$ bei 30 Centimeter Abstand von der Mündung und von 225,06 Quadrat-Centimeter Inhalt.

Letzteres Profil war zugleich das kleinste, was an diesem Strahle beobachtet wurde und wonach sich der Contractionscoefficient α ergab:

$$\alpha = \frac{225,06}{400,0} = 0,563.$$

Da ferner der Ausflußcoefficient μ für dieselbe Mündung zu 0,602 gefunden wurde, so müßte hier nach §. 82 ein Geschwindigkeitscoefficient ψ stattfinden:

$$\psi = \frac{\mu}{\alpha} = \frac{0,602}{0,563} = 1,069.$$

Letzteres Resultat würde aber im Widerspruch mit dem stehen, was §. 77 (S. 208), Zusatz 1, in Betreff ψ gesagt ist, wenn man in diesem speciellen Falle nicht andere unbekannte Ursachen für möglich halten wollte [1]) und sonstige Versuche nicht den gedachten Satz des §. 77 bestätigten [2]).

Völlig mit der letztgedachten Ansicht übereinstimmend sind die Resultate einer anderen von Lesbros angestellten Messung [3]) an einem Strahle, der aus einer rectangulären Mündung in dünner Wand. von $0^m,6$ Höhe, $0^m,02$ Breite bei einer Druckhöhe von $1^m,55$ ausfloß.

Fig. 100 zeigt den Aufriß, Fig. 100^a den Grundriß und die übrigen Figuren bis 100^e (im vergrößerten Maaßstabe) entsprechende Querprofile dieses Strahles.

Fig. 100.

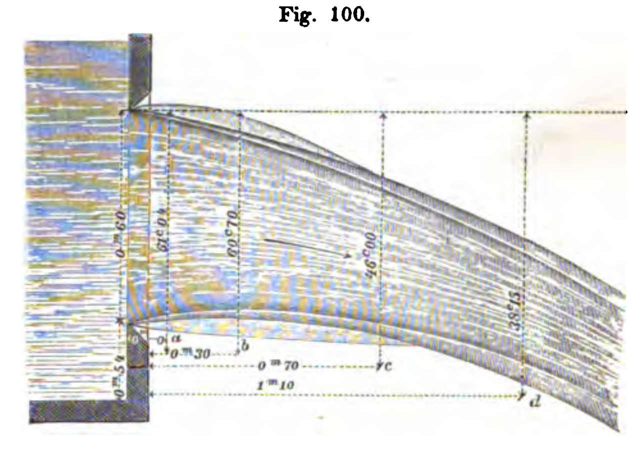
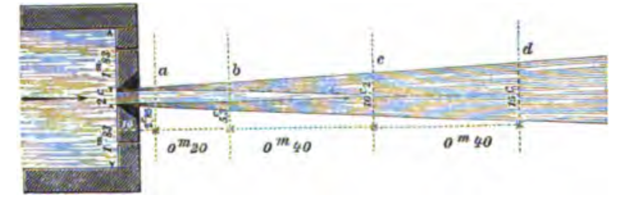


Fig. 100^a.

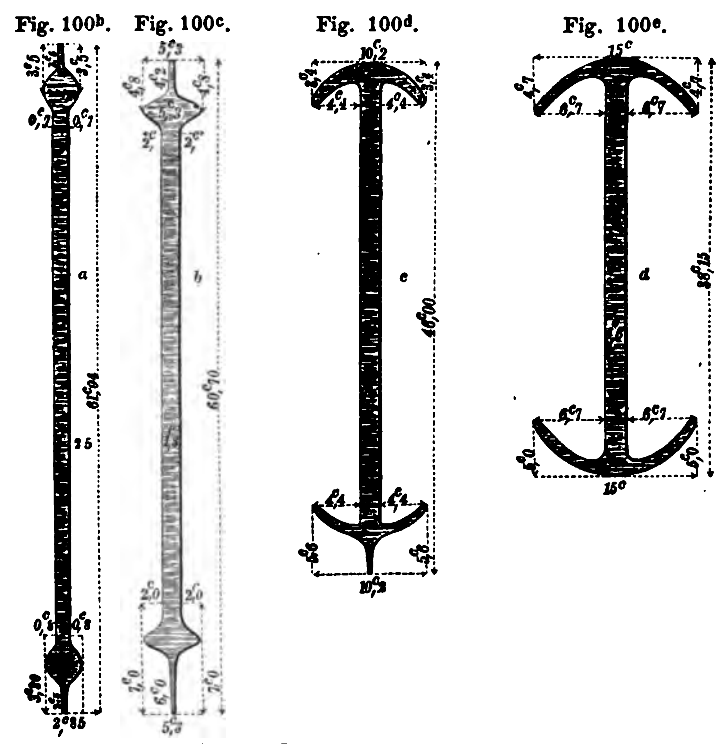


[1]) Lesbros sucht (a. a. O. p. 44) dies Resultat dadurch zu erklären, daß er einen besonderen Centralstrahl voraussetzt, dessen lebendige Kraft zu der hinzu träte, welche der Druckhöhe der Flüssigkeit über dem Mittelpunkt entspricht.

[2]) Weisbach in Hülse's Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluß", S. 503, und die „Experimental-Hydraulik" dieses Autors §. 14 — §. 17.

[3]) a. a. O. p. 46.

Fig. 100b. Fig. 100c. Fig. 100d. Fig. 100e.



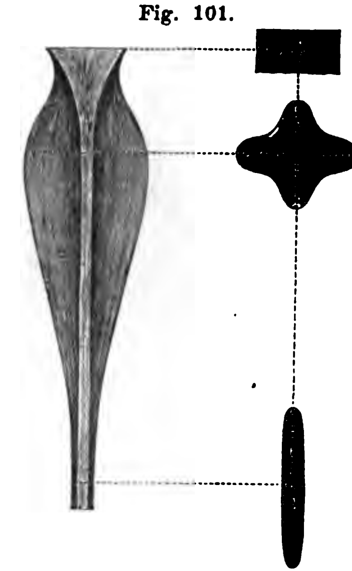
Die pro Secunde ausfließende Wassermenge Q wurde hierbei mittelst der Formel $Q = \mu b e \sqrt{2gH}$ berechnet und $\mu = 0{,}625$ durch anderweitige Versuche bestimmt. Daher ergab sich

$$Q = 0{,}625 \, . \, 0{,}02 \, . \, 0{,}60 \sqrt{1g \, . \, 1{,}55} = 0{,}041458 \text{ Cubikmeter.}$$

Alle sonstigen Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Abstand der Strahlquerschnitte von der Mündungsebene	Querschnittsflächen		Contractionscoefficient $= \alpha$	Druckhöhe über dem Schwerpunkt des Normalschnittes	Theoretische Geschwindigkeiten, den Druckhöhen der vorigen Columne entsprechend	Mittlere Geschwindigkeiten, wenn die Wassermenge Q durch die Werthe von Columne (3) dividirt wird	Geschwindigkeitscoefficient φ
	Vertical	Normal zum Centralfaden des Strahles					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Centimeter	Quadrat-Centim.	Quadrat-Centim.		Meter	Meter	Meter	
—	120,00	120,00	1,000	1,5500	5,5143	3,4465	0,625
10,0	79,51	78,30	0,653	1,5409	5,4980	5,2820	0,961
30,0	77,70	76,52	6,638	1,5757	5,5600	5,4049	0,972
70,0	84,95	83,66	0,697	1,6460	5,6825	4,9436	0,870
110,0	92,55	86,41	0,720	1,7644	5,8833	4,7863	0,814

Fig. 101.



Hiernach hatte der Strahl bei 30 Centimeter Entfernung von der Mündung den kleinsten Querschnitt und für diesen den Geschwindigkeitscoefficienten $\psi = 0{,}972$.

Zusatz. Für die Praxis wichtige Strahlenmessungen hat in jüngster Zeit allein Weisbach angestellt[1]).

Im Allgemeinen bediente sich derselbe eines kreisförmigen Rahmens (Ringes), welcher den Strahl umgebend außerhalb der Mündungen aufgehangen wurde. Durch diesen Ring traten Schrauben, deren äußerste Spitzen in möglichste Berührung mit dem Strahle gebracht wurden.

Für kreisförmige Mündungen von 0,866 bis 3,584 Centimeter Durchmesser (in dünner Wand und bei vollkommener Contraction), bei Druckhöhen von 0,57 bis 0,58 Meter über der Mitte der Ausflußöffnung, erhielt Weisbach als Geschwindigkeitscoefficienten den Mittelwerth: $\psi = 0{,}961$.

Vorstehende Fig. 101 zeigt überdies Grundriß und Querprofile eines von Weisbach beobachteten Wasserstrahles, welcher durch eine rectanguläre Mündung von 2,502 Centimeter Höhe und 5,052 Centimeter Breite floß, wenn dabei die mittlere Druckhöhe 0,559 Meter betrug.

§. 100.

Ausflußcoefficienten, nach Poncelet und Lesbros für rectanguläre Seitenöffnungen in (blech-) dünner Wand[2]), bei vollkommener Contraction und mündend in die freie Luft.

Nachstehende Tabelle ist das Hauptresultat der Versuche von 1828, erweitert durch Interpolation von $1^m{,}70$ bis $3^m{,}0$ Druckhöhe[3]). Die Mündungsbreiten $= b$, betrugen überall $0^m{,}20$.

[1]) „Untersuchungen aus dem Gebiete der Mechanik und Hydraulik". Abtheil. 1, S. 90—92 und besonders Abth. 2, S. 73.

[2]) Sogenannte Poncelet-Mündungen, d. h. in Blechtafeln ausgeschnittene Seitenwandöffnungen mit Contraction an allen vier Seiten.

[3]) Beiläufig bemerkt, wurden die Tabellen nach dem von Kretz, nach Poncelet's Tode, herausgegebenen Cours de Mecanique etc., Seconde Partie, Pg. 58, berichtigt.

Tafeln der Ausflußcoefficienten

für rectanguläre, verticale Mündungen in dünner Wand, bei vollständiger Contraction und Ausfluß in die freie Luft.

Wasserstände über dem obern Rande der Mündungen	I. Tafel. Die Wasserstände sind an einem Punkte des Reservoirs gemessen, woselbst das Wasser vollkommen ruhig ist.												II. Tafel. Die Wasserstände sind unmittelbar an der Mündung gemessen.					
	Coefficienten d. Formel $Q = b(H-h)\sqrt{2g\frac{(H+h)}{2}}$ für Mündungshöhen von						Coefficienten d. Formel $Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g}\left\{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right\}$, für Mündungshöhen von						Coefficienten d. Formel $Q = b(H-h)\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}$ für Mündungshöhen von					
	0m,20	0m,10	0m,05	0m,03	0m,02	0m,01	0m,20	0m,10	0m,05	0m,03	0m,02	0m,01	0m,20	0m,10	0m,05	0m,03	0m,02	0m,01
0m,000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,619	0,667	0,713	0,766	0,783	0,795
0,005	—	—	—	—	—	0,705	—	—	—	—	—	0,709	0,597	0,630	0,668	0,725	0,750	0,778
0,010	—	—	0,607	0,630	0,660	0,701	—	—	0,622	0,644	0,667	0,704	0,595	0,618	0,642	0,687	0,720	0,762
0,015	—	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697	—	0,611	0,623	0,644	0,665	0,700	0,594	0,615	0,639	0,674	0,707	0,745
0,02	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694	0,592	0,611	0,624	0,644	0,664	0,696	0,594	0,614	0,638	0,668	0,697	0,729
0,03	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688	0,594	0,612	0,626	0,643	0,662	0,690	0,593	0,613	0,637	0,659	0,685	0,708
0,04	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683	0,596	0,612	0,627	0,642	0,660	0,684	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695
0,05	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679	0,597	0,613	0,628	0,042	0,659	0,680	0,593	0,612	0,636	0,651	0,672	0,686
0,06	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676	0,598	0,613	0,629	0,641	0,658	0,676	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681
0,07	0,588	0,609	6,628	0,639	0,656	0,673	0,598	0,614	0,630	0,640	0,657	0,673	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677
0,08	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670	0,599	0,614	0,630	0,639	0,656	0,670	0,594	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675
0,09	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668	0,599	0,614	0,631	0,638	0,655	0,668	0,595	0,614	0,634	0,641	0,659	0,672
0,10	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666	0,600	0,615	0,631	0,638	0,654	0,666	0,595	0,614	0,634	0,640	0,657	0,669
0,12	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663	0,600	0,615	0,631	0,637	0,653	0,663	0,596	0,614	0,633	0,637	0,655	0,665
0,14	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660	0,600	0,616	0,631	0,636	0,652	0,660	0,597	0,614	0,632	0,636	0,653	0,661
0,16	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658	0,600	0,616	0,631	0,635	0,650	0,658	0,597	0,615	0,631	0,635	0,651	0,659
0,18	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657	0,601	0,617	0,630	0,634	0,649	0,657	0,598	0,615	0,631	0,635	0,650	0,657

Fortsetzung der Tafeln voriger Seite.

Wasserstände über dem obern Rande der Mündungen	**I. Tafel.** Die Wasserstände sind an einem Punkte des Reservoirs gemessen, woselbst das Wasser vollkommen ruhig ist. Coefficienten d. Formel $Q = b\,(H-h)\sqrt{\frac{2g\,(H+h)}{2}}$ für Mündungshöhen von						Coefficienten d. Formel $Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left\{ H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right\}$, für Mündungshöhen von						**II. Tafel.** Die Wasserstände sind unmittelbar an der Mündung gemessen. Coefficienten d. Formel $Q = b\,(H-h)\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}$ für Mündungshöhen von					
	$0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m0,3$	$0^m,02$	$0^m,01$	$0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m,03$	$0^m,02$	$0^m,01$	$0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m,03$	$0^m,02$	$0^m,01$
0,20	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655	0,601	0,617	0,630	0,633	0,648	0,655	0,599	0,615	0,630	0,633	0,649	0,656
0,25	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653	0,601	0,617	0,630	0,632	0,646	0,653	0,600	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,30	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650	0,602	0,618	0,630	0,632	0,644	0,650	0,601	0,616	0,629	0,632	0,644	0,651
0,40	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647	0,603	0,618	0,629	0,631	0,642	0,647	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,647
0,50	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,704	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,645
0,60	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642	0,604	0,617	0,628	0,630	0,638	0,642	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,643
0,70	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,540	0,605	0,617	0,627	0,629	0,637	0,640	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,80	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637	0,605	0,616	0,027	0,629	0,636	0,637	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,90	0,605	0,615	0,626	0,627	0,634	0,635	0,605	0,616	0,626	0,628	0,634	0,635	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
0,00	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,10	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629	0,605	0,615	0,625	0,627	0,631	0,629	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,20	0,605	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,30	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622	0,604	0,613	0,922	0,624	0,625	0,622	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,40	6,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,50	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615	0,603	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,60	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,70	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,80	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612	0,602	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,90	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611
2,00	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	0,601	0,607	0,614	0,612	0,612	0,611
3,00	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

Zusatz. Die Tabellenwerthe[1]) sind übrigens auch für kreisförmige[2]) und für Mündungen gültig, deren Querschnittsform beliebige geradlinige Figuren bilden[3]), sobald dabei nur keine einspringenden Winkel vorkommen[4]) und die Druckhöhen nicht zu gering sind.

Beispiel. Welche Wassermenge fließt pro Secunde durch eine rectanguläre Oeffnung in dünner Wand bei vollkommener Contraction, welche $0^m,30$ Breite und $0^m,15$ Höhe hat und die Druckhöhe über der oberen Kante $0^m,05$ beträgt.

Auflösung. Der Ausflußcoefficient μ der Formel

$$Q = \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2g} \left\{ H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right\}$$

ist hier nach der Tabelle, weil er zwischen 0,597 und 0,613 fällt, zu 0,605 zu nehmen, so daß erhalten wird

$$Q = \frac{2}{3} \times 0{,}605 \times 0{,}30 \times 4{,}43\, (0{,}20^{\frac{3}{2}} - 0{,}05^{\frac{3}{2}}) = 0{,}0417 \text{ Cubikmeter.}$$

Unter Anwendung der gewöhnlich gebräuchlichen Formel

$$Q = \mu b\, (H - h) \sqrt{2g \left(\frac{H+h}{2}\right)}$$

liefert die Tabelle $\mu = \frac{0{,}585 + 0{,}605}{2} = 0{,}595$, daher ist

$$Q = 0{,}595 \times 0{,}30 \times 0{,}15 \times 4{,}43 \sqrt{0{,}125} = 0{,}0418 \text{ Cubikmeter.}$$

§. 101.

Ausfluß durch Oeffnungen in Wänden von bestimmter Dicke.

Um den Ausfluß durch Oeffnungen in Wänden von einer Dicke, wie solche in der Praxis vorkommen, richtig abzuschätzen,

---

[1]) Bemerkt muß werden, daß diese Tabellen in der angegebenen Folge der Druckhöhengrößen nicht den directen Versuchen entnommen, sondern aus diesen berechnet sind; eben so erstreckten sich die Versuche nur auf Druckhöhen bis zu $1^m,7$ (über der oberen Mündungskante), so daß die Erweiterung bis zu $3^m,0$ durch Interpolation geschehen mußte.

[2]) Weisbach's Versuche (Hydraulische Untersuchungen, 2. Abth., S. 65) bestätigten ebenfalls diese allgemeinen Angaben; speciell fand derselbe für Mündungen in dünner Wand bei vollkommener Contraction nachstehende Werthe:

Druckhöhe	Durchmesser	μ	Druckhöhe	Durchmesser	μ
$0^m,60$	$0^m,01$	0,628	$0^m,25$	$0^m,01$	0,637
—	$0^m,02$	0,621	—	$0^m,02$	0,629
—	$0^m,03$	0,614	—	$0^m,03$	0,622
—	$0^m,04$	0,607	—	$0^m,04$	0,614

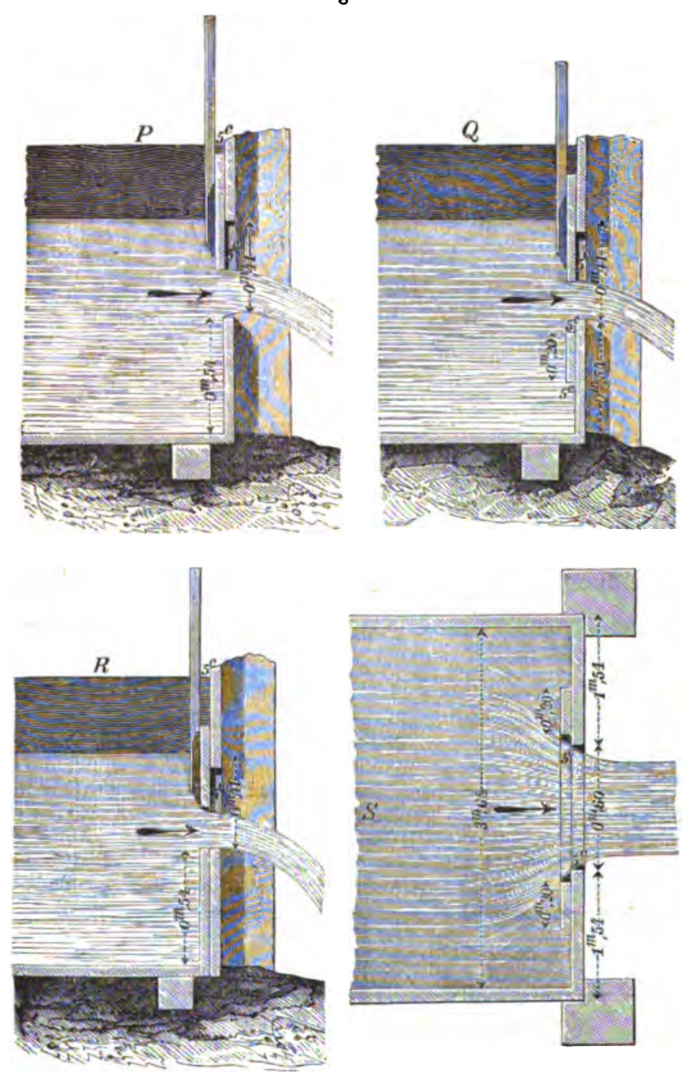
[3]) D'Aubuisson, Traité d'hydraulique, §. 27.

[4]) Hachette, Annales de Chimie, T. I, p. 202.

hat Lesbros Versuche über den Ausfluß bei Schützenöffnungen angestellt, wie sie Fig. 102 in *P*, *Q*, *R* und *S* abgebildet sind[1]).

Die Resultate dieser Versuche sind auszugsweise in folgender Tabelle (S. 261) zusammengestellt.

Fig. 102.



[1]) Letztere Figur ist eigentlich nur der Grundriß von Figur *Q*, entspricht jedoch zugleich ganz dem Grundrisse von *R*, so wie dem von *P*, wenn man sich, in letzterem Falle, die Bohle unterhalb der horizontalen Mündungsbasis entfernt denkt.

HYDROMECHANIK

ODER

DIE TECHNISCHE MECHANIK FLÜSSIGER KÖRPER

VON

DR. MORITZ RÜHLMANN,

KÖNIGLICH PREUSSISCHER GEHEIMER REGIERUNGSRATH UND PROFESSOR
AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU HANNOVER

ZWEITES HEFT.

HYDRODYNAMIK VOM AUSFLUSSE DES WASSERS DURCH SEITENÖFFNUNGEN UND ÜBERFÄLLE, BEWEGUNG DES WASSERS IN CANÄLEN UND RÖHREN BIS MITWIRKUNG UND WIDERSTAND DES WASSERS. AËROSTATIK UND AËRODYNAMIK.

ZWEITE VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

HANNOVER.

HAHN'SCHE BUCHHANDLUNG.

1880.

Hannover. Schrift und Druck von Fr. Culemann.

HYDROMECHANIK

ODER

DIE TECHNISCHE MECHANIK FLÜSSIGER KÖRPER

VON

DR. MORITZ RÜHLMANN,

KÖNIGLICH PREUSSISCHER GEHEIMER REGIERUNGSRATH,
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU HANNOVER,
RITTER DES HANNOVERSCHEN GUELPHENORDENS DRITTER CLASSE UND DES ORDENS
DER FRANZÖSISCHEN EHRENLEGION, OFFICIER DES ÖFFENTLICHEN UNTERRICHTS IN FRANKREICH,
EHRENBÜRGER DER RESIDENZSTADT HANNOVER, EHRENMITGLIED DES SÄCHSISCHEN
INGENIEUR- UND ARCHITEKTENVEREINS, DES ARCHITEKTEN- UND INGENIEUR-
VEREINS ZU HANNOVER, DES POLYTECHNISCHEN VEREINS IN MÜNCHEN ETC.,
CORRESPONDIRENDES MITGL. DES NIEDERÖSTERREICHISCHEN
GEWERBEVEREINS IN WIEN ETC. ETC. ETC.

„Les formules ne sont que des outils que doit diriger l'intelligence et qui ne peuvent jamais la remplacer". Dupuit.

ZWEITE VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

MIT 246 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

HANNOVER.

HAHN'SCHE BUCHHANDLUNG.

1880.

Hannover. Schrift und Druck von Fr. Culemann.

Vorwort zur ersten Auflage.

Bei der Bearbeitung gegenwärtigen Buches habe ich besonders die practische Bestimmung der Zöglinge der polytechnischen Schule zu Hannover, sodann aber den ausführenden Ingenieur vor Augen gehabt und daher analytische Formen wie naturphilosophische Auseinandersetzungen höchstens nur für den Zweck wissenschaftlicher Begründungen und des Verständnisses beachtet.

Die Einwebung des geschichtlichen Elementes an entsprechenden Stellen schien mir, nach meinen Erfahrungen im Vortrage, eben so nützlich wie interessant. Wo es nur immer möglich war, bin ich in der Behandlungsweise des Stoffes den ausgezeichnetsten Meistern der Vergangenheit und Gegenwart gefolgt, wobei ich von den Neueren vor Allem Weisbach zu erwähnen habe, von dessen hydraulischen Arbeiten, außer den an betreffendenden Stellen notirten, mir besonders die werthvollen Artikel der Maschinenencyklopädie „Ausfluß" und „Bewegung des Wassers" von großem Nutzen waren. Nächstdem habe ich der Werke und der Versuche Dubuat's, vorzüglich Poncelet's, sodann Bidone's, Navier's, d'Aubuisson's und Redtenbacher's zu gedenken, so wie endlich der allerjüngsten Arbeiten von Lesbros und Dupuit.

Die von letzterem Hydrauliker zuerst gelieferten Tabellen zur practischen Ermittlung von Stauhöhen und Stauweiten, habe ich frisch berechnen lassen und wesentlich erweitert. Hierbei erfülle ich zugleich eine angenehme Pflicht, wenn ich meinen verehrten Schülern, Herrn Lichtenberg, Gödecker und Weichelt, für ihre eben so mühevolle wie zeitraubende Arbeit beim Berechnen der Stautabellen, meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

Nicht minder gebührt der Verlagshandlung mein Dank für die schöne Ausstattung des Werkes, so wie der Druck-Officin für die treffliche Ausführung.

Möge das Ganze keinen ungerechten Tadel erfahren!

Hannover, im Juni 1857.

Der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Eine zweite Auflage meiner Hydromechanik, richtiger technischen Mechanik flüssiger Körper"[1]), ausgestattet mit den nothwendigen Veränderungen, Erweiterungen und Verbesserungen, welche sowohl vom Standpunkte der Wissenschaft als der Erfahrung, verlangt werden mußten, vermochte ich während der Zeit nicht zu liefern, wo die Bearbeitung der vier Bände „Allgemeine Maschinenlehre", meine Aufmerksamkeit und Arbeitskraft in vollem Maaße in Anspruch nahm.

Ob ich den vorbemerkten Forderungen an eine zweite Auflage des Buches gegenwärtig ganz entsprochen habe, muß ich nachsichtsvollen Beurtheilern überlassen, bemerke jedoch, daß hierzu weder der gute Wille noch die erforderliche Energie gefehlt hat.

Die Art und Weise der Auffassung und die allgemeine Behandlung des Gegenstandes, stets den Gesichtspunkt der practischen Anwendung berücksichtigend, habe ich unverändert im Auge behalten, jedoch die geschichtlichen Notizen erweitert, da ich vom Einflechten dieses Elementes, selbst überall in meine Vorträge (auch in der Allgem. Maschinenlehre), nur von ganz besonderen Erfolgen berichten kann[2]). Erfreulich war mir daher die Wahrnehmung, daß ich durch ebenbürtige, nachsichtsvolle Recensenten in dieser meiner auf Erfahrung beruhenden Ansicht bestärkt wurde. In allen diesen Beziehungen bin ich besonders mit den Urtheilen des Herrn Professors Weyrauch in Stuttgart einverstanden[3]), wozu auch der Gedanke gehört, daß es keineswegs meine Absicht war, durch mein Buch etwa Grashof's Bearbeitung der Mechanik flüssiger Körper, im 1. Bande der vortrefflichen „Theoretischen Maschinenlehre" dieses gelehrten Herrn, entbehrlich zu machen, sondern vielmehr eine Arbeit zu liefern, welche zu tieferen (gründlicheren) Studien anregt und

---

[1]) Meinen Wunsch, der neuen Auflage den richtigeren Titel „Technische Mechanik flüssiger Körper" zu geben, hielt die geehrte Verlagshandlung nicht in ihrem Interesse.

[2]) Man sehe auch das Urtheil des Herrn Dr. Steiner, Professor an der technischen Hochschule in Prag, in seiner Abhandlung „Bilder aus der Geschichte des Verkehrs". Prag 1880 (Vorrede).

[3]) Zeitschrift für Baukunde, Bd. II, S. 684. München 1879.

gleichsam die Einleitung zu jenem Werke bildet, worin die theoretischen Ableitungen überall in den Vordergrund gestellt sind.

Wie sehr der practische Hydrotekt noch bedauern muß, daß zur Entscheidung wichtiger technischer Fragen immer noch geeignete, in hinlänglich großem Maaßstabe angestellte Versuche fehlen, liefern namentlich die §§. 104 und 111 (beziehungsweise Ausfluß durch Schützenmündungen unter Wasser und Ausfluß bei Ueberfällen) traurige Beweise.

Bei Beantwortung hydrotechnischer Fragen letzterer Gattung bin ich insbesondere dem Königl. sächs. Kunstmeister, Herrn Bornemann in Freiberg (leider jetzt der einzige Experimentator im Gebiete der technischen Hydraulik in Deutschland), zu ganz besonderem Danke verpflichtet, sowohl für mancherlei Winke und Rathschläge überhaupt, als namentlich für die (erbetene) Mittheilung eines Auszuges aus einer größeren Arbeit dieses Herrn, betreffend den Ausfluß durch Schützenmündungen unter Wasser, welche hier im Nachtrage unter Nr. III (S. 747) zu finden ist[1]).

Auch meinem lieben Freunde und treuen, ehemaligen Schüler, Herrn Middendorf, jetzt Oberingenieur der Schiffsbauabtheilung in dem Bremer Maschinenbau-Etablissement „Weser" (früher Carstens Waltjen), bin ich zu besonderem Danke verpflichtet, indem dieser Herr bereitwilligst meiner Bitte entsprach, mir (nach den Resultaten Nystrom's und Froude's) seine neuesten Formeln zur Berechnung des Schiffswiderstandes und der Arbeitsleistung von Schiffsdampfmaschinen für mein Buch mitzutheilen. Der Nachtrag Nr. VII (S. 752) enthält diese Arbeit.

Die Nothwendigkeit, daß sich der rationell gebildete practische Ingenieur wenigstens mit den Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie bekannt machen muß, tritt nicht nur am augenfälligsten in den Capiteln „Wärme und Ausfluß der Gase und Dämpfe aus Gefäßmündungen", sondern ganz besonders in den Fällen hervor, wo es sich um Ermittlung der Druckverluste der atmosphärischen Luft von hoher Spannung und der gesättigten Wasserdämpfe, bei der Bewegung dieser Flüssigkeiten in langen Röhrenleitungen (S. 681, 684 und §. 201) handelt.

---

[1]) Ausführliches wird die jetzt von Dr. Hartig in Dresden redigirte Zeitschrift „Der Civilingenieur" (noch im Jahrgange 1880) über diesen eben so interessanten wie practisch wichtigen Gegenstand, aus der Feder Herrn Bornemann's, bringen.

Großen Dank habe ich außerdem mehreren Herren auszusprechen, welche mir ebenfalls bei der Bearbeitung dieser zweiten Auflage wesentliche Dienste leisteten.

Hierher gehören die Herren Maschineningenieure Prahl, Frese und Borchers, beziehungsweise ehemalige und gegenwärtige ehrenwerthe Assistenten an unserer technischen Hochschule, so wie auch Herr Krull, seiner Zeit noch Studirender unserer Lehranstalt. Ebenfalls unermüdliche Unterstützung, insbesondere beim Studium geschichtlicher Quellen, gewährte mir der Bibliothekar unserer Hochschule, Herr Rommel. Dabei vergessen darf ich auch nicht den Assistenten der Bibliothek, Herrn Cleves, da ich auch die Geduld dieses Herrn sehr oft auf die Probe stellen mußte.

Endlich gebührt noch mein Dank der geehrten Verlagshandlung, die nicht nur sämmtliche Holzschnitte der alten Auflage neu herstellen ließ, sondern auch für die Ausstattung des Werkes und dessen Druck in der Officin des Herrn Senators Culemann auf's Beste sorgte.

Hannover, Ende Juni 1880.

Rühlmann.

Inhaltsverzeichniss.

Hydromechanik.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Vierte Abtheilung.

Aërodynamik.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Nachträge.

Tabelle[1])

der Ausflußcoefficienten der Formel $Q = b\,(H - h) \sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}$, für eine Seitenöffnung von $0^m,6$ Breite und verschiedenen Höhen, in einer Wand von $0^m,05$ Dicke befindlich und mündend in die freie Luft. Die Druckhöhe unmittelbar an der Mündung gemessen.

Druckhöhe über der oberen Kante der Mündung in Metern	Die Höhe der Mündung beträgt, mit Bezug auf Fig. 102, *P*, *Q* und *R*:											
	$0^m,40$			$0^m,20$			$0^m,05$			$0^m,03$		
	P	*Q*	*R*[2])	*P*	*Q*	*R*	*P*	*Q*	*R*	*P*	*Q*	*R*
0,10	0,598	0,644	0,648	0,634	0,665	0,668	0,691	0,664	0,666	0,710	0,694	0,696
0,20	0,609	0,653	0,657	0,640	0,672	0,675	0,685	0,687	0,688	0,696	0,704	0,706
0,24	0,612	0,655	0,659	0,641	0,674	0,677	0,684	0,690	0,692	0,694	0,706	0,708
0,30	0,616	0,656	0,660	0,641	0,675	0,678	0,683	0,693	0,695	0,692	0,709	0,711
0,60	0,618	0,649	0,653	0,640	0,676	0,679	0,678	0,695	0,697	0,688	0,710	0,712
1,00	0,608	0,632	0,634	0,638	0,674	0,676	0,673	0,694	0,695	0,680	0,704	0,705
1,30	0,602	0,624	0,626	0,637	0,673	0,675	0,672	0,693	0,694	0,678	0,701	0,702
1,50	0,598	0,620	0,622	0,137	0,673	0,674	0,672	0,692	0,693	0,676	0,699	0,699
1,70	0,596	0,618	0,620	0,637	0,672	0,673	0,672	0,692	0,693	0,676	0,698	0,698
2,00	0,595	0,615	0,617	0,636	0,671	0,672	0,671	0,691	0,692	0,675	0,696	0,696
3,00	0,592	0,611	0,612	0,634	0,669	0,670	0,669	0,689	0,690	0,672	0,693	0,693

Die Ergebnisse dieser Tabelle stimmen zugleich mit den Resultaten anderer Experimentatoren über die sogenannte partielle Contraction (S. 203). Lesbros führt in dieser Beziehung noch an, daß die Coefficienten der Tabelle jenen für die dünne Wand gefundenen gleich werden, sobald der Strahl die Mündungskanten nirgends berührt, was sich bei seinen Versuchen stets ereignete, sobald die Mündung oberhalb mit keinem Schutzbrette versehen oder die Dicke dieses Schützens an der unteren Kante auf eine Schneide reducirt war.

§. 102.

Ausfluß unter Berücksichtigung der Gefäßwände.

Um die für die Praxis gleichfalls wichtige Frage nach dem Einflusse der Entfernung und Lage der Gefäßwände auf das Ausflußquantum beantworten zu können, hat Lesbros ebenfalls sorg-

---

[1]) Lesbros, Expériences hydrauliques etc. Pg. 464—467. Tableau XXXIII.

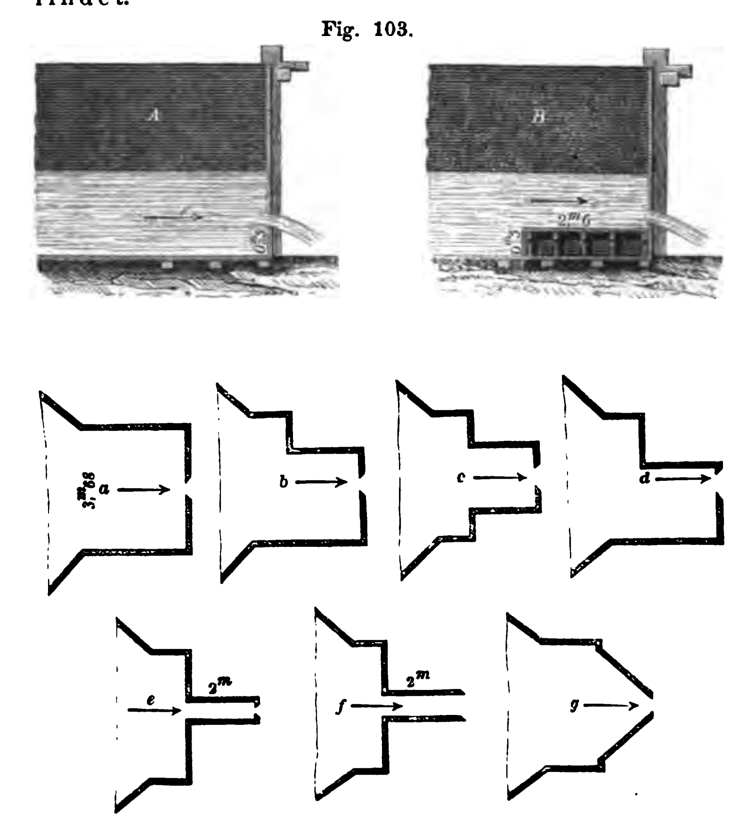
[2]) Diese Mündungsform entspricht ziemlich den Schützenöffnungen an den Schleusenthoren des Canales von Languedoc, für welche nach d'Aubuisson (Hydraulique §. 28) der Ausflußcoefficient $\mu = 0,625$ (Mittelwerth aus 8 Versuchen) bei Druckhöhen von $1^m,895$ bis $4^m,436$ über der Mitte der Mündung und für Höhen der letzteren von $0^m,46$ bis $0^m,55$ gefunden wurde. Zu bemerken ist jedoch, daß dabei die untere Mündungskante fast im Schleusenboden lag, während in obiger Tabelle diese Kante $0^m,54$ Entfernung vom Boden des Ausflußbehälters hatte, die größere Nähe der Kante am Boden aber eine Vergrößerung des Ausflußcoefficienten zur Folge haben mußte.

fältige Versuche angestellt, deren allgemeines Ergebniß zunächst lehrte[1]):

a. Daß die Gefäßwände stets von Einfluß sind, sobald ihr Abstand von der Ausflußöffnung 2,7 mal und weniger als die Breite der Mündung beträgt;

b. daß die Ausflußcoefficienten nicht blos um so größer werden, an je mehr Stellen der Mündung überhaupt die Contraction aufgehoben ist, sondern auch um so größer, wenn sich die Grundseite der Mündung unter den gedachten Stellen befindet.

Fig. 103.



Die speciellen Resultate der Messungen bei Anordnungen, wie sie Fig. 103 erkennen lassen, sind (auszugsweise) in folgender Tabelle zusammengestellt.

[1]) Lesbros, Expériences hydrauliques etc., §. 254 et §. 255.

Tabelle[1])

der Ausflußcoefficienten einer rectangulären Seitenöffnung von $0^m,2$ Breite, in die freie Luft mündend und entsptechend der Formel $Q = b\,(H - h)\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}$, dabei die Druckhöhen im Behälter unmittelbar über der Ausflußöffnung gemessen.

Druckhöhe über der oberen Kante der Mündung in Metern	Höhe der Mündung in Metern	Die Anordnung des Behälters im Grund und Aufrisse ist dabei mit Rücksicht auf Fig. 103 die von:											
		A, a	*A, b*	*A, c*	*B, a*	*B, d*	*B, e*	*B, f*	*A, d*	*A, e*	*A, f*	*B, g*	*A, g*
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,005	0,20	0,605	0,593	0,593	0,634	0,509	1,028	1,139	0,625	0,683	0,735	0,697	0,614
0,020		0,594	0,584	0,584	0,621	0,674	0,963	1,073	0,608	0,657	0,696	0,668	0;602
0,050		0,593	0,588	0,586	0,616	0,646	0,848	0,950	0,600	0,641	0,665	0,646	0,599
0,100		0,595	0,594	0,591	0,618	0,637	0,730	0,790	0,601	0,639	0,652	0,643	0,601
0,200		0,599	0,599	0,597	0,622	0,637	0,690	0,710	0,605	0,640	0,645	0,647	0,607
0,500		0,603	0,603	0,605	0,624	0,637	0,675	0,687	0,610	0,633	0,640	0,646	0,611
1,00		0,605	0,605	0,606	0,624	0,637	0,668	0,680	0,611	0,630	0,638	0,643	0,611
1,50		0,602	0,603	0,604	0,624	0,637	0,663	0,672	0,610	0,628	0,638	0,642	0,611
2,00		0,601	0,602	0,602	0,619	0,636	0,661	0,669	0,609	0,626	0,636	0,640	0,610
3,00		0,601	0,600	0,602	0,615	0,633	0,658	0,666	0,607	0,623	0,633	0,637	0,608
0,005	0,10	0,635	—	—	0,693	0,722	0,950	—	—	0,691	—	—	—
0,020		0,618	—	—	0,653	0,678	0,839	—	—	0,663	—	—	—
0,050		0,613	—	—	0,646	0,665	0,743	—	—	0,652	—	—	—
0,100		0,614	—	—	0,648	0,661	0,707	—	—	0,647	—	—	—
0,200		0,616	—	—	0,649	0,659	0,691	—	—	0,641	—	—	—
0,500		0,617	—	—	0,648	0,657	0,682	—	—	0,633	—	—	—
1,00		0,615	—	—	0,647	0,656	0,675	—	—	0,631	—	—	—
1,50		0,611	—	—	0,644	0,654	0,672	—	—	0,630	—	—	—
2,00		0,607	—	—	0,641	0,652	0,669	—	—	0,629	—	—	—
3,00		0,603	—	—	0,636	0,648	0,664	—	—	0,625	—	—	—
0,005	0,05	0,665	0,658	0,658	0,772	0,799	0,949	0,975	0,667	0,700	0,725	0,809	0,664
0,020		0,638	0,634	0,634	0,700	0,717	0,786	0,805	0,651	0,676	0,676	0,729	0,645
0,050		0,636	0,634	0,633	0,679	0,686	0,729	0,739	0,643	0,662	0,656	0,695	0,637
0,100		0,634	0,633	0,631	0,673	0,680	0,705	0,713	0,638	0,655	0,647	0,685	0,633
0,200		0,631	0,633	0,629	0,672	0,677	0,694	0,698	0,634	0,648	0,642	0,979	0,631
0,500		0,628	0,627	0,630	0,669	0,676	0,685	0,689	0,633	0,638	0,640	0,672	0,630
1,00		0,625	0,622	0,626	0,667	0,672	0,681	0,685	0,628	0,635	0,629	0,670	0,627
1,50		0,619	0,618	0,619	0,665	0,671	0,678	0,682	0,621	0,635	0,624	0,670	0,620
2,00		0,613	0,615	0,615	0,664	0,670	0,675	0,681	0,611	0,634	0,621	0,669	0,616
3,00		0,606	0,609	0,609	0,662	0,670	0,678	0,679	0,611	0,631	0,616	0,669	0,610

[1]) Lesbros, a. a. O., Pg. 442, Tableau XXV.

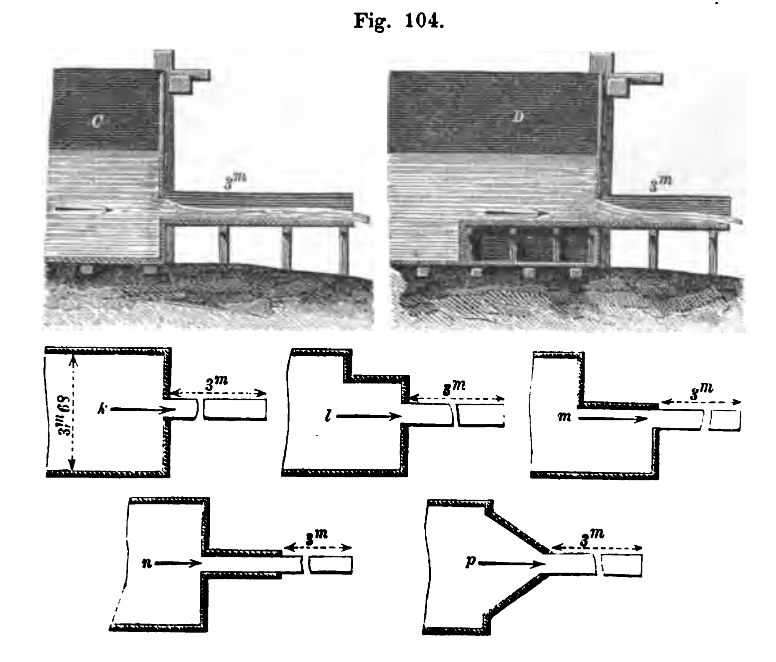
§. 103.

Ausfluß durch Schützenöffnungen mit außerhalb angesetzten Gerinnen.

Kurze Gerinne, welche außerhalb einer Durchlaßmündung (Schützenöffnung mit Druckhöhe über der oberen Kante) angebracht sind, wo der Beharrungszustand der Bewegung nicht vollständig eintreten kann, wie bei Wasserradgerinnen, bei Festungs- und Schifffahrtsschleusen, vermindern im Allgemeinen die Ausflußcoefficienten. Insbesondere ist dies bei geringen Druckhöhen der Fall, während bei größeren Druckhöhen (von etwa 1 Meter aufwärts) über der oberen Mündungskante, diese Verminderung fast ganz verschwindet.

Die hierüber von Lesbros angestellten Versuche haben mit Bezug auf Fig. 104 Resultate geliefert, wovon in nachfolgender Tabelle ein entsprechender Auszug mitgetheilt wird[1]).

Fig. 104.



Anmerkung. Mit dem Buchstaben E wird in der Tabelle eine Anordnung bezeichnet, welche hinsichtlich des Behälters der von D, Fig. 104, gleich kommt, dagegen vor der Mündung ein Gerinne von $2^m,5$ Länge und $\frac{1}{10}$ Neigung vorhanden ist. Die Gerinne aller übrigen Figuren sind horizontal und haben 3 Meter Länge.

[1]) Lesbros, Expériences §. 257 etc. Tableau XXXIV.

Tabelle

der Ausflußcoefficienten einer Seitenöffnung von $0^m,2$ Breite, außerhalb des Behälters mit einem rectangulären offenen Gerinne von $0^m,2$ Breite versehen, entsprechend der Formel $Q = b\,(H - h)\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}$, dabei die Druckhöhen im Behälter unmittelbar über der Ausflußöffnung gemessen.

Druckhöhe über der oberen Kante der Mündung in Metern	Höhe der Mündung in Metern	Die Anordnung von Behälter und Gerinne, im Grund und Aufriß ist dabei, mit Rücksicht auf Fig. 104, die von:											
		C, k[1]) 15	*D, k* 16	*D, l* 17	*D, m* 18	*D, n* 19	*C, m* 20	*C, n* 21	*D, p* 22	*E, k* 23	*E, m* 24	*E, n* 25	*C, E, n*[2]) 26
0,005	0,20	0,502	0,501	0,502	0,534	0,581	0,506	0,513	0,520	0,555	0,584	0,769	0,563
0,020	0,20	0,502	0,501	0,502	0,527	0,581	0,503	0,512	0,517	0,552	0,575	0,721	0,560
0,050	0,20	0,520	0,518	0,519	0,537	0,588	0,517	0,538	0,541	0,560	0,574	0,670	0,578
0,100	0,20	0,545	0,541	0,543	0,557	0,602	0,539	0,574	0,573	0,575	0,583	0,638	0,602
0,200	0,20	0,575	0,566	0,569	0,577	0,614	0,569	0,599	0,596	0,593	0,596	0,639	0,617
0,500	0,20	0,600	0,591	0,594	0,597	0,631	0,601	0,620	0,618	0,607	0,610	0,640	0,626
1,00	0,20	0,602	0,601	0,602	0,604	0,635	0,608	0,629	0,627	0,611	0,617	0,641	0,629
1,50	0,20	0,601	0,602	0,604	0,605	0,635	0,610	0,628	0,626	0,611	0,617	0,643	0,628
2,00	0,20	0,601	0,602	0,604	0,604	0,634	0,609	0,626	0,625	0,609	0,616	0,643	0,626
3,00	0,20	0,601	0,602	0,603	0,604	0,034	0,607	0,623	0,622	0,607	0,613	0,641	0,623
0,005	0,05	0,471	0,464	0,464	0,481	0,536	0,518	0,534	0,489	0,638	0,666	0,779	0,584
0,020	0,05	0,508	0,506	0,499	0,580	0,563	0,539	0,568	0,537	0,620	0,684	0,677	0,599
0,050	0,05	0,589	0,581	0,576	0,589	0,610	0,599	0,611	0,594	0,629	0,637	0,656	0,625
0,100	0,05	0,628	0,609	0,609	0,616	0,634	0,623	0,631	0,621	0,643	0,647	0,654	0,638
0,200	0,05	0,631	0,617	0,619	0,625	0,642	0,630	0,636	0,629	0,651	0,653	0,655	0,620
0,500	0,05	0,625	0,626	0,627	0,631	0,649	0,632	0,636	0,636	0,652	0,652	0,657	0,637
1,00	0,05	0,624	0,628	0,628	0,638	0,649	0,627	0,635	0,638	0,651	0,651	0,657	0,635
1,50	0,05	0,619	0,627	0,627	0,633	0,647	0,621	0,635	0,637	0,651	0,652	0,657	0,635
2,00	0,05	0,614	0,623	0,623	0,630	0,644	0,617	0,833	0,635	0,650	0,651	0,656	0,633
3,00	0,05	0,606	0,618	0,618	0,625	0,639	0,611	0,632	0,632	0,646	0,647	0,653	0,632
0,005	0,01	0,558	0,565	0,565	0,559	0,589	0,562	0,619	0,592	0,756	0,733	0,706	0,627
0,020	0,01	0,614	0,630	0,630	0,619	0,654	0,625	0,663	0,659	0,732	0,718	0,701	0,668
0,050	0,01	0,668	0,678	0,679	0,671	0,693	0,673	0,698	0,697	0,718	0,712	0,706	0,702
0,100	0,01	0,673	0,683	0,685	0,687	0,703	0,677	0,698	0,705	0,709	0,708	0,707	0,700
0,200	0,01	0,665	0,679	0,681	0,683	0,699	0,666	0,680	0,699	0,703	0,702	0,702	0,681
0,500	0,01	0,648	0,671	0,673	0,678	0,692	0,650	0,669	0,686	0,699	0,700	0,699	0,669
1,00	0,01	0,630	0,665	0,666	0,671	0,685	0,632	0,661	0,677	0,695	0,699	0,699	0,661
1,50	0,01	0,618	0,657	0,657	0,663	0,679	0,623	0,653	0,664	0,693	0,696	0,699	0,653
2,00	0,01	0,613	0,654	0,654	0,659	0,672	0,618	0,650	0,660	0,692	0,694	0,698	0,650
3,00	0,01	0,609	0,651	0,651	0,657	0,666	0,613	0,647	0,657	0,690	0,691	0,697	0,647

[1]) Behälter wie bei *C*, Gerinne wie bei *E*.

[2]) Die Ziffern der Columnen entsprechen den viel umfangreicheren Originaltafeln von Lesbros a. a. O. S. 468 etc. Tableau XXXIV.

Zusatz 1. Um den Einfluß der Neigung eines Gerinnes auf die Ausflußcoefficienten kennen zu lernen, hat Lesbros[1]) Versuche mit einer Gefäß- und Gerinnanordnung angestellt, welche der Zusammenstellung *D*, *n*, Fig. 104, entspricht.

Bezeichnet μ_1 den Ausflußcoefficienten für eine Mündung mit außerhalb unter bestimmter Neigung angebrachtem Gerinne, μ dagegen den betreffenden Coefficienten ohne Vorhandensein irgend eines Gerinnes, wenn die Figur der Zusammenstellung *B*, *e*, Fig. 103, entspricht und endlich $\varDelta$ ein Werth, welcher aus nachfolgender Tabelle zu entnehmen ist, so läßt sich überhaupt setzen:

$$\mu_1 = \frac{\mu}{1 + \varDelta}.$$

Gerinne		Druckhöhen über der oberen Kante der quadratischen Mündung von $0^m,20$ Seite		Werthe von $\varDelta$	
Länge	Neigung gegen den Horizont	Größte Druckhöhen	Kleinste Druckhöhen	Größte Druckhöhen	Kleinste Druckhöhen
Meter		Meter	Meter		
3,00	$\frac{1}{20}$	1,00	0,11	0,054	0,214
3,00	$\frac{1}{15}$	—	0,11	—	0,207
1,24	$\frac{1}{5,24}$	1,52	0,11	0,006	0,116
0,74	$\frac{1}{2,9}$	1,17	0,11	0,000	0,057
0,15	$\frac{1}{2,9}$	—	0,11	—	0,000
2,25	Null	—	0,11	—	0,134

Aus Allem erhellt jetzt der wichtige Satz: „daß es zur Berechnung der durch eine bestimmte Schützenöffnung fließenden Wassermenge unumgänglich nothwendig ist, gleichzeitig die Anordnungen des Ausflußbehälters, die Mündung und die Neigung des Gerinnes (vor der Mündung) ins Auge zu fassen.“

Beispiel. Wie groß ist der Ausflußcoefficient μ_1 für eine quadratische Mündung in dünner Wand von $0^m,20$ Seitenlänge, bei $0^m,11$ Druckhöhe über dem Scheitel der Mündung, wenn außerhalb der letzteren ein Gerinne $0^m,74$ Länge und $\frac{10}{29}$ Neigung gegen den Horizont angebracht, die Anwendung des Behälters aber die *B*, *e* von Fig. 103 ist?

[1]) a. a. O. §. 261, Pg. 200.

Auflösung. Mit Bezug auf B, e, Fig. 103, giebt die Tabelle, §. 102, zuerst $\mu = 0{,}730$, während die hier unmittelbar vorstehende Tabelle $\Delta = 0{,}057$ liefert, so daß für μ_1 folgt:

$$\mu_1 = \frac{\mu}{1 + \Delta} = \frac{0{,}730}{1{,}057} = 0{,}690.$$

Zusatz 2. Geneigte Schützenöffnungen. Beobachtungen über den Ausfluß des Wassers aus gegen den Horizont geneigten Schützenöffnungen, bei Anordnungen, wie sie Fig. 105 und Fig. 106 erkennen lassen, haben im Allgemeinen gelehrt, daß durch dieselben, unter sonst gleichen Umständen, der Ausflußcoefficient vergrößert wird. Die Ursache hiervon liegt in der Construction derselben, wodurch die Contraction an mehreren Seiten der Ausflußöffnung aufgehoben wird.

Fig. 105.

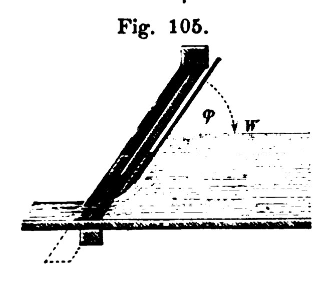
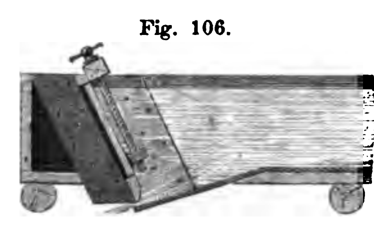


Fig. 105 zeigt den von Poncelet bei seinen Wasserrädern angewandten Schützen und die von ihm deshalb angestellten Beobachtungen[1]) geben

$\mu = 0{,}80$, wenn der Neigungswinkel des Schützens $\varphi = 45$ Grad (1 Basis auf 1 Höhe);

$\mu = 0{,}74$, wenn der Neigungswinkel des Schützens $\varphi = 63\frac{1}{3}$ Grad (1 Basis auf 2 Höhe).

Fig. 106.



Die Anordnung, Fig. 106, ist ein bei oberschlägigen Wasserrädern gebräuchlicher Schütze[2]) (Freiberger Spannschütze), wobei man $\mu = 0{,}77$ setzen kann[3]).

Zusatz 3. Die Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers in Gerinnen von geringer Länge, ist ein Gegenstand, welcher bei Anordnung der Wasserräder von Wichtigkeit ist. Navier[4]) betrachtete hierzu das Gerinne als eine kurze am Gefäße angebrachte Ansatzröhre und nahm den Ausflußcoefficienten allein von der Wasserdruckhöhe abhängig zu 0,86 bis 0,89 an. Lesbros[5]) fand jedoch bei seinen Versuchen, daß der Ausflußcoefficient nicht allein von letzterer Größe, sondern insbesondere auch von der Stelle des Gerinnes abhängig ist, wo man die Geschwindigkeit angeben will, von der Anordnung des Ausflußbehälters und Gerinnes und endlich von der Höhe der Mündung. Dieser Complication

---

[1]) Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes etc. Metz 1827, §. 78.
[2]) Jahrbuch (Freiberger) für den Berg- und Hüttenmann. Jahrgang 1844, S. 22.
[3]) Man sehe hierüber auch Grashof's Theoret. Maschinenlehre, Bd. I, S. 463.
[4]) Architecture hydraulique de Bélidor (nouvelle edition) note du §. 3, p. 424.
[5]) a. a. O. Nr. 264.

der Umstände wegen räth Lesbros (für sehr genaue Arbeiten) diese Geschwindigkeit in jedem besonderen Falle auf directem Wege, d. h. durch Messung des Strahlenquerschnittes für die Stelle zu bestimmen, woselbst man die Geschwindigkeit kennen lernen will.

Poncelet fand bei seinen Schützen (Fig. 105), daß an der Stelle der größten Zusammenziehung des Strahles (vor der Mündung) der Geschwindigkeitscoefficient ψ im Mittel zu setzen sei[1]):

$$\psi = 0,9274.$$

Zur noch besseren Beurtheilung des fraglichen Gegenstandes, so wie auch, um für manche practische Fälle wenigstens approximative Bestimmungen machen zu können, folgt hier eine den Versuchen Lesbros[2]) entlehnte Tabelle, wobei die Anordnungen der Ausflußgefäße (Behälter) und der horizontalen Gerinne, jene D, k und D, n von Fig. 104 waren.

Quadratische Mündung von $0^m,20$ Seite.									Rectanguläre Mündung von $0^m,05$ Höhe und 0,20 Breite.	
Anordnung D, k Fig. 104					Anordnung D, n, Fig. 104.				Anordnung D, k Fig. 104.	
Druckhöhe über der Mitte der Ausflußöffnung	Verhältniß der wirklichen Geschwindigkeit im Gerinne zur Geschwindigkeit, welche der Druckhöhe entspricht, wenn die Entfernung abwärts von der Mündung beträgt:				Druckhöhe über der Mitte der Ausflußöffnung	Verhältniß der wirklichen Geschwindigkeit im Gerinne zur Geschwindigkeit, welche der Druckhöhe entspricht, wenn die Entfernung abwärts von der Mündung beträgt:			Druckhöhe über der Mitte der Ausflußöffnung	Verhältniß der wirklichen Geschwindigkeit im Gerinne zur Geschwindigkeit, welche der Druckhöhe entspricht, wenn die Entfernung abwärts von der Mündung ist:
Meter	$0^m,05$	$0^m,06$	$0^m,07$	$0^m,08$	Meter	$0^m,09$	$0^m,36$	$0^m,95$	Meter	$0^m,0565$
0,4005	0,8232	0,8651	0,8687	0,8842	0,9105	0,8595	0,9841	0,9643	0,2125	0,9694
0,2440	0,8022	0,8381	0,8475	0,8561	0,4005	0,8657	0,9223	0,9036	0,1058	0,9475
0,1220	0,7202	0,7297	0,7443	0,7569	0,2420	—	0,8771	0,8488	—	—

Anmerkung. Hier würde vielleicht der passendste Ort gewesen sein, den Einfluß zu erörtern, welche zwei unmittelbar neben einander liegende Mündungen auf die Menge des ausfließenden Wassers ausüben, wenn nicht das Resultat der zur Zeit hierüber angestellten Versuche geradezu widerstreitend wäre. Man lese deshalb den d'Aubuisson'schen Bericht über die Versuche von Lespinasse und Castel[3]).

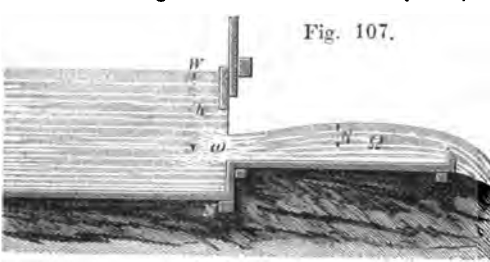
---

[1]) Mémoire sur les roues hydrauliques etc. Pg. 48, Nr. 46.
[2]) a. a. O. Nr. 266, Pg. 204.
[3]) Traité d'hydraulique. Nr. 29—31.

§. 104.

Schützenmündungen unter Wasser.

Wir betrachten zuerst den Fall, Fig. 107, des betreffenden Ausflusses, wo vor der Mündung, in einem Gerinne, durch einen Einbau (Schwelle, Wasserrad) ein künstliches Hinderniß angebracht und demzufolge ein Anschwellen (Stau) des Wassers erzeugt ist.



Hierzu sei A der Querschnitt des Ausflußbehälters MN, Fig. 107, ω der Querschnitt der Mündung, Ω der Querschnitt des Wasserstrahles im Gerinne und zwar an einer Stelle, wo der Beharrungszustand ziemlich wieder eingetreten und der Parallelismus der Schichten als (beinahe) wieder vorhanden anzunehmen ist. Ferner sei h die Druckhöhe im Behälter über der Mitte der Mündung, η der Abstand des Wasserspiegels im Querschnitte Ω von derselben Mitte, so daß $h - \eta$ die Höhendifferenz der Wasserspiegel im Behälter und Gerinne darstellt, endlich mögen die Geschwindigkeiten in den Querschnitten A, ω und Ω respective mit V, v und U bezeichnet werden.

Sodann liefert aber das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte unmittelbar die Gleichung:

$$(1) \quad \tfrac{1}{2} M (U^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} M (v - U)^2 = gM (h - \eta).$$

Ferner ist $V = \frac{\Omega U}{A}$; $v = \frac{\Omega U}{\alpha \omega}$, daher und wenn man durch die Masse M dividirt:

$$(2) \quad \tfrac{1}{2} U^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{A^2}\right) + \tfrac{1}{2} U^2 \left(\frac{\Omega}{\alpha\omega} - 1\right)^2 = g\,(h - \eta).$$

Setzt man wie gewöhnlich A sehr groß gegen Ω voraus, so kann man $\frac{\Omega}{A}$ vernachlässigen, also schreiben:

$$U^2 \left\{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha\omega} - 1\right)^2\right\} = 2g\,(h - \eta), \text{ woraus}$$

$$U = \sqrt{\frac{2g\,(h - \eta)}{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha\omega} - 1\right)^2}}.$$

Die pro Secunde ausfließende Wassermenge $= Q$ ergiebt sich sonach zu:

$$\text{I.} \quad Q = \Omega \sqrt{\frac{2g\,(h - \eta)}{1 + \left(\frac{\Omega}{\alpha\omega} - 1\right)^2}},$$

eine Gleichung, welche zuerst von Poncelet[1]) entwickelt wurde.

[1]) Cours de Mécanique appliquée aux machines. Seconde Partie (Kretz, Ausgabe von 1876), Pg. 70, Nr. 60.

Man erkennt sofort, daß sich mittelst dieser Formel der Werth von Q ergiebt, ohne eines Ausflußcoefficienten ($= \mu$) zu bedürfen, daß jedoch die Kenntniß des Contractionscoefficienten α für die Schützenmündung vorausgesetzt wird.

Schreibt man in I.

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\alpha\omega}-1\right)^2}} = m, \text{ so ergiebt sich}$$

$$\text{II.} \quad Q = m\Omega\sqrt{2g\,(h-\eta)},$$

ein bereits von Dubuat [1]) ermittelter Werth, der zugleich $m = 0{,}815$ [2]) angiebt.

Leider giebt diese Formel das Gesetz dieser Art des Ausflusses keineswegs wieder [3]).

Da im Querschnitte Ω von einer Contraction nicht wohl die Rede sein kann, so ist m eigentlich der vorher immer mit ψ bezeichnete Geschwindigkeitscoefficient, so daß, wenn man die Geschwindigkeit in Ω mit V bezeichnet, folgt:

$$\text{III.} \quad V = m\sqrt{2g\,(h-\eta)},$$

und nach Dubuat:

$$V = 0{,}815\sqrt{2g\,(h-\eta)}.$$

Der Ausdruck III. ist übrigens genau derselbe, den wir §. 84 für den Ausfluß des Wassers durch Bodenöffnungen fanden.

Zu beachten ist für den vorstehenden Fall der Satz, daß die Druckhöhen bei einer vollständig unter Wasser gesetzten Seitenmündung völlig constant sind, während dies beim Ausflusse in die freie Luft bei diesen Mündungen (§. 96 ff.) nicht der Fall ist.

Zusatz 1. Lesbros hat auch über diesen für die Praxis wichtigen Gegenstand Versuche angestellt und dabei einige Uebereinstimmung der Formel I. mit der Erfahrung gefunden, sobald man nur daselbst α durch den Ausflußcoefficienten μ (S. 257) ersetzt, welcher der Formel $Q = \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\left\{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right\}$ entspricht.

Wir entnehmen diesen Versuchen folgende Zusammenstellung, welche sich übrigens auf die Anordnung von C, k, Fig. 104, bezieht [4]).

---

[1]) Dubuat, Principes d'hydraulique, Tome I, p. 263.

[2]) Nach Dubuat a. a. O., p. 6 und p. 269, woraus sich

$$m = \psi = \mu = \sqrt{\frac{478}{724}} = 0{,}8125.$$

Poncelet a. a. O. (Ausgabe von 1876, Pg. 70), giebt an, Dubuat habe $m = 0{,}850$ gefunden!

[3]) Bornemann im Civilingenieur, Jahrg. 1871, Bd. 17, S. 47.

[4]) Lesbros, a. a. O. Nr. 277 und besonders Tabelle XVIII, p. 407.

Nr. der Lesbros Versuche	λ	η	ω	Ω	$\mu=\psi$	Wassermenge berechnet $= Q$	Wassermenge beobachtet $= Q_1$	$\frac{Q_1}{Q}$	Bemerkungen
1634	$0^m,0808$	$0^m,0326$	$0\square^m,010$	$0\square^m,01652$	0,6297	8,4249	8,9100	1,0554	Der Stau erreichte nicht den zusammengezogenen Strahl
1637	0,0808	0,0363	0,010	0,01626	0,6297	8,116	8,518	1,0494	Der Stau erstreckte sich nicht bis zum Schwerpunkt der Mündung
1541	0,0868	0,0484	0,010	0,10868	0,6297	7,2571	8,044	1,1091	Der Stau füllte die Ecken der Mündung und bespülte deren obere Kante
1658	0,0216	0,0178	0,010	0,01356	0,6247	2,40472	2,444	1,006	Der Stau reichte über die Mündung der oberen Kante

Die Werthe für h sind an einer Stelle gemessen, wo der Oberwasserspiegel völlig ruhig war; ω hatte $0^m,20$ Breite und $0^m,05$ Höhe.

Zusatz 2.. Entfernt man in der Gleichung (2) U mittelst des Werthes $U = \frac{\alpha\omega v}{\Omega}$, so folgt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\omega v}{\Omega}\right)^2\left(1-\frac{\Omega^2}{A^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\omega v}{\Omega}\right)^2\left(\frac{\Omega}{\alpha\omega}-1\right)^2 = g\,(h-\eta),$$

d. i.

$$\left(\frac{\alpha\omega v}{\Omega}\right)^2-\left(\frac{\alpha\omega v}{A}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha\omega}{\Omega}\right)^2 v^2 = 2g\,(h-\eta), \text{ folglich}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g\,(h-\eta)}{\left(\frac{\alpha\omega}{\Omega}\right)^2-\left(\frac{\alpha\omega}{A}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha\omega}{\Omega}\right)^2}},$$

daher auch

$$Q = \mu\omega v = \mu\omega\sqrt{\frac{2g\,(h-\eta)}{\left(\frac{\alpha\omega}{\Omega}\right)^2-\left(\frac{\alpha\omega}{A}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha\omega}{\Omega}\right)^2}},$$

so wie, wenn $\alpha = 1$ gesetzt und angenommen wird, daß $\omega = be$, $\Omega = b\eta_1$ und $A = bT$ ist, T und η_1 also die Wassertiefen oberhalb und unterhalb des Schützens bezeichnet:

$$\text{IV.} \quad Q = \mu b e \sqrt{\frac{2g(h-\eta)}{\left(\frac{e}{\eta_1}\right)^2 - \left(\frac{e}{T}\right)^2 + \left(1 - \frac{e}{\eta_1}\right)^2}},$$

eine Gleichung, welche Boileau in seinem Werke: „Traité de la mesure des eaux courantes", Paris 1854, Pg. 225, entwickelt und behauptet, dieselbe durch Versuche (als brauchbar) geprüft zu haben.

Da Boileau nirgends die betreffenden Werthe von μ bezeichnet, so werde letzterer Coefficient aus dem passendsten Versuche Boileau's berechnet.

Hierzu ist ausdrücklich zu bemerken, daß die Berechnung der secundlichen Wassermenge Q mittelst der Formel IV. und zwar für den Fall geschah, daß die Schützenmündung ω von e Höhe und b lichter Weite vollständig unter Wasser gesetzt worden war.

Verzeichnet werden dann in dem Tableau LXIII, Pg. 227 des Boileauschen Werkes, als dem 10. Versuche entsprechend, folgende Größen

$Q = \overset{\text{Cubikm.}}{0{,}09944} = 99{,}44$ Liter, $b = 0^m{,}90$, $e = 99^{mm}{,}7 = 0^m{,}0997$, wofür gesetzt wurde $e = 0^m{,}10$, daher $be = 0\square^m{.}09$.

Ferner ist $h = 0^m{,}5410$, $\eta = 0^m{,}4320$, daher $h - \eta = 0^m{,}109$, folglich $\sqrt{h-\eta} = \sqrt{0{,}109} = 0{,}330$. Sodann, wenn man als genau, $\eta_1 = \eta = 0^m{,}432$ und $T = h = 0{,}541$ annimmt:

$$\left(\frac{e}{\eta_1}\right)^2 = \left(\frac{0{,}10}{0{,}432}\right)^2 = 0{,}0534;$$

$$\left(\frac{e}{T}\right)^2 = \left(\frac{0{,}10}{0{,}541}\right)^2 = 0{,}0342;$$

$$\left(1 - \frac{e}{\eta_1}\right)^2 = (1 - 0{,}231)^2 = (0{,}767)^2 = 0{,}591.$$

Daher mit Bezug auf Gleichung IV:

$$\sqrt{\left(\frac{e}{\eta_1}\right)^2 - \left(\frac{e}{T}\right)^2 + \left(1 - \frac{e}{\eta_1}\right)^2} = \sqrt{0{,}0534 - 0{,}0342 + 0{,}591}$$
$$= \sqrt{0{,}6101} = 0{,}78.$$

Folglich, wenn $\sqrt{2g} = 4{,}43$ genommen wird:

$$Q = \mu \,.\, \frac{0{,}09 \,.\, 1{,}462}{0{,}78} = 0{,}168 \,.\, \mu,$$

d. i. endlich, wegen $Q = 0{,}09944$:

$$\mu = \frac{0{,}09944}{0{,}16800} = 0{,}592.$$

Bornemann berechnet (im Civilingenieur, Jahrg. 1871, Bd. 17, S. 50), gleichfalls mittelst der Formel IV. aus Boileau'schen Versuchen über den Ausfluß unter Wasser, den kleinsten Werth von μ zu 0,5200, den größten zu 0,7109 und schließt daraus, daß für μ ein constanter Werth überhaupt nicht angenommen werden könne.

Zusatz 3. Zu den für practische Zwecke zur Zeit empfehlenswerthen Versuchen über den Ausfluß bei ganz unter Wasser gesetzten Schützenöffnungen gehören die, welche der Herr Kunstmeister etc. Bornemann in Freiberg anstellte, dessen Leistungen, im Gebiete der technischen Experimental-Hydraulik, bereits S. 207 rühmlichst erwähnt

wurden. Ein ausführlicher Bericht über diese Versuche findet sich im Civil-Ing., Bd. 17 (1871), S. 46—59. Für gegenwärtigen Zweck werden nachstehende Notizen genügen, die wir durch die beiden Figuren 108 (Vertical-Längenschnitt) und 109 (Grundriß-Skizze) vervollständigen können, welche der Verfasser der besonderen Güte Herr Bornemann's verdankt.

Fig. 108.

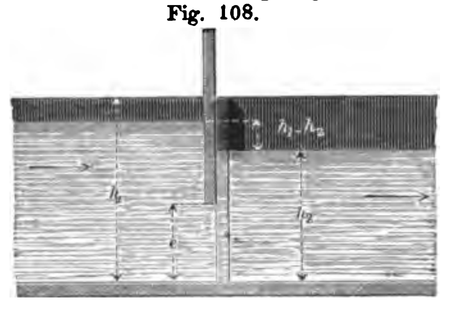
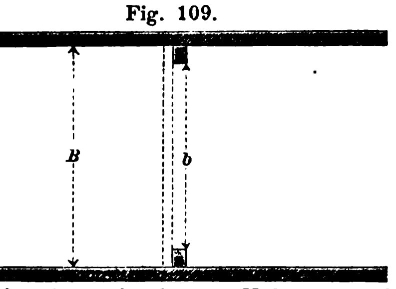


Fig. 109.



Wie die Skizze erkennen läßt, reichte bei den Versuchen der Spiegel des h_2 tiefen Unterwassers glatt oder doch ziemlich glatt, bis an die Schütze derartig zurück, daß der aus der Mündung von e Höhe tretende Wasserstrahl ganz unsichtbar war.

Das Zuführgerinne hatte überall die Breite $B = 1,135$ Meter. Vor die Ausflußstelle hatte man ein Paar Säulchen eingesetzt, resp. an den Gerinnboden befestigt, welche oben durch einen Holm verbunden waren und vor denen sich mit Hülfe einer durch den Holm gesteckten Schraube (ähnlich Fig. 106 S. 267) eine aus 43 Millimeter starken Pfosten gefertigte, über die ganze Breite des Gerinnes reichende Schütze verschob. Die Weite der Ausflußmündung war überall $b = 1,006$ Meter, die Beobachtungen der Wasserstände h_1 (im Oberwasser) und h_2 (im Unterwasser) wurden bei constanter Zuflußmenge angestellt.

Leider waren die bei den Versuchen benutzten Wassermengen zu gering, variirten nur von 50 bis 135 Liter pro Secunde, um völlig entscheidende Resultate erwarten zu können.

Aus 15 Versuchen, bei denen der Schützenzug e von 0,034 Meter bis 0,174 Meter variirte, ergab sich der Ausflußcoefficient und damit die secundliche effective Wassermenge $= Q$ zu:

$$Q = \left(0,63775 + 0,30\,\frac{e}{h_3}\right) be\sqrt{2g\,(h_1 - h_2}.$$

Hierbei ist $h_3 = h_2 - \frac{e}{2}$ der Abstand der Mitte der Mündungshöhe e vom Unterwasserspiegel und zwar wurde h_3 an einer Stelle gemessen, wo der genannte Spiegel seine größte Erhebung zeigt und möglichst beruhigt war[1]).

[1]) Gegen vorstehende Formel des Herrn Bornemann wurden im Jahre 1877, bei einer Versammlung des Verbandes deutscher Müller und Mühleninteressenten in Hannover vom Herrn Ingen. Linnenbrügge in Hamburg, Einsprüche erhoben. Seit dieser Zeit hat Herr Linnenbrügge eigene betreffende Versuche und Formeln im Civil-Ing., Jahrg. 1879, S. 25 veröffentlicht, worüber am Ende dieses Bandes, Anhang Nr. I, berichtet wird.

Zusatz 4. Für den Beharrungszustand des Durchflusses einer constanten Wassermenge Q durch rectanguläre Seitenöffnungen dreier oben offener Gefäße M, N, P, Fig. 110, unter der Voraussetzung, daß die Mündungsinhalte a_1, a_2, a_3 sehr klein sind in Bezug auf die Querschnitte der respectiven Gefäße, läßt sich nach dem Vorstehenden, als für die Praxis genau genug, setzen:

Fig. 110.

$$Q = \mu a_1 \sqrt{2gy} = \mu a_2 \sqrt{2gx} = \mu a_3 \sqrt{2g(h - x - y)}.$$

Hierbei bezeichnet y die Differenz der Wasserspiegel in den Gefäßen M und N, x eben diese Differenz für die Gefäße N und P, so wie h den Schwerpunktsabstand der äußersten Mündung a_3 über dem Wasserspiegel im Gefäße M.

Hiernach ist

$$y = \frac{Q^2}{2g(\mu a_1)^2};\ x = \frac{Q^2}{2g(\mu a_2)^2};\ h - x - y = \frac{Q^2}{2g(\mu a_3)^2},$$

so wie

$$h = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{(\mu a_1)^2} + \frac{1}{(\mu a_2)^2} + \frac{1}{(\mu a_3)^2}\right]$$

und endlich:

$$Q = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{(\mu a_1)^2} + \frac{1}{(\mu a_2)^2} + \frac{1}{(\mu a_3)^2}}}.$$

§. 105.

Partielle Contraction.

Begriff und Wirkung partieller Contraction wurden bereits §. 82 (Zusatz 1, Buchstabe d) erörtert und bei Lesbros' Versuchen über den Ausfluß durch Schützenöffnungen (auch bei den Poncelet- und Freiberger Spannschützen) auf die Vortheile aufmerksam gemacht, welche sich hinsichtlich der Vermehrung der Wassermenge herausstellen, sobald die Contraction des Wasserstrahles an einer oder mehreren Stellen aufgehoben ist.

Die ersten ausführlichen Versuche über diesen Gegenstand verdankt man dem italienischen Hydrauliker Bidone, der sie in demselben hydraulischen Etablissement anstellte, welches bereits die beiden Michelotti's (§. 76, S. 198) benutzt hatten. Die Resultate seiner Versuche paßte er der analytischen Form an:

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu\left(1 + A\frac{n}{p}\right).\ [1]$$

Hierbei bezeichnet $\mu_{\frac{n}{p}}$ den gesuchten Ausflußcoefficienten der partiellen Contraction, μ den Ausflußcoefficienten der vollkommenen

[1]) Memorie etc. di Torino, Tomo XL, p. 1 (1831) und im Auszuge hieraus: Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluß" (von Weisbach), S. 468.

Contraction unter sonst gleichen Umständen vorausgesetzt. Ferner bezeichnet n den Theil des ganzen Mündungsperimeters p, woselbst die Contraction aufgehoben ist und endlich A einen Coefficienten, der mit der Mündungsform als veränderlich angenommen wird.

Die Vergleichung der Versuche mit obigem Ausdrucke führten zu den Gleichungen:

I. $\mu_{\frac{n}{p}} = \mu\left(1 + 0{,}1523\frac{n}{p}\right)$ für rectanguläre Mündungen,

II. $\mu_{\frac{n}{p}} = \mu\left(1 + 0{,}1280\frac{n}{p}\right)$ für kreisförmige Mündungen,

Außer Bidone hat nur noch Weisbach[1]) directe Versuche über partielle Contraction angestellt, welche

III. $\mu_{\frac{n}{p}} = \mu\left(1 + 0{,}1343\frac{n}{p}\right)$ für rectanguläre Mündungen

lieferten.

Im Allgemeinen giebt die theilweise Einfassung einer Ausflußöffnung, um eben die Contraction partiell zu machen, dem Strahle eine schiefe von der Normale zur Ebene der Ausflußöffnung abweichende Richtung und zerstreut den Strahl auch mehr, als dies bei vollkommener Contraction der Fall ist.

Zur noch besseren Beurtheilung des Ganzen werden Fig. 111

Fig. 111.

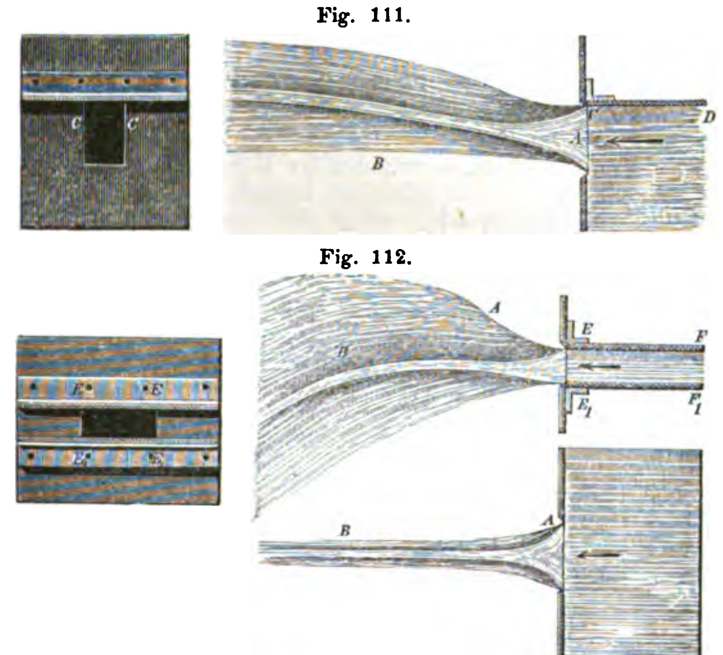
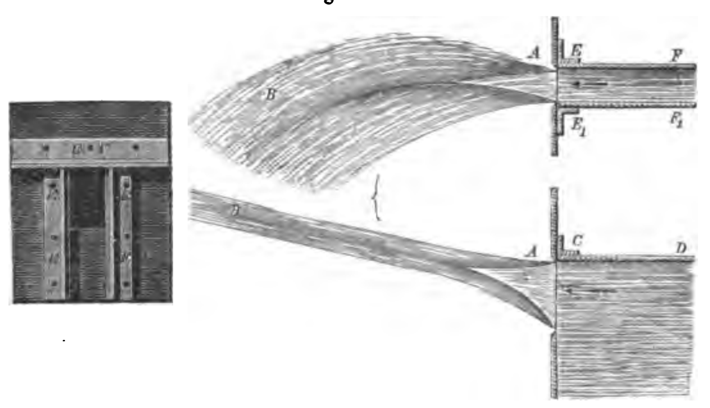


Fig. 112.

[1]) Untersuchungen, 2. Abtheilung, S. 148.

Fig. 113.



bis Fig. 113 dienen, welche den Weisbach'schen Versuchen mit rectangulären Mündungen entlehnt sind.

Bei der Anordnung, Fig. 111, war die Contraction nur an der oberen schmalen Seite CD aufgehoben und es floß der Strahl AB zwar noch hell aus, wurde aber auf der eingefaßten Seite CD, 7 bis 9 Grad von der Normale zur Mündungsebene seitwärts gedrückt. Wurde die Mündung wie Fig. 112 gestaltet, d. h. die Contraction an den beiden langen Seiten EE und E_1E_1 aufgehoben, so floß der Strahl wenig hell aus und hatte stark abgerundete Kanten. Bei der Anordnung, Fig. 112, war die Contraction an drei Seiten aufgehoben, nämlich auf den beiden langen Seiten EE und E_1E_1 und auf einer kurzen Seite CC.

Wenn endlich dieselbe rectanguläre Mündung, bei der Lage der Seiten von Fig. 112, auf allen vier Seiten, also an ihrem ganzen Umfange, eingefaßt wurde, verlor der Strahl seine regelmäßige Form, es floß das Wasser ganz stoßweise und in zerrissenen Fäden divergirend aus.

Beispiel. Bei der rectangulären Mündung, Fig. 111 bis Fig. 113, hatte jede lange Seite 5,0 Centimeter und jede kurze Seite 2,5 Centimeter Länge, es fragt sich, wie sich hiernach die Werthe der Bidone-schen Eormel I. gestalten?

Auflösung. Allgemein ist hier $p = 15,0$, ferner

$$n = 2,5;\ \frac{n}{p} = \frac{2,5}{15,0} = \frac{1}{6};\ \text{daher}\ \mu_{\frac{1}{6}} = 1,0254\ .\ \mu\ \text{bei Fig. 111};$$

$$n = 10,0;\ \frac{n}{p} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3};\ \text{daher}\ \mu_{\frac{2}{3}} = 1,1015\ .\ \mu\ \text{bei Fig. 112};$$

$$n = 12,5;\ \frac{n}{p} = \frac{12,5}{15,0} = \frac{5}{6};\ \text{daher}\ \mu_{\frac{5}{6}} = 1,1269\ .\ \mu\ \text{bei Fig. 113}.$$

§. 106.

Unvollkommene Contraction.

Auch dieser zuerst von Weisbach unter gesetzliche Form gebrachten [1]) und von ihm mit vorstehendem Namen belegten Contraction ist bereits §. 82 (Zusatz 1, Buchstabe e) hinlänglich gedacht und auf ihre Wirkung, die Ausflußmenge unter sonst gleichen Umständen zu vermehren, aufmerksam gemacht worden.

Fig. 114.

Bezeichnet μ_m den Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction, x das Querschnittsverhältniß der Mündung $ab = a$, Fig. 114, zum Querschnitt A des vor dieser ankommenden Wassers, also $x = \frac{a}{A}$ und μ wiederum den der vollständigen Contraction entsprechenden Ausflußcoefficienten, so hat man nach Weisbach:

$\mu_m = \mu \{1 + 0{,}04564[(14{,}821)^x - 1]\}$ für kreisförmige Mündungen; [2])

$\mu_m = \mu \{1 + 0{,}076(9^x - 1)\}$ für rectanguläre Mündungen. [3])

Zur Ersparung der Rechnung nach vorstehenden Formeln können folgende Tabellen dienen, wobei λ den Factor von μ bezeichnet. [4])

I. Kreisförmige Mündungen.

x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
λ	1,007	1,014	1,023	1,034	1,045	1,059	1,076	1,092	1,112	1,134
x	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
λ	1,161	1,189	1,223	1,260	1,303	1,351	1,408	1,471	1,546	1,613

II. Rectanguläre Mündungen.

x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
λ	1,009	1,019	1,030	1,042	1,056	1,071	1,088	1,107	1,128	1,152
x	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
λ	1,178	1,208	1,241	1,278	1,319	1,365	1,416	1,473	1,537	1,608

[1]) Bemerkenswerth dürfte es sein, daß die Weisbach'schen Sätze über unvollkommene Contraction den Ergebnissen der französischen Experimentatoren (selbst Lesbros nicht ausgenommen) weit voranstehen und daß Weisbach bereits das Gesetz der ganzen Erscheinung aufgefunden hatte, als es Andere nur ahnten.

[2]) Untersuchungen, Abtheilung II, S. 52.

[3]) Ebendaselbst, S. 91.

[4]) Ingenieur-Mechanik, Bd. 1, Fünfte Auflage, S. 989.

Zusatz. Für rectanguläre Schützenöffnungen, vor welchen das Wasser mit beträchtlicher Geschwindigkeit ankommt und die Druckhöhe nur im bewegten Wasser unmittelbar vor der Mündung gemessen werden kann, fanden wir §. 96, S. 245 zur Berechnung der durchfließenden Wassermenge Q:

$$Q = \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2g}\left\{\left(H + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(h + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Da hier c eine Function von Q, nämlich $c = \frac{Q}{A}$ ist, wenn A den Querschnitt des zufließenden Wasserstromes unmittelbar vor der Mündung bezeichnet, so führt die Auflösdng dieser Gleichung zu umständlichen Rechnungen. Um letztere zu vermeiden, hat Weisbach aus seinen eigenen Versuchen die Formel abgeleitet:[1])

$$Q = \mu\left[1 + 0{,}641\left(\frac{a}{A}\right)^2\right] a \sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)},$$

wobei jedoch $\frac{a}{A}$ nicht viel über $\frac{1}{2}$ sein darf.

Zur nochmehrigen Abkürzung der Rechnungen kann folgende Tabelle dienen, in welcher der binomische Factor von μ mit k bezeichnet ist:

$\frac{a}{A}$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	1,002	1,006	1,014	1,026	1,040	1,058	1,079	1,103	1,130	1,160

Beispiel. Welche Wassermenge fließt durch eine rectanguläre Schützenöffnung von 1,2 Meter Breite und 0,20 Meter Höhe, wobei der Wasserstrom vor der Mündung 1,2 Meter Breite und 1,0 Meter Tiefe hat, wenn die Mündung über die ganze Gerinnbreite reicht und nur Contraction an der oberen Kante stattfindet, d. h. die Contraction an drei Seiten aufgehoben ist?

Auflösung. Hier ist die Druckhöhe über der unteren Kante $H = 1^m{,}0$, die über der oberen Kante $h = 0^m{,}8$, daher, mit Bezug auf die Mündungshöhe $0^m{,}2$, nach Tafel II. S. 258, $\mu = 0{,}605$.

Ferner ist der eingefaßte Theil der Mündung $n = 1{,}2 + 0{,}4 = 1{,}6$. Der Mündungsperimeter $p = 2{,}8$, also $\frac{n}{p} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ und daher nach I. §. 105:

$$\mu_{\frac{4}{7}} = 1{,}087 \,.\, \mu = 1{,}087 \,.\, 0{,}605 = 0{,}660.$$

Ferner ist $a = 0{,}2 \times 1{,}2 = 0^{\square m}{,}24$; $A = 1 \,.\, 1{,}2 = 1^{\square m}{,}2$, also $\frac{a}{A} = \frac{24}{120} = 0{,}2$, daher nach letzterer Tabelle:

$$k = 1{,}026 \,.\, \mu_{\frac{4}{7}} = 1{,}026 \,.\, 0{,}660 = 0{,}677.$$

[1]) Ingenieur-Mechanik. Bd. 1, 5. Auflage, S. 991.

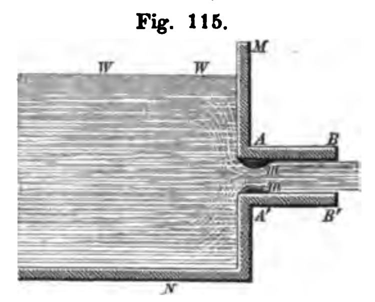
Da endlich überdies $\frac{H+h}{2} = \frac{1+0,8}{2} = 0,90$ und $a = 1,2 \,.\, 0,2 = 0,24$ ist, ergiebt sich:

$$Q = 0,677 \,.\, 0,24 \sqrt{2 \,.\, 9,8088 \,.\, 0,9} = 0,6824 \text{ Cubikmeter.}$$

§. 107.

Ausfluß durch kurze prismatische Ansatzröhren.

Fig. 115.



Versieht man eine Ausflußöffnung AA, Fig. 115, außerhalb des Wassergefäßes MN mit einer cylindrischen Ansatzröhre[1]), die etwa zwei- bis dreimal so lang als weit ist, so nimmt der Strahl eine andere Gestalt an, als wenn die Oeffnung allein in der (dünnen) Wand angebracht wäre, wovon der Erfolg, unter sonst gleichen Umständen, eine vermehrte Ausflußmenge ist. Die Ursache hiervon liegt in der Capillarattraction der Röhrenwände gegen die Flüssigkeit und entfernter im Luftdrucke[2]). Aehnlich wie bei der dünnen Wand zieht sich zwar der Strahl zu einem weit kleineren Querschnitte mm wie der Mündungsquerschnitt AA zusammen, geht aber bald darauf wieder aus einander, und füllt endlich die Röhre völlig aus, so daß an der Ausflußstelle BB der Querschnitt des Wasserstrahles gleich dem Querschnitte der Röhre ist. Da demungeachtet die ausfließende Wassermenge nicht jene ist, welche dem Producte aus dem Querschnitte der Röhrenmündung BB in die zur Druckhöhe über der Röhrenachse gehörigen Geschwindigkeit entspricht, so folgt ohne Weiteres, daß bei dem fraglichen cylindrischen Ansatze der Geschwindigkeitscoefficient gleich dem Ausflußcoefficienten, also $\mu = \psi$, dagegen $\alpha = 1$ ist.

Alle bis jetzt für Practiker brauchbaren Resultate über den Ausfluß des Wassers durch cylindrische oder prismatische Ansatzröhren, sind auf dem Wege des Experimentirens gefunden worden, in welcher Beziehung hier Einiges zur Vervollständigung des bis jetzt Gewonnenen mitgetheilt werden soll.

Ueber den oben erwähnten Einfluß der Röhrenlänge auf die Ausflußmenge hat insbesondere Eytelwein vertrauenswerthe Versuche angestellt[3]).

---

[1]) Man beachte hierbei den bereits für die Ausflußgeschwindigkeit durch kurze cylindrische Ansätze in Bodenöffnungen, S. 225, Nr. IV, gefundenen Ausdruck.

[2]) Für das mehr wissenschaftliche Studium fast aller, hier und in folgendem Paragraphen, behandelten Gegenstände, kann nicht genug ein Aufsatz von Feilitsch: „Ueber den Ausfluß der Flüssigkeiten aus Oeffnungen in dünner Wand und aus kurzen Ansatzröhren“, empfohlen werden, der sich in Poggend. Annalen, Bd. 63, S. 1 und S. 224 vorfindet.

[3]) Man sehe hierüber S. 281.

Die absolute Größe der Ausflußcoefficienten bei kurzen cylindrischen oder parallelepipedischen Ansatzröhren zeigt wenig Variationen, wie aus folgender Tabelle erhellt, die d'Aubuisson's Hydraulik[1]) entlehnt und durch Hinzufügung der Weisbach'schen Versuche vervollständigt ist.

I. Cylindrische Ansatzröhren.

Beobachter	Der Ansatzröhre		Druckhöhe	Ausfluß-coefficient $\mu = \varphi$
	Durchmesser	Länge		
	Meter	Meter	Meter	
Castel	0,0155	0,040	0,20	0,827
"	0,0155	0,040	0,48	0,829
"	0,0155	0,040	0,99	0,829
"	0,0155	0,040	2,00	0,829
"	0,0155	0,040	3,03	0,830
Bossut	0,0230	0,054	0,65	0,788
"	0,0230	0,054	1,24	0,787
Eytelwein . . .	0,0260	0,078	0,72	0,821
Bossut	0,0270	0,041	3,85	0,804
"	0,0270	0,054	3,87	0,804
"	0,0270	0,108	3,92	0,804
Venturi	0,0410	0,123	0,88	0,822
Michelotti . . .	0,0810	0,216	2,18	0,815
Weisbach[2]) .	0,0330	0,125	0,571	0,8175
"	0,0403	0,275	0,569	0,7822
"	0,01064	Ungefähr 3 mal so lang als weit	0,5780	0,8540
"	0,01064	—	0,2361	0,8509
"	0,01934	—	0,5762	0,8330
"	0,01934	—	0,2334	0,8323
"	0,02672	—	0,5748	0,8171
"	0,02672	—	0,2319	0,8129
"	0,03020	—	0,5749	0,8170
"	0,03020	—	0,2319	0,8165

II. Parallelepipedische Ansatzröhren.

Beobachter	Der Ansatzröhre			Druckhöhe	Ausfluß-coefficient $\mu = \varphi$
	Höhe	Breite	Länge		
	Meter	Meter	Meter	Meter	
Michelotti . . .	0,081	0,081	0,216	3,80	0,803
"	0,081	0,081	0,216	6,71	0,803
Weisbach . . .	0,0191	0,04217	0,125	0,569	0,8194
"	0,02478	0,05018	0,320	0,576	0,7960

[1]) a. a. O. p. 49. d'Aubuisson nennt dabei die Contraction beim cylindrischen Ansatze eine innere, im Gegensatze zu der bei dünner Wand stattfindenden, die er mit dem Namen äußere Contraction bezeichnet.

[2]) Untersuchungen, Abtheil. I. und II, S. 92 etc.

Die Weisbach'schen Versuche lassen besonders erkennen, daß der Ausflußcoefficient zunimmt, wenn der Mündungsdurchmesser kleiner wird. Hinsichtlich des Einflusses der Druckhöhe läßt sich weniger Bestimmtes sagen.

Zusatz 1. Ueber die Einwirkung der Länge cylindrischer Ansätze hat vorzüglich Eytelwein sorgfältige Versuche angestellt, welche im Allgemeinen das bereits oben Gesagte bestätigen [1]).

Sämmtliche von Eytelwein benutzte Ansatzröhren hatten kreisförmigen Querschnitt und durchaus 1 Zoll (rheinisch) Durchmesser. Der prismatische Wasserbehälter, in dessen Seitenwand sie angebracht wurden, bildete im horizontalen Durchschnitte ein im Lichten 18,5 Zoll langes und 14,5 Zoll breites Rechteck. Die Versuche wurden bei veränderlicher Druckhöhe von anfänglich 36 Zoll bis 20,6 Zoll angestellt, wobei, in verschiedenen Zeiten, immer dieselbe Wassermenge, nämlich 4156 Cubikzoll ausfloß. Die Resultate dieser Versuche enthält folgende Tabelle:

Länge der Röhren in Zollen	$\frac{1}{24}$	1	3	12	24	36	48	60
Beobachtete Zeit des Ausflusses	$59\frac{1}{2}$	$59\frac{1}{3}$	$44\frac{3}{4}$	48	$50\frac{1}{3}$	54	58	61
Ausfluß-coefficient $= \mu$	0,6176	0,6176	0,8211	0,7655	0,7276	0,6804	0,6335	0,6024

Hieraus erkennt man ohne Weiteres:

1) daß, wenn der cylindrische Ansatz noch nicht das Doppelte des Durchmessers beträgt, also noch nicht so lang ist, um über die Stelle hinwegzukommen, wo der Strahl die Ansatzröhre nicht füllt, der Ausfluß genau so wie bei einer Oeffnung in dünner Wand erfolgt;

2) daß, wenn die Länge des cylindrischen Ansatzes im Verhältniß zu seinem Durchmesser beträchtlich wird, die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen durch deren Anhängen an den Röhrenwänden eine bedeutende Verzögerung erfährt und bei noch größerer Länge der Einfluß der Ausbreitung des Wasserstrahles auf ein vermehrtes Ausflußquantum ganz wirkungslos wird.

Zusatz 2. Von den Versuchen, welche insbesondere zur Erklärung der Ursachen der Ausflußerscheinungen bei kurzen cylindrischen Ansätzen angestellt wurden, verdienen zuerst die des Italieners Venturi [2]) angeführt zu werden.

Dieselben wurden unter einem constanten Drucke von $32\frac{1}{2}$ pariser Zoll (= 0,88 Meter) vorgenommen, wobei das Wasser aus Seitenmündungen eines Behälters von 36 Zoll Höhe, 40 Zoll oberen und 30 Zoll

[1]) Hydraulik §. 98.

[2]) Gilb. Annalen (1799), Bd. 2, S. 418.

unteren Durchmesser floß. Die hierhergehörigen Hauptergebnisse waren folgende:

a. Brachte man an einer Stelle des Gefäßes, wo die Wand von einer dünnen (kaum $\frac{1}{4}$ Linie starken) Kupferplatte gebildet wurde, eine kreisförmige Mündung von 15 Linien an, so strömten 4 Cubikfuß Wasser in der Zeit von 41 Secunden aus. Durch eine cylindrische Ansatzröhre außerhalb dieser Mündung, von 15 Linien Durchmesser und 54 Linien Länge, flossen dagegen 4 Cubikfuß Wasser in 31 Secunden aus. Da sich überdies durch anderweitige Versuche der Ausflußcoefficient für jene dünne Kupferwand zu 0,6215 ergeben hatte, müßte hiernach der Ausflußcoefficient μ für den bemerkten cylindrischen Ansatz sein:

$$\mu = \frac{41}{31} \,.\, 0{,}6215 = 0{,}822.$$

b. Bohrte man durch dieselbe cylindrische Röhre, 9 Linien weit von der Gefäßwand ringsherum zwölf kleine Löcher, Fig. 116, so flossen wiederum nur 4 Cubikfuß Wasser in 41 Secunden aus, d. h. der cylindrische Ansatz war ohne Einfluß auf die Wassermenge, welche vorher durch die dünne Wand strömte. Dabei sickerte durch diese Löcher nicht ein Tropfen Wasser, während aber auch der Strahl die Röhre nicht ausfüllte. Man stopfte darauf ein Loch nach dem andern mit nassem Leder zu. So lange noch ein Loch offen war, blieb der Ausfluß derselbe; als aber endlich alle zwölf Löcher verstopft waren, füllte der Wasserstrahl die Röhre wieder aus und es flossen abermals 4 Cubikfuß Wasser in 31 Secunden aus.

Fig. 116.

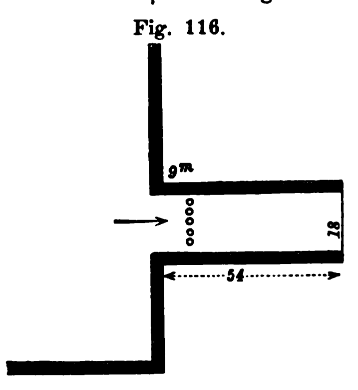
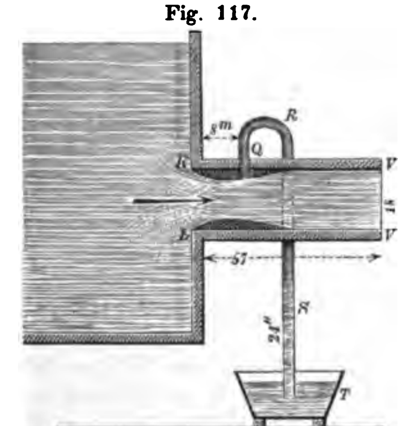


Fig. 117.



c. An eine cylindrische Röhre KLV, Fig. 117, von abermals 18 Linien Durchmesser, jedoch 57 Linien Länge, wurde 8 Linien weit von K die Glasröhre QRS angebracht, deren unteres Ende in ein Gefäß T tauchte, welches mit gefärbtem Wasser gefüllt war. Bei dieser Anordnung der Ausflußmündung flossen 4 Cubikfuß Wasser wiederum in 31 Secunden aus; dabei stieg aber das gefärbte Wasser in der Röhre SR auf 24 Zoll Höhe über den Spiegel des Wassers in T hinan.

Wurde hierauf der Arm RS der Glasröhre so weit verkürzt, daß er nur 6 Zoll länger als RQ blieb, so stieg das gefärbte Wasser beim Ausflusse die ganze Glasröhre SR hinan, vermischte sich mit dem durch

KV strömenden Wasserstrahle und floß mit demselben durch *V* ab, so daß in kurzer Zeit das Gefäß *T* ausgeleert war.

d. In einem cylindrischen Gefäße, das 4,5 Zoll weit war, wurde unweit des Bodens, in der senkrechten Seitenfläche, eine Blechplatte mit einer kreisförmigen Oeffnung von 4,5 Zoll Durchmesser eingesetzt. Als dies Gefäß, bis zu einer Höhe von 8,3 Zoll über dem Mittelpunkte der Oeffnung, mit Wasser gefüllt wurde, senkte sich der Wasserspiegel beim Ausfließen durch die Oeffnung um 7 Zoll in einer Zeit von 27,5 Secunden. Als man an diese Oeffnung eine eben so weite, 11 Linien lange cylindrische Röhre ansetzte, erfolgte die Senkung um 7 Zoll in der Zeit von 21 Secunden.

Wiederholte man hierauf diesen Versuch unter dem Recipienten einer Luftpumpe, in welchem das Quecksilbermanometer nur noch 10 Linien hoch stand, so senkte sich hier der Wasserspiegel im Gefäße um 7 Zoll, stets in der Zeit von 27,5 Secunden, gleichgültig, ob die Oeffnung blos von einer dünnen Platte gebildet oder mit einer cylindrischen Ansatzröhre versehen war.

Fig. 118.

Zusatz 3. Aehnliche Versuche wie die Venturi's sind unter andern von Matthieu Young und Hachette angestellt worden[1]), aus denen übereinstimmend hervorgeht, daß sich, bei kurzen cylindrischen Ansätzen, welche außerhalb der Gefäße angebracht werden, die Ausflußmenge mit dem Drucke der Luft vermindert.

Nach Buff's[2]) Versuchen findet ebenfalls eine Vermehrung des Ausflusses durch kurze cylindrische Ansätze nicht statt, wenn sich der Strahl in einen luftleeren Raum ergießt.

Wegen des höchst sinnreichen Verfahrens, mittelst welchem Buff zu diesen Resultaten gelangte, werde hier versucht, zur Beschreibung seines Versuchsapparates die fehlende Abbildung in Fig. 118 zu liefern. *AA* ist ein genau cylindrisches Blechgefäß von etwa $1\frac{1}{2}$ Fuß Höhe mit einem langen Rohre *BC* von 34 Fuß (pariser) Höhe in Verbindung gesetzt. An der Seite des Gefäßes *A* befand sich ein mit dessen Innerem communicirendes Glasrohr *G*, um die Wasserstandshöhe zu messen. Am oberen Ende des Rohres *BC* communicirte mit dem inneren Theile desselben ein Quecksilbermanometer *H* (§. 51), dessen Stand während des Versuches die Größe des Luftdruckes im Raume *E* anzeigt, welcher nach §. 79, Fig. 71, eine Art von Toricelli'sche Leere bilden mußte, sobald *BC* länger als $10^m,333 = 31,818$ pariser Fuß war und das untere Ende

[1]) Annales de Chimie et du Physique, Tome III (1816), p. 88, so wie auch Feilitsch in Poggend. Annalen, Bd. 63 (1844), S. 236.

[2]) Poggend. Annalen, Bd. 46 (1839), S. 240.

des Rohres BC in ein mit Wasser ganz angefülltes Gefäß tauchte. Wurde nun im Boden von A ein cylindrisches Ansatzrohr a von 18 Linien Länge und $3\frac{3}{4}$ Linien Durchmesser angebracht, durch welches das Wasser aus A in den luftverdünnten (beinahe luftleeren) Raum strömte, so ergab sich als Mittelwerth der Ausflußcoefficient zu 0,6458, d. h. wie für die dünne Wand. Wurde jedoch derselbe Ansatz am unteren Ende des Fallrohres bei K angebracht, so erhielt man 0,8248 als Mittelwerth für den betreffenden Ausflußcoefficienten. Im erstern Falle betrug der Barometerstand 333,62 Linien, der Manometerstand 7 Linien, folglich die Quecksilbersaugsäule 326,62 Linien, oder die Wassersäule $\overline{CD}=4442$ Linien.

Zusatz 4. Die Ergebnisse des Venturi'schen Experimentes c, Zusatz 2 (deren Ursache schon D. Bernoulli[1]) nachwies), stimmen vollständig mit den unter §. 79 aufgestellten Formeln.

Daselbst findet sich unter (3):

$$\frac{\Pi}{\gamma}=Z+\frac{P}{\gamma}-\frac{v^2}{2g}\left(\frac{a^2}{O^2}-\frac{a^2}{A^2}\right).$$

Wird hier $\left(\frac{a}{A}\right)^2$ als klein genug vernachlässigt und der Querschnitt der kleinsten Zusammenziehung des Strahles, Fig. 115, gleich αa genommen, so folgt

$$\frac{\Pi}{\gamma}=\frac{P}{\gamma}+Z-\frac{1}{\alpha^2}\,\frac{v^2}{2g}.$$

Nach §. 83, S. 225, läßt sich $v=0{,}816\sqrt{2gZ}$ und $\alpha=0{,}64$ setzen, so daß erhalten wird:

$$\frac{\Pi}{\gamma}=\frac{P}{\gamma}+Z-\left(\tfrac{816}{640}\right)^2 Z=\frac{P}{\gamma}-0{,}626\,.\,Z.$$

Bei dem erwähnten Versuche Venturi's war $Z=32{,}2$ pariser Zoll, woraus die Saughöhe:

$$0{,}626\,.\,Z=0{,}626\,.\,32{,}3=20{,}34 \text{ Zoll folgen würde.}$$

Hätte man statt des Contractionscoefficienten α den mittleren Ausflußcoefficienten $\mu=0{,}62$ in Rechnung gebracht, so würde sich die Saughöhe berechnet haben zu:

$$\frac{P}{\gamma}-\frac{\Pi}{\gamma}=\left(\tfrac{820}{620}\right)^2 Z-Z=0{,}749\,.\,Z, \text{ d. i.}$$

$$\frac{P}{\gamma}-\frac{\Pi}{\gamma}=0{,}749\,.\,32{,}3=24{,}3425 \text{ Zoll,}$$

während der directe Versuch, übereinstimmend, 24 Zoll ergab.

Zusatz 5. Der Einfluß cylindrischer Ansatzröhren auf die Menge des ausströmenden Wassers, wenn sie nicht außerhalb der Mündung, sondern wie Fig. 68 nach dem Innern des Gefäßes gerichtet sind, wurde bereits S. 197 für den Fall erwähnt, daß der Strahl die Ansatzröhre nirgends berührte. Es kann jedoch auch hier der Ausfluß bei gefüllter Röhre (à gueule-bée) erfolgen und die Ausflußcoefficienten bis beinahe auf 0,82 gesteigert werden.

---

[1]) Hydrodynamica, p. 264.

Fig. 119.

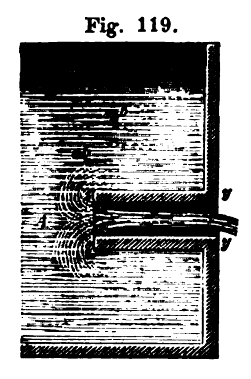
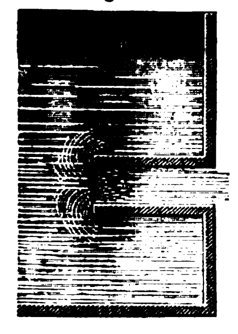


Fig. 120.



Schließt man nämlich die Ansatzröhre *yz*, Fig. 119, bevor der Ausflußbehälter mit Wasser gefüllt wird, an ihrer inneren Basis *zz* durch eine ebene Platte, läßt in diesem Zustande das Wasser im Behälter *A* bis zu einer nicht zu geringen Höhe *AW* über der Ansatzröhre treten und nimmt hierauf die vor *zz* gelegte Platte wieder hinweg, so fließt und bleibt der Strahl contractirt, wie Fig. 119, so lange die Druckhöhe über der Mitte der Mündung nicht zu gering wird. Unterbricht man jedoch in diesem Zustande den Ausfluß dadurch, daß man die äußere Mündung *yy* der Ansatzröhre schließt, so bemerkt man zuerst Luftblasen *b* aus der Röhre treten, aufsteigen und am Wasserspiegel *WW* entweichen, und wenn hierauf die Platte *yy* entfernt wird und das Wasser in der Ansatzröhre und dem Behälter eine nirgends unterbrochene Masse bildet, so fließt der Strahl die Röhre völlig ausfüllend, wie Fig. 120, aus.

In vorbeschriebener Weise hat namentlich Bidone[1]) Ausflußversuche über nach Innen gerichtete Ansatzröhren angestellt und dabei vorzüglich einen ganz besonderen Einfluß der Wanddicke der Ansatzröhre auf die unter sonst gleichen Umständen ausströmende Wassermenge bemerkt. Die Resultate dieser Versuche enthält folgende Tabelle, in welcher *r* den innern Radius der cylindrischen Ansatzröhre und *e* die Wanddicke der Röhre bezeichnet.

Größe der Ausflußcoefficienten μ nach Innen des Ausflußgefäßes gerichteter cylindrischer Ansatzröhren bei			
Nicht gefüllter Röhre		Gefüllter Röhre	
Kleinster Werth von e (beinahe Null)	Größter Werth von $e > (\sqrt{2}-1)r$	Kleinster Werth von e (beinahe Null)	Größter Werth von $e > (\sqrt{2}-1)r$
$\mu = 0{,}50$	$\mu = 0{,}61$	$\mu = 0{,}7071$	$\mu = 0{,}8125$

Zusatz 6. Ausfluß aus kurzen cylindrischen Ansätzen bei unvollkommener Contraction. Ist der Röhrenquerschnitt a im Verhältniß zum Querschnitte A des zufließenden Wasserkörpers im Gefäße sehr groß, d. h. $\frac{a}{A} = n$ ein nicht kleiner echter Bruch, so hat dies, unter sonst gleichen Umständen, eine Vergrößerung des Ausflußcoefficienten zur Folge.

[1]) Memorie etc. di Torino. Tomo XL. Recherches expérim. etc. sur l'écoulement par des tuyaux additionels intérieurs et extérieurs (1831).

Nach Weisbach's Versuchen[1]) erhält man in dem gedachten Falle die betreffenden Ausflußcoefficienten μ_n mittelst der Formel:

$$\mu_n = \mu \{1 + 0{,}1017 \,.\, n + 0{,}0669 \,.\, n^2 + 0{,}0462 \,.\, n^3\},$$

wo μ den Ausflußcoefficienten für die kurze cylindrische Ansatzröhre bei vollkommener Contraction bezeichnet.

Beispielsweise sei $n = \frac{a}{A} = 0{,}67$, $\mu = 0{,}82$, so folgt:

$$\mu_{0,67} = 0{,}82\,(1 + 0{,}112) = 0{,}9118.$$

Zusatz 7. Steht die Achse des prismatischen Ansatzes nicht rechtwinklig auf der Wandebene, in welcher die Mündung angebracht ist, sondern schließt diese Achse mit der Normale zur Wandebene an der Einmündung irgend einen Winkel δ ein, so vermindern sich die Ausflußcoefficienten.

Ebenfalls nach Weisbach's Versuchen[2]) lassen sich die betreffenden Ausflußcoefficienten mittelst der Formel finden:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\eta}}, \text{ wo}$$

$$\eta = 0{,}505 + 0{,}303 \,.\, \sin\delta + 0{,}226 \,.\, \sin\delta^2 \text{ ist.}$$

Für den Fall, daß $\delta = 45^0$ ist, findet man daher $\eta = 0{,}832$ und $\mu = 0{,}740$.

§. 108.

Ausfluß durch kurze conische Ansatzröhren.

Man hat zuerst conisch convergente und conisch divergente Ansatzröhren zu unterscheiden, je nachdem, von der Gefäßwand an gerechnet, vor welcher die Ansätze angebracht sind, die Seitenwände der letzteren zusammenlaufen (convergiren) oder aus einander gehen (divergiren). Wie aus dem Nachfolgenden erhellen wird, sind die ersteren fast allein von practischer Wichtigkeit.

Conisch convergente Ansätze vermehren unter sonst gleichen Umständen den Ausfluß noch mehr als cylindrische, liefern regelmäßige Strahlen, deren Sprungweite (S. 249) fast dieselbe als beim Ausflusse durch eine dünne Wand ist, d. h. sie vergrößern gegenüber den cylindrischen Ansätzen auch die Ausflußgeschwindigkeiten. Bei dieser Art von Ansätzen tritt daher die Nothwendigkeit der Einführung von Ausflußcoefficienten und Geschwindigkeitscoefficienten am sichtbarsten vor Augen.

Beide Coefficienten hängen hier wesentlich von dem neu hinzugekommenen Elemente, nämlich von dem Convergenzwinkel, d. h. von dem Winkel ab, welchen die beiden Langseiten des trapezförmigen Längenprofiles, durch die Kegelachse, mit einander bilden. Die ausgedehntesten und zuverlässigsten Versuche hierüber haben d'Aubuisson und Castel angestellt[3]), deren Hauptergebnisse folgende Tabelle enthält.

---

[1]) Untersuchungen, Abtheilung 2, S. 106.
[2]) Ing. Mechanik, Bd. 1, §. 450. Fünfte Auflage.
[3]) Annales des Mines (1838), Tome XIV, p. 187. Hieraus im Auszuge in d'Aubuisson's Hydraulique, §. 50.

Ansatzröhre von 0m,0155 Durchmesser und 0m,040 Länge			Ansatzröhre von 0m,020 Durchmesser und 0m,050 Länge		
Convergenz-Winkel	μ	ψ	Convergenz-Winkel	μ	ψ
0° 0′	0,829	0,830			
1 36	0,866	0,866			
3 10	0,895	0,894	2°50′	0,914	0,906
4 10	0,912	0,910			
5 26	0,924	0,920	5 26	0,930	0,928
7 52	0,929	0,931	6 54	0,938	0,938
8 58	0,934	0,942			
10 20	0,938	0,950	10 30	0,945	0,953
12 4	0,942	0,955	12 10	0,949	0,957
13°24′	0,946	0,962	13°40′	0,956	0,964
14 28	0,941	0,966			
16 36	0,938	0,971	15 2	0,949	0,967
19 28	0,924	0,970	18 10	0,939	0,970
21 0	0,918	0,971			
23 0	0,913	0,974	23 4	0,930	0,978
29 58	0,896	0,975	33 52	0,920	0,979
40 20	0,869	0,980			
48 50	0,847	0,984			

Aus dieser Tabelle geht hervor:

1) daß die Ausflußcoefficienten, für dieselbe Oeffnung und Druckhöhe, anfänglich mit den Convergenzwinkeln wachsen, bei 13 bis 14 Grad ihr Maximum erreichen, sodann aber wieder abnehmen und wahrscheinlich bei 180 Grad wieder die Werthe für die dünne Wand erreichen;

2) daß die Geschwindigkeitscoefficienten bei 0° Convergenz, d. h. bei einer cylindrischen Ansatzröhre, den Ausflußcoefficienten für letztere Arten von Röhren gleich kommen, sodann mit dem Convergenzwinkel wachsen und sich immer mehr der Einheit nähern, bis sie solche (wahrscheinlich) bei 180° Convergenzwinkel erreichen, d. h. der Ansatz wieder in die dünne Wand übergeht.

Bei Gelegenheit genannter Versuche hat man auch die Frage nach der vortheilhaftesten Länge conisch convergenter Ansatzröhren zu beantworten gesucht, ist jedoch zu keinem bestimmten Resultate gelangt. Am Wahrscheinlichsten schien es. diese Länge fünf mal so groß als den Mündungsdurchmesser zu setzen. (?)

Anmerkung. Die Stelle, wo d'Aubuisson und Castel die Versuche über den Ausfluß aus conisch convergenten Röhren anstellten, befand sich unten am Thurme der Toulouser Wasserkunst (S. 204). Die Druckhöhe variirte dabei von 0m,21 bis 3m,03 (in obiger Tabelle unbeachtet gelassen, weil sich herausstellte, daß die Druckhöhe unter sonst gleichen Umständen ohne Einfluß auf die Größe von μ und ψ war). Die ausfließende Wassermenge wurde in geaichten Gefäßen aufgefangen, die Geschwindigkeit aber aus den Coordinaten der Parabel, welche der fließende Wasserstrahl bildete (§. 97), berechnet.

Zusatz 1. Zu der Gattung der hier betrachteten Ansatzröhren kann man auch die nach der Gestalt des contractirten Wasserstrahles geformten conoidischen Mundstücke zählen.

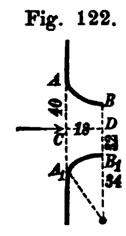
Fig. 121.

Nach Michelotti[1]) sollten, wenn ABB_1A_1, Fig. 121, ein Mundstück letztgedachter Art ist, die Bögen AEB und $A_1E_1B_1$ verlängerte Cycloiden bilden und in dem Falle, daß sich $AA_1 : BB_1 : CD$ wie 23 : 18 : 9 verhält, die Versuche ergeben haben: $\mu = \psi = 0,9834$.

Venturi[2]) fand, wenn $AA_1 = 18$ Linien, $BB_1 = 14,3$ Linien und $CD = 11$ Linien betrug: $\mu = \psi = 0,935$, wobei jedoch die scharfen Ecken bei A und A_1 nicht entfernt waren.

Eytelwein[3]) fand, wenn $AA_1 = 15$ Linien, $BB_1 = 12$ Linien und $CD = 8$ Linien groß war, bei nicht abgerundeten Ecken $\mu = \psi = 0,9186$, und wenn die scharfen Ecken entfernt worden waren $\mu = \psi = 0,9798$.

Fig. 122.



Nach den von Weisbach[4]) bei seinen Versuchen angewandten Mundstücken sind unsere Figuren 121 so wie 122 gezeichnet, auch geben die eingeschriebenen Zahlen die Dimensionen derselben in Millimetern an.

Bei den weiteren Mundstücken variirten die mit mittleren Druckhöhen von $0^m,1282$ bis $0^m,5959$ und bei den engeren ebenso von $0^m,1921$ bis $0^m,5766$.

Der Mittelwerth von $\mu = \psi$ ergab sich zu 0,970 für Fig. 121.
" " " $\mu = \psi$ " " " 0,965 " Fig. 122[5]).

Zusatz 2. Die Vortheile convergenter Seitenwände an der Ausflußstelle ergeben sich bereits aus §. 103, sind aber auch speciell für große Düsen (buses pyramidales), welche Wasserrädern Aufschlagwasser zuführten, von Lespinasse[6]) beobachtet worden. Es bildeten diese Düsen (Lutten) abgekürzte Pyramiden von $2^m,923$ Länge, mit rectangulären Endflächen, wovon die größere $0^m,731$ Breite, $0^m,975$ Länge und die kleinere $0^m,135$ Breite bei $0^m,190$ Länge hatte, die gegenüberliegenden Seiten bildeten Winkel von $11^\circ 38'$ und $15^\circ 18'$. Die Druckhöhe war constant $2^m,923$. Der kleinste beobachtete Ausflußcoefficient war 0,976, der größte 0,987.

---

[1]) Hydraulische Versuche, Bd. 1, §. 91 und Anhang §. 24, S. 247, Exp. XVII.
[2]) Eytelwein, Hydraulik, §. 92 und 95.
[3]) Hydraulik, §. 97.
[4]) Untersuchungen, Abtheilung 2, S. 147.
[5]) Die theoretische Bestimmung der Dimensionsverhältnisse dieser hier erwähnten Mundstücke, respective der Ermittelung der Form des zusammengezogenen Wasserstrahles, haben bis jetzt sämmtlich zu keinem Ziele geführt. Man sehe deshalb die bereits oben S. 220 und 221 (in der Note) angegegebenen Werke und Abhandlungen von Bidone, Gerstner, Navier, Buff, Feilitsch, Bayer, Scheffler und Boussinesq.
[6]) d'Aubuisson, Hydraulique, Nr. 51.

§. 109.

Conisch divergente Ansätze geben im Allgemeinen und unter sonst gleichen Umständen eine kleinere Ausflußmenge als conisch convergente Röhren.

Weiteren Aufschluß hierüber giebt folgende aus den Versuchen Venturi's[1]) und Eytelwein's[2]) zusammengestellte Tabelle. Bei dem ersteren Experimentator war die Druckhöhe fortwährend die constante von $32\frac{1}{2}$ pariser Zoll, während Eytelwein bei veränderlicher Druckhöhe operirte, wie solches bereits §. 107 (Zusatz 1) angeführt worden ist. Alle benannten Zahlenwerthe der Tabelle und zugehörigen Figuren sind bei Venturi in pariser Linien, bei Eytelwein in preußischen Linien ausgedrückt. Mit λ wird allemal eine cylindrische Röhre von 12 Linien innerem Durchmesser bezeichnet. Bei beiden Experimentatoren ist zwischen der Gefäßöffnung und der äußersten Mündung des conischen Ansatzes ein Mundstück nach der Form des zusammengezogenen Wasserstrahles, jedoch mit nicht abgerundeten Ecken angebracht.

---

[1]) Gilb. Annalen, Bd. 2, S. 448.
[2]) Hydraulik §. 97.

Experimentator	Dimensionen der conisch divergenten Ansätze		Ausflußcoefficienten, bezogen auf den Querschnitt von 18 Linien Durchmesser bei Venturi und auf 12 Linien bei Eytelwein	Ausflußcoefficienten für die äußerste Röhrenmündung	Bemerkungen	Gestalt der Ansatzröhre
	Durchmesser der Mündung	Länge				
Venturi . .	18‴	49‴	0,924	0,924		Fig. 123.
"	23	78	1,016	0,622		
"	27	148	1,210	0,538	Die Bewegung des Strahles war unregelmäßig.	Fig. 124.

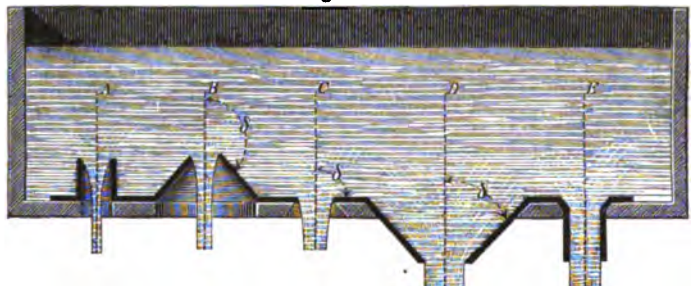
Experimentator	Dimensionen der Ansatzröhre (Vom zweiten Versuche an mit zwischen gebrachter cylindrischer Röhre λ von 12 Linien Durchmesser)		Ausflußcoefficienten, bezogen auf den Querschnitt von 18 Linien Durchmesser bei Venturi und auf 12 Linien bei Eytelwein	Ausflußcoefficienten für die äußerste Röhrenmündung	Bemerkungen	Gestalt der Ansatzröhre
	Durchmesser der Mündung	Länge				
Eytelwein.	21,5	105,75	1,5526	0,483		Fig. 125.
„	„	117,75	1,3362	0,416	λ=12 Linien lang	Fig. 126.
„	„	141,75	1,3362	0,416	λ=36 Linien lang	
„	„	249,75	1,1051	0,344	λ=144 Linien lang	
„	„	537,75 [1]	0,9073	0,283	λ=432 Linien lang	

[1]) Eytelwein bemerkt a. a. O. S. 112, daß bei einer 20 Fuß langen Röhre λ und bei stets 3 Fuß Druckhöhe das ausfließende Wasserquantum dasselbe blieb, es mochte das conisch convergente Ansatzrohr vorhanden sein oder nicht; auch war es nicht möglich, zu bewerkstelligen, daß letzteres Rohr vom Wasser ausgefüllt wurde.

Bei dem zweiten Venturi'schen Versuche brachte man in der Weise, wie Fig. 124 zeigt, drei Glasröhren an; die erste *DX* in der Verengung *CD*, in der Entfernung von 26 Linien von ihr und von einander, die *NY* und *OZ*. Die unteren Enden dieser drei Röhren mündeten in einem mit Quecksilber gefüllten Gefäße *Q*. Während des Ausfließens stieg das Quecksilber in der Röhre *DX* auf 53, in *NY* auf $20\frac{1}{2}$ und in *OZ* auf 7 Linien Höhe, Erscheinungen, die der in §. 79 aufgestellten Theorie vollkommen entsprechen, vermöge welcher die Pressung des Wassers im Innern der Röhre mit dem Wachsen des Strahlquerschnittes abnimmt. Venturi soll dieses Mittel des Aufsaugens der Flüssigkeiten zur Austrocknung sumpfiger Gegenden bei Modena angewandt haben[1])

Zusatz. Entsprechend der wiederholten Bemerkung, daß das mathematische Gesetz, welchem die Ausflußcoefficienten unterworfen sind, immer noch unbekannt ist, muß es ganz angemessen bezeichnet werden, empirische Formeln aufzustellen, die aus bekannten Versuchen abgeleitet worden sind und von denen aus man für ähnliche Verhältnisse auf die Größe der verlangten Coefficienten schließt. Eine solche empirische Formel ist u. a. (als sogen. Contractionsscala) von Herrn Dr. Zeuner[2]) für die in Fig. 127 skizzirten 5 Mündungsverhältnisse auf Grund von 11 Weisbach'schen Versuchen aufgestellt worden.

Fig. 127.



Sämmtliche Mundstücke hatten kreisförmige Querschnitte von 2 Centimeter Mündungsweite, während die angewandten Druckhöhen von 1 bis 10 Fuß variirten. Die Kanten der Einmündung des äußeren Ansatzrohres und der convergenten Mündungsstücke waren überdies abgerundet, um das Wasser ohne Entstehung von Wirbeln und daher ohne Verlust an mechanischer Arbeit in die Mündung eintreten zu lassen.

Mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate gelangte Zeuner zu folgender empirischer Formel, in welcher μ_x den aus dem gegebenen Abweichungswinkel δ[3]) zu berechnenden Ausflußcoefficienten bezeichnet:

$$\mu_x = 0{,}63850 + 0{,}21207 \cos^3\delta + 0{,}10645 \cos^4\delta.$$

Aus nachstehender Tabelle erhellt, wie die hieraus berechneten Werthe mit den Versuchsresultaten übereinstimmen.

---

[1]) Munke, Handbuch der Naturlehre. Erster Theil, S. 163.

[2]) Der Civilingenieur (Neue Folge), Bd. 2 (1856), S. 53.

[3]) δ ist der Winkel, um welchen die Richtung der seitwärts der Mündung zufließenden Wasserstrahlen von der Mündungsachse abweicht.

Nr. des Versuchs	Abweichungswinkel $= \delta$	Beobachteter Ausflußcoefficient $= \mu$	Berechneter Ausflußcoefficient μ_x	Differenzen $\mu = \mu_x$
1	0^0	0,9660	0,9570	+ 0,0090
2	$5\frac{3}{4}{}^0$	0,9490	0,9517	— 0,0027
3	$11\frac{1}{4}{}^0$	0,9243	0,9371	— 0,0128
4	$22\frac{1}{2}{}^0$	0,8823	0,8833	— 0,0010
5	45^0	0,7530	0,7372	+ 0,0158
6	$67\frac{1}{2}{}^0$	0,6841	0,7159	— 0,0318
7	90^0	0,6317	0,6385	— 0,0068
8	$112\frac{1}{2}{}^0$	0,6058	0,6039	+ 0,0019
9	135^0	0,5766	0,5912	— 0,0146
10	$157\frac{1}{2}{}^0$	0,5459	0,5488	— 0,0029
11	180^0	0,5411	0,5429	— 0,0018

§. 110.

Einfluß der Mündungsart auf Geschwindigkeitshöhe und mechanische Arbeit des ausströmenden Wassers.

Bezeichnen wir mit a den Querschnitt der Ausflußmündung, behalten aber sonst die bisherigen Bezeichnungen bei, so ist für die Geschwindigkeit v und Wassermenge Q pro Secunde zu setzen:

$$v = \psi \sqrt{2gH},\quad Q = \mu a \sqrt{2gH}.$$

Aus ersterem Werthe ergiebt sich die Geschwindigkeits- oder Steighöhe des Strahles zu:

$$\frac{v^2}{2g} = \psi^2 H.$$

Wird ferner die dem Wasser innewohnende natürliche oder Totalarbeit mit $\mathfrak{A}$, die resultirende oder Nutzarbeit mit $\mathfrak{A}_1$ bezeichnet, so erhält man noch:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\gamma Q}{g}\,v^2 = \mu\psi^2\,\gamma a H \sqrt{2gH} = \mu\psi^2\,.\,\mathfrak{A}.$$

Hiernach läßt sich aus den Ergebnissen der vorhergehenden Paragraphen folgende für die Praxis nicht unwichtige Zusammenstellung machen:

Art der Mündung.	ψ	μ	Resultirende Steighöhe $= \psi^2 . H$	Resultirende mechanische Arbeit $= \mu\psi^2 . \mathfrak{A}$
Dünne Wand	0,970	0,620	0,951 . H	0,583 . $\mathfrak{A}$
Conoidisches Mundstück nach der Form des zusammengezogenen Strahles	0,980	0,970	0,960 . H	0,941 . $\mathfrak{A}$
Kurze (äußere) cylindrische Ansatzröhre	0,820	0,820	0,672 . H	0,551 . $\mathfrak{A}$
Conisch convergenter Ansatz von 13° 40′ Convergenzwinkel	0,964	0,956	0,895 . H	0,822 . $\mathfrak{A}$
Eytelwein'scher conisch divergenter Ansatz der größten Wassermenge	0,483	0,483	0,233 . H	0,113 . $\mathfrak{A}$

Hieraus folgt vornämlich, daß man, unter sonst gleichen Umständen, zur Erreichung einer großen Steig- oder Sprunghöhe des Wassers, den Ausfluß durch dünne Wand oder geeignete conoidische Ansätze, zur Hervorbringung der größtmöglichen mechanischen Arbeit aber durch conisch convergente Ansätze mit vortheilhaften Neigungswinkeln wird geschehen lassen müssen.

Ausfluß bei Ueberfällen.

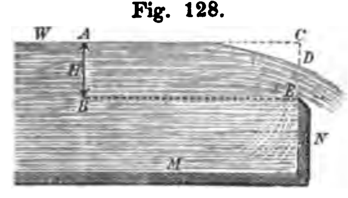
II. Mündungen ohne Druckhöhe über der oberen Kante.

§. 111.

a. Vollkommene Ueberfälle.

Wie bereits S. 200 bemerkt wurde, wird jede rechtwinklige Oeffnung in der Seitenwand eines Behälters MN, Fig. 128, deren obere Seite entweder gänzlich fehlt, oder bei welcher der ruhige Wasserspiegel unter dieser Seite liegt, ein Ueberfall genannt. Beim Fließen des Wassers aus einer derartigen Oeffnung senkt sich der horizontale Wasserspiegel AW von einer gewissen Stelle A an mehr oder weniger, so

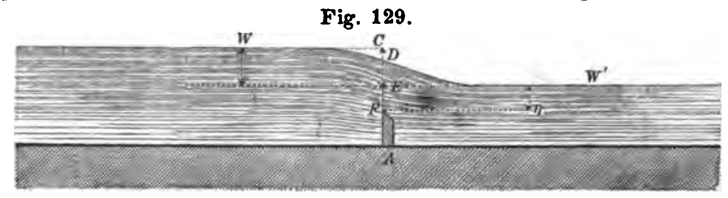
Fig. 128.



daß der Strahl unmittelbar über der Ausflußkante E bei Weitem dünner ist, als an irgend einer anderen Stelle rückwärts von E aus gerechnet[1]).

Wenn hierbei die Abflußkante E, wie in Fig. 128, über dem Spiegel des Unterwassers liegt, heißt der Ueberfall ein vollkommener; wenn dies jedoch nicht der Fall ist, sondern, wie in Fig. 129, die Ueberfallskante F tiefer als der Unterwasserspiegel W' liegt, wird der Ueberfall ein unvollkommener genannt.

Fig. 129.



Nach vorstehender Erklärung wird man die pro Secunde über einen vollkommenen Ueberfall strömende Wassermenge mittelst der Formel I. S. 245 berechnen können, sobald man dort h gleich Null setzt und die Druckhöhe H, als Abstand $\overline{AB}$ des ungesenkten Wasserspiegels von der Abflußkante E, in gehöriger Entfernung (mindestens einen Meter) rückwärts von E mißt. Man erhält also

$$\text{I.}\quad Q = \tfrac{2}{3}\,\mu b \sqrt{2g}\left\{\left(H + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Nimmt man ferner an, daß die Geschwindigkeit c des zufließenden Wassers entweder klein genug ist, um vernachlässigt werden zu können, oder daß deren Einfluß durch den entsprechend bestimmten Ausflußcoefficienten μ corrigirt werden kann, so ergiebt sich die Formel:

$$\text{II.}\quad Q = \tfrac{2}{3}\,\mu b H \sqrt{2gH}.$$

Anmerkung. Außer den vorstehenden beiden Formeln, wovon die letztere gewöhnlich die Dubuat'sche[2]) genannt wird, hat man auch noch die I. §. 95: $Q = \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2g}\left\{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right\}$, wo $h = \overline{CD}$, Fig. 128, so wie II. §. 95: $Q = \mu b\,(H - h)\sqrt{2g\left(\frac{H+h}{2}\right)}$ und endlich eine von Navier[3]) vorgeschlagene $Q = 2{,}561\,.\,\mu\,.\,bH^{\frac{3}{2}}$ (für Metermaaße) in Anwendung gebracht, wovon jedoch keine, den Versuchen gegenüber, so wenig abweichende Resultate als die II. liefert, weshalb dieselbe, natürlich auch mit Rücksicht auf ihre Einfachheit, gegenwärtig fast ausschließlich angewandt wird.

Wir benutzen jedoch diese Gelegenheit, um auf die höchst interessante Art der Herleitung der Navier'schen Formel (mittelst

[1]) Man beachte deshalb noch besonders S. 201, Note 1.

[2]) Principes d'hydraulique, Tome I, §. 142. (Ausgabe von 1816.)

[3]) Dessen Ausgabe von Bélidor's Architecture hydraulique, S. 299, Note (*cm*).

des sogenannten Principes der kleinsten Wirkung) aufmerksam zu machen.

Ersetzt man in der Gleichung (1) S. 243 h durch x, so ergiebt sich die mittlere Geschwindigkeit zu $\frac{2}{3}\,\frac{H^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{H-x}\sqrt{2g}$, die Wassermenge zu $\frac{2}{3}\,\mu b\sqrt{2g}\left\{H^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right\}$ und daher die dem abfließenden Wasser innewohnende lebendige Kraft, wenn sonst die früheren Bezeichnungen beibehalten werden, zu:

$$\tfrac{1}{2}\,Mv^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{\gamma}{g}\,.\,\tfrac{8}{27}\,.\,\mu b\sqrt{(2g)^3}\,.\,\frac{[H^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}]^3}{(H-x)^2}\,.$$

Die Summe der lebendigen Kräfte der Flüssigkeitstheilchen, welche durch den Querschnitt ED, Fig. 128, gehen, ist daher der Function proportional:

$$\frac{(H^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}})^3}{(H-x)^2}\,.$$

Die erste Abgeleitete dieses Werthes Null gesetzt, liefert ohne Weiteres die Gleichung:

$$5x^{\frac{3}{2}} - 9Hx^{\frac{1}{2}} + 4H^{\frac{3}{2}} = 0,$$

woraus $x = 0{,}2753\,.\,H$ folgt, d. h. die Dicke DE des über die Kante E strömenden Strahles wäre 0,7247 oder etwas über $\frac{7}{10}$ der Druckhöhe. Ferner ist $Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left\{H^{\frac{3}{2}}-(0{,}2753H)^{\frac{3}{2}}\right\}$ u. s. w.

So viel Wahrscheinlichkeit auch die Hypothese für sich hat, welche letzterer Rechnung zu Grunde liegt, so stimmt sie doch eben so wenig mit der Erfahrung, wie andere von Scheffler[1]) und Braschmann[2]) versuchte Modificationen derselben. Der hierbei besonders wichtige Gegenstand, die Strahldicke über der Abflußkante, wird in den nachfolgenden Paragraphen weiter erörtert und sind es Versuche von Lesbros[3]) und theoretische Betrachtungen von Boileau[4]) und Braschmann, welche, mit Bezug auf geeignete Experimente, hierüber einigen Aufschluß geben.

§. 112.

Practisch brauchbare Versuche über den Ausfluß bei Ueberfällen sind namentlich angestellt worden von Dubuat[5]), Eytelwein[6]), Bidone[7]), Poncelet und Lesbros[8]), Castel[9]) und

---

[1]) Die Principien der Hydrostatik und Hydraulik, §. 92.

[2]) Schweizerische Polytechn. Zeitschr. Bd. 9 (1864), S. 1—12.

[3]) Expériences Nr. 167. Paris 1851.

[4]) Traité de la mesure des eaux courantes. Paris 1854, Pg. 78 etc.

[5]) Principes d'hydraulique, Nr. 412.

[6]) Handbuch der Mechanik und Hydraulik, §. 104 und S. 201 gegenwärtigen Buches.

[7]) Turiner Memoiren, Bd. 28 und hieraus Weisbach in Hülse's Maschinenencyclopädie, Bd. 1, S. 480.

[8]) Expériences (von 1828), Nr. 110.

[9]) d'Aubuisson, Hydraulique, Nr. 72.

Lesbros[1]), ferner von Boileau[2]), Weisbach[3]), Francis[4]) und Bornemann[5]).

I. Versuche von Lesbros.

Aus den von Lesbros allein (in den Jahren 1829—1834) angestellten Versuchen wurden für vollkommene Ueberfälle (auszugsweise) nachstehende zwei Tabellen entlehnt.

Tabelle[6])

der Ausflußcoefficienten $= \frac{2}{3}\mu$ der Formel $bH\sqrt{2gH}$ für Ueberfälle von $0^m,2$ Breite, mündend in die freie Luft.

(Die Druckhöhen sind gehörig entfernt von der Ueberlaßschwelle gemessen.)

Druckhöhen über der Basis der Abflußkante	Behälter und Ueberfall im Grund und Aufriß entsprechen der Anordnung Fig. 102:									
	A, a	*A, b*	*A, c*	*B, a*	*B, d*	*B, e*	*A, d*	*A, e*	*A, f*	*A, g*
Meter										
0,010	0,424	0,431	0,436	0,384	0,362	0,292	0,457	0,457	0,492	0,446
0,015	0,421	0,427	0,432	0,394	0,371	0,305	0,450	0,450	0,481	0,441
0,020	0,417	0,424	0,428	0,402	0,379	0,318	0,446	0,444	0,473	0,437
0,030	0,412	0,418	0,422	0,410	0,388	0,337	0,437	0,435	0,459	0,430
0,040	0,407	0,413	0,416	0,411	0,394	0,352	0,430	0,429	0,449	0,424
0,050	0,404	0,408	0,411	0,411	0,398	0,362	0,425	0,426	0,442	0,419
0,060	0,401	0,405	0,407	0,410	0,400	0,370	0,420	0,424	0,437	0,416
0,070	0,398	0,403	0,405	0,409	0,402	0,375	0,416	0,422	0,435	0,412
0,080	0,397	0,401	0,402	0,409	0,403	0,379	0,413	0,421	0,434	0,409
0,090	0,396	0,399	0,400	0,409	0,404	0,380	0,411	0,421	0,434	0,407
0,100	0,395	0,398	0,399	0,408	0,405	0,382	0,409	0,420	0,434	0,405
0,120	0,394	0,396	0,396	0,408	0,406	0,383	0,407	0,420	0,434	0,403
0,140	0,398	0,395	0,395	0,408	0,407	0,383	0,407	0,422	0,434	0,403
0,160	0,393	0,394	0,394	0,407	0,407	0,384	0,405	0,424	0,433	0,403
0,180	0,392	0,393	0,393	0,406	0,408	0,383	0,404	0,424	0,432	0,403
0,200	0,390	0,391	0,391	0,405	0,408	0,383	0,402	0,424	0,432	0,403
0,250	0,379	0,383	0,383	0,404	0,407	0,381	0,396	0,422	0,428	0,401
0,300	0,371	0,375	0,375	0,403	0,406	0,378	0,390	0,418	0,424	0,398

[1]) Expériences (von 1829—1834), Nr. 281 etc.

[2]) a. a. O., Pg. 40 etc.

[3]) Ing.-Mechanik, Bd. 1. Erste Auflage (1845), S. 419. Fünfte vom Professor Herrmann besorgte Auflage, S. 992.

[4]) Lowell, Hydraulic Experiments. Boston 1855, Pg. 70 unter der Ueberschrift: „Experiments on the flow of water over weirs".

[5]) Die Zeitschrift „Der Civil-Ingenieur", Bd. 16, Jahrg. 1870, S. 291 und Bd. 22, Jahrg. 1876, S. 89.

[6]) Expériences, Pag. 484.

Tabelle[1])

der Ausflußcoefficienten $= \frac{2}{3}\mu$ der Formel $bH\sqrt{2gH}$ für Ueberfälle von $0^m,2$ Breite außerhalb mit offenen, rectangulären Gerinnen von gleicher Breite versehen.

(Die Druckhöhen sind gehörig entfernt von der Ueberlaßschwelle gemessen.)

Druckhöhen über der Basis der Abflußkante	Behälter und Ueberfall entsprechen in Grund- und Aufriß der Anordnung Fig. 103:							
	C, k	D, k	D, m	D, n	C, m	C, n	D, p	C, E, n [2])
Meter								
0,010	—	—	—	—	0,382	0,395	—	0,406
0,015	—	—	—	—	0,375	0,388	—	0,400
0,020	0,196	0,208	0,201	0,175	0,368	0,383	0,190	0,395
0,030	0,234	0,232	0,228	0,205	0,358	0,373	0,222	0,385
0,040	0,263	0,251	0,250	0,234	0,351	0,365	0,250	0,379
0,050	0,278	0,268	0,267	0,260	0,346	0,360	0,272	0,375
0,060	0,286	0,281	0,280	0,276	0,344	0,355	0,286	0,372
0,070	0,292	0,288	0,289	0,285	0,343	0,352	0,296	0,371
0,080	0,297	0,294	0,295	0,291	0,341	0,349	0,304	0,371
0,090	0,301	0,298	0,300	0,295	0,340	0,347	0,309	0,370
0,100	0,304	0,302	0,304	0,299	0,340	0,345	0,313	0,369
0,120	0,309	0,308	0,310	0,306	0,338	0,343	0,320	0,369
0,140	0,313	0,312	0,314	0,311	0,336	0,341	0,325	0,368
0,160	0,316	0,316	0,317	0,315	0,334	0,340	0,329	0,367
0,180	0,317	0,319	0,319	0,319	0,333	0,339	0,333	0,367
0,200	0,319	0,323	0,322	0,322	0,331	0,338	0,335	0,366
0,250	0,321	0,329	0,326	0,329	0,328	0,336	0,341	0,364
0,300	0,324	0,332	0,329	0,332	0,326	0,334	0,345	0,361

Beim Gebrauche vorstehender Tabellen hat man wohl in's Auge zu fassen, daß Lesbros Versuchen[3]) gemäß zwei Classen von Ueberfällen zu unterscheiden sind, je nachdem die Breite der Abflußkante b derselben kleiner oder größer wie $\frac{1}{10}$ der Breite B des Wasserzuführcanales ist.

Erste Classe von Ueberfällen, wenn $b < \frac{1}{10}B$, jedoch $b > 0^m,08$ ist. Hierbei sind die Ausflußcoefficienten von den Breiten b und B und deren Verhältnissen ganz unabhäng und ergeben sich entweder unmittelbar aus Columne I. der ersten vorstehenden Tabelle, welche der Anordnung A, a, Fig. 102, entspricht, oder man leitet sie durch Interpolation aus der Columne derselben Tabelle ab, welche zur Anordnung B, a, Fig. 102, gehört, je nachdem die Entfernung der Ueberfallskante von dem Boden des Zuflußbehälters größer oder kleiner wie $0^m,54$ ist.

Zweite Classe von Ueberfällen, wenn $b > \frac{1}{10}B$ ist. In diesem Falle hat man die den jedesmaligen Werthen von $\frac{b}{B}$

---

[1]) Expériences, Pag. 488.

[2]) Behälter wie bei C, dagegen E ein Gerinne bezeichnet, welches bei $2^m,5$ Länge eine Neigung von $\frac{1}{10}$ gegen den Horizont hat.

[3]) Lesbros a. a. O., Nr. 306, Pag. 245.

entsprechenden Ausflußcoefficienten aus der Columne jener Tabelle schätzungsweise zu entnehmen, welche den Anordnungen *Ac*, *Ae* und *Af*, Fig. 102, entsprechen, sobald der Abstand der Abflußkante vom Canalboden gleich oder größer ist wie $0^m,54$. Ist jedoch letztgedachter Abstand kleiner wie $0^m,54$, so sind die Coefficienten aus denen herzuleiten, welche der Anordnung *Be* verglichen mit *Ae*, Fig. 102, angehören[1]).

Zur Beurtheilung des Einflusses der Wanddicke der Ueberfallskante bei Ueberfällen hat Lesbros ebenfalls Versuche angestellt, und zwar mit einer Mündung, wobei die horizontale Basis und die verticalen Seiten gleichmäßig $0^m,05$ Dicke hatten, ferner die Abflußkante eine Breite $b = 0^m,60$ und der Zuflußcanal die Breite $B = 3^m,68$ besaß, die Abflußkante $0^m,54$ vom Canalboden abstand, der Strahl unmittelbar in die freie Luft strömte und die sonstigen Anordnungen der von *A*, *a*, Fig. 102, gleich kamen.

Die betreffenden Werthe $\frac{2}{3}\mu$ des Ausflußcoefficienten der Formel $Q = bH\sqrt{2gH}$ enthält folgende Tabelle:[2])

Druckhöhe $= H$ (weit von der Uebergangskante gemessen)	$0^m,01$	$0^m,02$	$0^m,03$	$0^m,04$	$0^m,05$	$0^m,06$	$0^m,07$	$0^m,08$	$0^m,09$	$0^m,10$	$0^m,12$	$0^m,14$	$0^m,16$
$\frac{2}{3}\mu$	0,424	0,421	0,418	0,416	0,414	0,412	0,410	0,409	0,407	0,406	0,403	0,401	0,399
H	$0^m,18$	$0^m,20$	$0^m,25$	$0^m,30$	$0^m,35$	$0^m,40$	$0^m,45$	$0^m,50$	$0^m,60$	$0^m,70$	$0^m,80$	$0^m,90$	$1^m,00$
$\frac{2}{3}\mu$	0,397	0,395	0,392	0,391	0,391	0,391	0,391	0,391	0,390	0,390	0,390	0,389	0,389

II. Versuche und Formeln von Weisbach.

Obwohl die Versuche von Castel und d'Aubuisson (S. 204) lehrten, daß die Abflußmengen bei Ueberfällen, unter sonst gleichen Umständen, mit dem Verhältnisse zwischen der Breite des Ueberfalles und des Wasserzuführcanales wachsen und daß demnach die Wasserquanta am größten sind, wenn der Ueberfall die ganze Breite des Canales einnimmt[3]); so war es doch erst Weisbach, dem es gelang, aus seinen im Jahre 1842 begonnenen Versuchen,

---

[1]) Diese unsichere, umständliche Bestimmungsweise der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle der zweiten Classe wird durch die Versuche Weisbach's über unvollkommene Contraction völlig beseitigt.

[2]) a. a. O. Nr. 322, Pag. 487.

[3]) Nach jenen Versuchen sind unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen bei den relativen Breiten

$\frac{b}{B} =$	1,00	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,25
Die Ausflußcoeffic. μ	0,664	0,657	0,646	0,635	0,624	0,615	0,608	0,599	0,596

auch für den Ausfluß durch Ueberfälle, das Gesetz der unvollkommenen Contraction (S. 205 und S. 221) nachzuweisen.

Allerdings läßt sich der Einfluß der Geschwindigkeit c (§. 111), womit sich das Wasser im Zuflußcanale ersetzt, durch die (ebenfalls zuerst von Weisbach aufgestellte) [1] Gleichung

$$Q = \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2g} \left\{ \left(H + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

in Rechnung ziehen, da offenbar $c = \frac{Q}{B \cdot T}$ ist, wenn B (wie vorher) die Breite des gedachten Canales und T die Wassertiefe desselben stromaufwärts gemessen ist, bevor sich der Wasserspiegel (in der Fig. 128 dargestellten Weise) gesenkt hat; allein die betreffenden Rechnungen sind doch nicht direct zu führen, abgesehen davon, daß damit das erwähnte Gesetz noch nicht hinlänglich ausgedrückt wurde.

Aus desfalligen im Anfange der vierziger Jahre von Weisbach begonnenen Versuchen mit Ueberfällen in dünner Wand bei 20 Centimeter Weite in einem Gerinne von 36 Centimeter Weite, fand dieser fruchtbare und zuverlässige Experimentator: [2])

$$\text{I.}\quad Q_1 = \mu_0 \left\{1 + 1{,}718 \left(\frac{bH}{BT}\right)^2\right\} bH\sqrt{2gH}, \text{ wenn } b < B \text{ und}$$

$$\text{II.}\quad Q_2 = \mu_0 \left\{1{,}041 + 0{,}3693 \left(\frac{H}{T}\right)^2\right\} bH\sqrt{2gH}, \text{ wenn } b = B \text{ ist.}$$

Die Ausflußcoefficienten $\mu_0 = \frac{2}{3}\mu$ sind hierzu den Poncelet-Lesbros'schen Versuchen (bei sogenannten Poncelet-Ueberfällen), also den betreffenden Tabellen S. 297 und S. 298, zu entnehmen.

Für beide Formeln, wenn man sie beziehungsweise durch $Q_1 = m_1 bH\sqrt{2gH}$ und $Q_2 = m_2 bH\sqrt{2gH}$ ersetzt, berechnete Weisbach folgende Tabelle: [3])

$\frac{bH}{BT}$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
$\frac{m_1}{\mu_0}$	1,000	1,000	1,001	1,003	1,007	1,014	1,026	1,044	1,070	1,107	
$\frac{H}{T}$	0,00	0,05	0,01	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{m_2}{\mu_0}$	1,041	1,042	1,045	1,049	1,056	1,064	1,074	1,086	1,100	1,116	1,133

---

[1]) Zuerst nachgewiesen in Hülse's Maschinenencyclopädie, Bd. 1 (1841), S. 490 mit der Bemerkung, daß die betreffende Formel in Nr. 79 der d'Aubuisson-schen Hydraulik (Zweite Auflage) $Q = \frac{2}{3}\mu bH\sqrt{H + 0{,}115\, c^2}$, wo c die Geschwindigkeit des zufließenden Wassers bezeichnet, nicht richtig ist.

[2]) Die Experimental-Hydraulik. Freiberg 1855, S. 130 und 131.

[3]) Weisbach, Ing.-Mechanik. Bd. 1, S. 993. Fünfte Auflage.

Für μ_0 läßt sich (nach den angegebenen Tabellen der Poncelet-Lesbros'schen Versuche) setzen:

$\mu_0 =$	0,412	0,407	0,401	0,397	0,395	0,393	0,390
Wenn H in Metern =	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20

Gegen die allgemeine Anwendbarkeit dieser Weisbach'schen Formeln sind wiederholt Bedenken erhoben worden, meist dahin gehend, daß ihre Resultate Versuchen mit verhältnißmäßig zu geringen Ueberfallsbreiten (im Maximum bis zu $b = 0^m,40$) entlehnt sind und daß sie überdies der Poncelet'schen Ausflußcoefficienten bedürfen, die mit Ueberfällen von zu geringer Breite $b = 0^m,20$ gewonnen wurden.

An einer Stelle[1]) wird deshalb gerathen, bei sehr breiten Ueberlaßschwellen, z. B. von $b = 3^m,6$ Breite, den Ueberfall in zwei Theile zerlegt zu denken, nämlich bestehend aus einem (sogenannten) Poncelet-Ueberfall von $0^m,20$ Breite, der aus den beiden Randstücken zusammengeschoben wurde, und aus einem Ueberfalle über die ganze Wand von 3,60 — 0,20 = 3,40 Breite etc. Diesem Rathe dürfte jedenfalls beizustimmen sein.

III. Versuche und Formeln von Boileau[2]).

Die so eben erwähnten Bedenken gegen die Weisbach'schen Formeln zur Berechnung von Ausflußmengen durch Ueberfälle, veranlaßten auch Boileau, die bereits S. 206 erwähnten Versuche mit solchen Oeffnungen anzustellen, deren Abflußkante über die ganze Breite des Zuführcanales reichte (wo also $B = b$ war) und wobei die absolute Größe von $0^m,288$ bis $1^m,616$ betrug.

Entsprechend diesen Versuchen hält es Boileau, abweichend von allen andern Experimentatoren, für erforderlich, in die zur Berechnung der Wassermenge über die (zugeschärften) Schwellen gedachter Ueberfälle, das sogenannte Oberflächen-Gefälle $H - e = DC$, Fig. 128, wenn die Strahldicke über der Abflußkante E, d. i. $\overline{ED} = e$ gesetzt wird, in die Formel aufzunehmen, so wie auch die Höhe der Abflußkante E über den Boden M des Zuführcanales (welche Höhe er mit S bezeichnet) zu berücksichtigen.

Weiter räth Boileau, zur Berechnung der secundlichen Wassermenge Q die Gleichung I, §. 81 (für den Fall, daß $P = p$) zu verwenden und daher, weil (mit Bezug auf die Bezeichnungen in vorstehenden Paragraphen) $h = H - e$, $a = b \cdot H$ und $A = b (H + S)$ ist, zu schreiben:

---

[1]) Brückmann im Polytechn. Centralblatt, Jahrg. 1849, S. 1030 und S. 1037.

[2]) Zuerst veröffentlicht und besprochen im Pariser Journal de l'école polytechnique, 33e Cahier, Tome XIX (1850), Pg. 129—234.

$$Q = bH \sqrt{\frac{2g(H-e)}{1-\left(\frac{H}{H+S}\right)^2}}.$$

Diesen Werth aber gleich zu setzen:

$$Q = \mu b H \sqrt{2gH},$$

so daß sich μ aus der Gleichung berechnen läßt:

$$\mu = \sqrt{\frac{\left(1-\frac{S}{H}\right)}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{S}{H}\right)^2}}}.$$

Bezeichnet man hiernach, wie Boileau, $\frac{e}{H}$ mit k, so folgt:

$$\text{I.} \quad \mu = \frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+\frac{S}{H}}\right)^2}} \text{ und somit}$$

$$\text{II.} \quad Q = \frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+\frac{S}{H}}\right)^2}}\, bH\sqrt{2gH}, \text{ wie Boileau a. a. O.}^{1)}$$

Um wenigstens für einen Fall den Grad der Uebereinstimmung der Formel I. mit den Versuchen Boileau's beurtheilen zu können, mag hier folgende Tabelle Platz finden[2]), welche sich auf 13 Versuche des Genannten bei einem vollkommenen Ueberfall bezieht, wobei $S = 1^m,109$ und $b = 0^m,291$ für die Versuche Nr. 1, 4, 5, 6 und 8, dagegen für die übrigen Versuche $b = 0^m,288$ war.

Tabelle aus Boileau'schen Versuchen zusammengestellt.

Versuchs-Nr.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
In Millimetern	H	45,7	65,0	82,0	89,5	134,0	167,0	176,0	182,0	208,0	239,0	268,0	285,0	375,0
	e	38,0	54,0	68,5	75,0	113,4	140,0	149,0	154,0	176,0	202,0	227,0	241,0	320,0
$\mu =$	Versuch	0,4061	0,4050	0,4069	0,4085	0,4125	0,4125	0,4147	0,4179	0,4132	0,4218	0,4262	0,4248	0,4242
	Rechnung	0,4107	0,4119	0,4068	0,4036	0,3943	0,4056	0,3953	0,3963	0,3971	0,3997	0,3988	0,4113	0,3959

[1]) Pg. 182 im Journal de l'école polytechnique, Cahier 33 (1850) und Pg. 87 des Separatwerkes „Traité de la mesure des eaux courantes" vom Jahre 1854. Auch Bornemann im Civil-Ing., Bd. 2 (1856), S. 73 ff.

[2]) Tableau Nr. XVI, Pg. 90 des Separatwerkes.

Auf noch andere, mehr oder weniger werthvolle practische Erörterungen und Versuche Boileau's, Messungen der Druckhöhen H, der Strahldicke e und Ermittlung von Ausflußcoefficienten, kommen wir später mehrmals zurück. Hier werde jedoch noch Folgendes beigefügt: Bei Ueberfällen, deren scharfe Abflußkanten schief gegen die Stromrichtung gestellt sind, fand Boileau die Ausflußmenge 0,942 und 0,911 von derjenigen des Normalüberfalles, wenn der Winkel, den die Abflußkante mit dem Gerinnboden bildet, beziehungsweise 45° und 26° 35' ist. Bei Ueberfällen, die aus zwei geraden, unter 45° an die Seitenwände stoßenden Flügeln bestehen, deren gemeinschaftliche Kante durch einen Viertelkreis abgerundet und deren Schwelle abgeschrägt ist, berechnet man die Ausflußmenge wie bei schiefen Ueberfällen und führt als Breite die Summe der beiden geraden Flügel, vermehrt um die halbe Sehne des Abrundungsbogens, ein. Bei einem nach dem Oberwasser zu geneigten Ueberfalle mit scharfer Kante, dessen verticale Höhe sich zu seiner Basis wie 3 : 1 verhält, beträgt die Ausflußmenge 0,973 der unter gleichen Verhältnissen über einen senkrechten Ueberfall abfließenden Wassermenge. Ueberfälle mit ebener Schwelle von 95 Millimeter Dicke geben bei freiem Strahl 0,982 und bei gestörtem Strahl 0,993 der Ausflußmenge des Normaltypus. Ist die Schwelle eben so stark, aber im Halbkreis abgerundet, so beträgt die Ausflußmenge 22 Procent mehr als bei scharfer Kante und ist das Ueberfallsbrett außerdem im Verhältniß 3:1 geneigt, so fließt nur $\frac{1}{2}$ Procent weniger aus als bei normalem Stande.

Der Verfasser räth, sowohl das Capitel der Ueberfälle letzterer Art im 2. Buche, 2. Abschnitt, §. I bis §. VI im Boileau'schen Hauptwerke, als auch den folgenden §. VII in betreffenden Fällen zu studiren, indem letzterer Paragraph wichtige Versuche enthält, welche den Einlauf des Wassers bei Kropfrädern mit Ueberfallschützen betreffen.

IV. Versuche von Castel und Formel von Redtenbacher.

Nach Weisbach's Vorgange hat Redtenbacher sich bemüht, die S. 204 und S. 205 erörterten Versuche Castel's zur Aufstellung eines (wenigstens theilweise auf das Gesetz der vollkommenen Contraction basirten) Ausdruckes für die secundliche Wassermenge Q zu benutzen[1]) und ist dabei (unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen) zu folgender Gleichung gelangt:

$$Q = \left(0,381 + 0,062\,\frac{b}{B}\right) bH\sqrt{2gH}.$$

Für $b = B$ wird letztere Formel zu:

$$Q = 0,443\,bH\sqrt{2gH}.$$

[1]) In Redtenbacher's „Theorie und Bau der Wasserräder", Mannheim 1846, findet sich der betreffende Werth von Q noch nicht, wohl aber in der ersten Auflage der 1848 erschienenen „Resultate für den Maschinenbau", also viel später, als Weisbach das Gesetz der unvollkommenen Contraction aufgestellt hatte.

Redtenbacher hebt ausdrücklich hervor, daß zur Benutzung dieser Formeln der Ueberfall folgende Eigenschaften haben muß, um diese Gleichung zur Berechnung der pro Secunde in Cubikmetern über eine scharfe Kante abfließenden Wassermenge Q benutzen zu können:

1) Muß der Querschnitt des Wasserkörpers im Zuflußcanale $(B \,.\, T)$ 5 Mal größer als der Querschnitt $b \,.\, H$ sein.

2) Muß die Breite b des Ueberfalles wenigstens den dritten Theil von der Canalbreite B betragen.

3) Muß der Ueberfall mit einer horizontalen und scharfen Kante versehen sein.

4) Muß sich die Kante des Ueberfalles wenigstens in einer Höhe $2H$ über dem Spiegel des Unterwassers befinden.

Diese Redtenbacher'sche Formel hat den Vortheil, daß sie nicht von den Coefficienten der Poncelet-Lesbros'schen Mündungen abhängt, die außerdem nur Versuchen entsprechen, welche mit Ueberfällen von $0^m,20$ Breite angestellt wurden.

V. Versuche und Formeln von Francis.

Dem amerikanischen Civilingenieur Francis genügten bei Wassermessungen zur Ermittlung des Güteverhältnisses von ihm ausgeführter Turbinen[1]), sämmtliche in Vorstehendem mitgetheilten und erörterten Formeln besonders deshalb nicht, weil sich die Bestimmung der erforderlichen Ausflußcoefficienten auf Versuche mit (für seine Verhältnisse) zu schmalen Ueberfällen stützt[2]). Francis bedurfte für seine Zwecke Ueberfälle von $b = 9{,}9997$ Fuß engl. (rund 10 Fuß) oder von 3,05 Meter, wobei der Zuflußcanal die Breite $B = 13{,}96$ Fuß engl. oder $= 4{,}36$ Meter hatte und die Höhe der Ueberfälle (also S der Boileau'schen Formel) 2,014 Fuß engl. und 5,048 Fuß engl. betrug.

Francis' Beobachtungen und Messungen erstreckten sich auf Ueberfälle in dünner Wand und Contraction auf allen 3 Seiten, dann mit Ueberfällen über die ganze Wand und endlich mit einem wehrförmigen Ueberfalle. In den ersten beiden Fällen bildete die Ueberfallskante eine stromabwärts abgeschrägte eiserne Platte.

Das über die Versuchsüberfälle geflossene Wasser wurde in einer genau cubicirten und gehörig dichten Schleusenkammer (als Aichbassin) gemessen und dabei alle erdenklichen Mittel in Anwendung gebracht, welche ein sicheres und zuverlässiges Messen

[1]) Lowell, Hydraulic Experiments etc. Boston 1855, von S. 70 ab unter der Ueberschrift „Experiments on the flow of water over weirs, and in short rectangular canals". Auszugsweise (von Bornemann) mitgetheilt im 2. Bande (1854), S. 163 des Civilingenieurs.

[2]) Die colossalen Wassermassen des Merrimackstromes (circa 3600 Cubikfuß pro Secunde und einer Wasserkraft von fast 9000 Maschinenpferden entsprechend) verlangten eine Vertheilung zum Betriebe verschiedener Fabriken in Lowell (Massachusetts), womit man Francis beauftragt hatte.

und Beobachten (Meßstäbe mit Spitzen zum Einstellen, Chronometer, electrische Telegraphen etc.) erfordert.

Von der Weisbach'schen Gleichung S. 295 ausgehend, gelangte Francis, durch allerlei geschickte Wendungen (worüber in den vorher notirten Quellen ausführlich berichtet wird), zu der (empirischen) Formel für die secundliche, in englischen Cubikfußen ausgedrückte Wassermenge Q:

$$(1) \quad Q = 3{,}33\ [b - 0{,}1\ .\ nH]\, H^{\frac{3}{2}},$$

worin n die Zahl der Seitencontractionen (also bei Poncelet-Ueberfällen $= 2$) ist.

Beiläufig erwähnt, gelangte Francis zu dieser Formel durch die Betrachtung, daß es ihm unrichtig erschien, die Ausflußmenge, wie es die Dubuat'sche Formel §. 111, S. 295 $Q = \frac{2}{3}\mu \sqrt{2g}\ .\ bH^{\frac{3}{2}}$ voraussetzt, der Breite b direct proportional anzunehmen, da ja durch die Seitencontraction eine Verminderung der Strahlbreite verursacht wird etc.

Offenbar ist Francis Formel schon deshalb für eine allgemeine Anwendung nicht brauchbar, weil sie für $b = 0{,}1\ .\ nH$ die Wassermenge $Q =$ Null giebt.

Für die über die ganze Canalbreite reichenden Ueberfälle, wo $n =$ Null ist, ergiebt sich aus (1):

$$(2) \quad Q = 3{,}33\, bH^{\frac{3}{2}} \text{ (Cubikfuß engl.).}$$

Endlich fand Francis noch für wehrartige Ueberfälle (gewissermaßen ein Modell[1]) des 900 Fuß breiten und 24 Fuß hohen hölzernen Wehres im Merrimackstrome bei Lawrence)

$$(3) \quad Q = 3{,}01208\, bH^{1{,}53} \text{ (Cubikfuß engl.).}$$

Mit der Weisbach'schen Formel stimmt die Francis-Formel Nr. 1 nur dann gut überein (weil diese von dem Coefficienten der Poncelet-Ueberfälle abhängt), wenn man, wie bereits S. 301, Note 1 erörtert wurde, für sehr breite Ueberfälle annimmt, derselbe sei zusammengesetzt aus einem Poncelet-Ueberfalle von 0,20 Meter Breite und einem Ueberfalle über die ganze Wand[2]). Francis vergleicht die Resultate seiner Formeln mit denen, welche man bei Benutzung der Formeln von Lesbros, Castel und Boileau erhält. Die Resultate sind bei ersteren Beiden als zufriedenstellend zu bezeichnen, bei Boileau nicht[3]).

VI. Formeln von Braschmann.

Professor Braschmann in Moskau[4]) wandte nach dem Vorgange Navier's, §. 111, S. 296, zur Bestimmung des über

---

[1]) Schöne Abbildungen dieses Modellwehres finden sich bei Francis auf Pg. XIV, Fig. 11 und 12.

[2]) Bornemann im Civil-Ingenieur, Bd. 2 (1854), S. 168 ff.

[3]) Francis, Hydraulic Experiments, Pg. 128, 130 und 132.

[4]) Ein Auszug aus der betreffenden Braschmann'schen Abhandlung wurde bereits am 16. Decbr. 1861 in den Comptes rendus der Pariser Academie der

einen Ueberfall fließenden Wasserquantums und der dabei stattfindenden Senkung des Flüssigkeitsspiegels über der Abflußkante, ebenfalls das Princip der kleinsten Wirkung an, wobei er jedoch nicht, wie Navier, die mechanische Wirkung des ausfließenden Wassers in Bezug auf eine mittlere Geschwindigkeit nimmt, sondern die Summe der lebendigen Kräfte aller Elemente in Rechnung zieht. Ferner setzt Braschmann, nach dem Princip der kleinsten Wirkung, nicht das Differenzial dieser mechanischen Wirkung, sondern die Summe aus den Differenzialen der lebendigen Kräfte und der Summe aller statischen Momente gleich Null.

Auf diesem Wege findet Braschmann, daß der Coefficient, womit man den Ausdruck $bH\sqrt{2gH}$ zu multipliciren hat, um die wirkliche Ausflußmenge zu erhalten, eine Function der relativen Ueberfallsbreite ist. Da aber dieser Coefficient auch noch von der Druckhöhe des Ueberfalls abhängt, was die bemerkte mathematische Entwicklung nicht zeigt, so setzt Braschmann empirisch, für den Coefficienten μ den Ausdruck:

$$\mu = \alpha + \beta \frac{b}{B} + \frac{\gamma}{H}, \text{ folglich}$$

$$Q = \left(\alpha + \beta \frac{b}{B} + \frac{\gamma}{H}\right) bH\sqrt{2gH}.$$

Die Constanten α, β und γ dieser Formel bestimmte Braschmann aus 47 Castel'schen, von Lesbros corrigirten Versuchen, und zwar fand er:

$$\alpha = 0{,}3838316;\ \beta = 0{,}0386361 \text{ und } \gamma = 0{,}000534118.$$

Hiernach läßt sich aber setzen:

$$(1)\quad Q = \left[0{,}3838 + 0{,}0386 \frac{b}{B} + \frac{0{,}00053}{H}\right] bH\sqrt{2gH}.$$

Für Ueberfälle über die ganze Wand wird $b = B$, daher:

$$(2)\quad Q = \left[0{,}4224 + \frac{0{,}00053}{H}\right] bH\sqrt{2gH}, \text{ oder allgemein:}$$

$$(3)\quad Q = \mu_1 bH\sqrt{2gH}.$$

Diese Formeln sollen nun alle vollkommenen Ueberfälle in dünner Wand oder mit stromabwärts abgeschrägter Kante umfassen, sobald die Seitenwände senkrecht zur Ueberfallsebene

---

Wissenschaften veröffentlicht, während die vollständige Abhandlung 1862 in Moskau unter dem Titel erschien: „Sur l'application du principe de moindre action à la détermination du volume de fluide qui s'écoule d'un déversoir, par N. Braschmann". — Quellen in deutscher Sprache, worin über die Braschmann'sche Formel berichtet wird, sind folgende: Stüßi (Ein Auszug etc.) im Civilingenieur, Bd. 9 (1863), S. 450. — Derselbe in der Schweizerischen polytechnischen Zeitschrift, Bd. 9 (1864). Nach einer gekrönten Preisschrift. — Studt, „Der Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle". Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen. Jahrg. 1867, S. 32.

stehen und deren absolute Breite nicht sehr klein (nicht unter 0,08 Meter) ist, ferner sollen sie für alle Druckhöhen und Ueberfallshöhen über 0,10 Meter, mit einer Genauigkeit gelten, die für die Praxis hinreichend ist.

Offenbar haben die Braschmann'schen Formeln die gute Eigenschaft, daß sie bei Einführung der Druckhöhe und dem Breitenverhältnisse den Hauptvorwurf vermeiden, welchen man den Weisbach'schen Formeln macht, daß sie zur Correction Coefficienten erfordern, die nur für bestimmte (und verhältnißmäßig geringe) Dimensionen Geltung haben.

Bei Berechnungen von Q nach (3) kann man μ_1 aus folgender, von Studt[1]) entworfenen Tabelle entnehmen:

Relative Breite		Druckhöhe H in Metern							
		0,030	0,050	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600
$\frac{b}{B} = 0,1$	Werthe von μ_1	0,4057	0,3982	0,3931	0,3905	0,3896	0,3891	0,3888	0,3887
0,4		0,4172	0,4098	0,4046	0,4020	0,4011	0,4006	0,4003	0,4002
0,6		0,4250	0,4176	0,4123	0,4097	0,4088	0,4083	0,4080	0,4079
0,8		0,4327	0,4253	0,4200	0,4174	0,4166	0,4160	0,4157	0,4156
1,0		0,4404	0,4330	0,4277	0,4251	0,4242	0,4237	0,4234	0,4233

Um die Resultate der drei beachtenswerthesten Formeln, nämlich der von Weisbach, Francis und Braschmann, einigermaßen vergleichen zu können, wurden den betreffenden Abhandlungen von Bornemann und Studt nachstehende Tabellen entlehnt, die jedoch der Verfasser durch die Berechnung von Q nach Braschmann ergänzte.

Vorausgesetzt wird in beiden Fällen eine scharfe Ueberfallskante, wobei im ersten Falle $B = 13{,}96$ Fuß englisch $= 4{,}256$ Meter, $b = 9{,}997$ Fuß englisch $= 3{,}049$ Meter, im zweiten Falle $B = b = 9{,}992$ Fuß $= 3^m{,}046$ ist.

[1]) Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen. Jahrg. 1867, S. 48.

Tabelle I. Poncelet-Ueberfall.

Versuchsnummer im Francis'schen Werke Tabl. XIII, Pg. 124	Druckhöhe $= H$ in Millimetern	Ueberfallshöhe $= S$ in Millimetern	Beobachtete Wassermenge pro Secunde in Cubikfuß engl.	Berechnete secundliche Wassermenge $= Q$ nach			
				Weisbach in Cubikfuß engl.	Francis in Cubikfuß engl.	Braschmann Coefficient $= \mu_1$	Braschmann Cubikfuß engl.
Nr. 72—78	190	1723	16,215	15,199	16,235	0,4143	16,424
„ 79—84	198	810	17,443	16,176	17,451	0,4141	17,402
„ 56—61	243	1780	23,431	22,050	23,540	0,4136	22,940
„ 62—66	252	863	25,041	23,257	25,123	0,4135	24,953
„ 11—33	303	1840	32,580	30,754	32,711	0,4132	32,852
„ 36—43	320	930	36,002	33,434	36,148	0,4130	35,465
„ 5—10	380	1906	45,565	43,046	45,684	0,4127	46,066
„ 1—4	472	2000	62,602	59,697	62,615	0,4124	61,857

Tabelle II. Ueberfall über die ganze Wand.

Versuchsnummer	Druckhöhe	Ueberfallshöhe	Beobachtete Wassermenge	Weisbach	Francis	Braschmann Coefficient	Braschmann Cubikfuß
Nr. 67—71	424	1782	28,7905	22,936	23,719	0,4245	24,12
„ 44—50	298,6	1838	32,5616	31,417	32,457	0,4242	32,96
„ 51—55	305	1845	33,4946	32,460	33,536	0,4241	34,00

Entnimmt man aus dieser Tabelle, daß die Braschmann'sche Formel mit den von Francis gemessenen, so wie die mit seiner Formel berechneten Werthe, besser als die mittelst der Weisbach-schen Formel berechneten übereinstimmt, so darf man nicht vergessen, daß sich letztere auf die Versuche mit nur 0,20 Meter breiten Ueberfällen von Lesbros stützt, daher auch bessere Uebereinstimmung geliefert hätte, wenn man (wie bereits erwähnt) die

breiten Ueberfälle aus zweien bestehend annimmt, wovon der eine (Poncelet-Ueberfall) die normale Breite 0,20 Meter hat. In der That zeigt Bornemann (Civil-Ing., Bd. 2, S. 169), daß bei einem solchen Rechnungsgange die Resultate der Weisbach'schen Formeln in wünschenswerther Weise mit den Beobachtungen harmoniren. Als ein Hauptfehler der Braschmann'schen Formel ist jedenfalls der Umstand zu bezeichnen, daß sie die Höhe des Ueberfalles unberücksichtigt läßt.

VII. Versuche und Formeln von Bornemann.

Gelegentlich nachher zu besprechender Versuche über den Ausfluß des Wassers bei unvollkommenen Ueberfällen, oder, was dasselbe ist, wo die Ueberfallsmündungen unter Wasser gesetzt sind, fand Bornemann auch sehr passende Gelegenheit, Versuche mit vollkommenen (freien) Ueberfällen von einigermaßen größerer Breite vorzunehmen, indem $b = B = 1{,}13$ Meter war während die Druckhöhen von $H = 0{,}07$ Meter bis 0,21 Meter und $\frac{H}{T}$ von 0,20 bis 0,80 variirten.

Die Resultate dieser Versuche[1]) führten zur Berechnung der secundlichen Wassermenge $= Q$ auf folgende Formeln:

$$(1)\quad Q = \left(0{,}5673 - 0{,}1239 \sqrt{\frac{H}{T}}\right) bH\sqrt{2gH}, \text{ wenn } H < \tfrac{1}{3}T \text{ und}$$

$$(2)\quad Q = \left(0{,}6402 - 0{,}2862 \sqrt{\frac{H}{T}}\right) b\,(H + H_1)\sqrt{2g\,(H + H_1)},$$

wenn $H > \frac{1}{3}T$ ist und H_1 den Werth $\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{BT}\right)^2$ hat, d. i. die Geschwindigkeit des beim Ueberfalle ankommenden Wassers, bezeichnet.

Bornemann selbst urtheilt über diese seine Formeln folgendermaßen:

„Vergleicht man meine Formeln mit den Weisbach'schen, so scheinen sie den letzteren geradezu zu widersprechen. Bei näherer Betrachtung ist indessen der Widerspruch nicht so groß, weil in den Weisbach'schen Formeln der Factor $\frac{2}{3}\mu$ mit der wachsenden Druckhöhe abnimmt, während meine Formeln dafür einen constanten Factor besitzen.“ Ferner bemerkt Bornemann:

„Meine Formeln können nicht darauf Anspruch machen, allgemein gültig zu sein, da die benutzten Ueberfälle sämmtlich von gleicher Breite waren, und der Ausflußcoefficient, aller Wahrscheinlichkeit nach, kein constanter, sondern ein mit der Breite wachsender ist. Sie zeigen aber vielleicht den Weg, wie eine allgemeiner anwendbare und sich nicht auf die Poncelet'schen Coefficienten stützende Formel zu finden wäre, und dürften daher, innerhalb der Grenzen des Verhältnisses $\frac{H}{T} = 0{,}20$ bis 0,80, für

[1]) Civilingenieur, Bd. 16, S. 395 und 396.

breite Ueberfälle genauere Resultate geben, als Formeln, deren Coefficienten den Poncelet'schen Versuchen mit Ueberfällen von nur 0,20 Meter Breite entlehnt sind. Ob sie auch für geringere Werthe des Verhältnisses $\frac{H}{T}$ und für andere Ueberfallsbreiten anwendbar sind, darüber müssen erst noch weitere Versuche angestellt werden." [1])

§. 113.

Beispiele aus der Praxis, Berechnungen der Wassermengen bei vollkommenen Ueberfällen betreffend.

Es bedarf keiner Erörterung, daß der wissenschaftliche Werth sämmtlicher Formeln des vorstehenden Paragraphen sehr gering ist, was indeß nicht auffallen kann, wenn man immer wieder beachtet, auf welchen Grundlagen (S. 192) die wissenschaftliche Hydrodynamik beruht. Anders gestaltet sich die Brauchbarkeit dieser Formeln für die rationelle Praxis. Hier bedarf man sehr selten, eigentlich nur bei Ermittlung des sogenannten Güteverhältnisses [2]) der Wasserräder, höchst genaue Bestimmung der Aufschlagwassermenge etc. Dazu kommt noch, daß letzteres Wasserquantum überhaupt nur ganz ausnahmsweise constant ist, vielmehr fast immer die drei

---

[1]) Daß beispielsweise bei sehr kleinen Druckhöhen schon ein kleiner Messungsfehler einen großen Einfluß auf die aus den Resultaten ermittelten Ausflußcoefficienten, namentlich bei Ueberfällen, ausüben kann, zeigt Weisbach in seiner Experimental-Hydraulik (S. 69) durch folgende beachtenswerthe Rechnung:

Nach S. 295 ist für vollkommene Ueberfälle: $Q = \frac{2}{3}\mu b H \sqrt{2gH}$ und hieraus abzuleiten:

$$\mu = k^{\frac{3}{2}} H^{-\frac{3}{2}},$$

wenn man $\frac{3Q}{2b\sqrt{2g}} = k^{\frac{3}{2}}$ setzt.

Aus letzterem Werthe für μ erhält man aber durch Differenziation

$$d\mu = -\tfrac{3}{2} k^{\frac{3}{2}} H^{-\frac{5}{2}} dH$$

und hieraus den procentalen Werth in dem Ausflußcoefficienten:

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\tfrac{3}{2}\frac{dH}{H}.$$

Wenn also z. B. die Druckhöhe über der Schwelle des Ueberfalles = 2 Centimeter beträgt und diese um 1 Millimeter zu groß oder zu klein gefunden wird, so bestimmt sich dadurch der Ausflußcoefficient um

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{20} = -\tfrac{3}{40} = -0{,}075, \text{ d. i.}$$

um $7\frac{1}{2}$ Procent zu klein oder zu groß!

[2]) Allgem. Maschinenlehre (des Verfassers), Bd. 1, S. 238 und 239 (2. Aufl.). Bezeichnet, wie in diesem Werke, $\mathfrak{g}$ das Güteverhältniß eines Wasserrades, $\mathfrak{A}_b$ die durch Bremsung ermittelte secundliche Nutzarbeit desselben, ist ferner H_n das natürlich vorhandene Gefälle des Wassers, d. h. der Verticalabstand von Ober- und Unterwasserspiegel, so ist $\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{A}}{\gamma Q H_n}$. Ermittelt man daher Q falsch, in der Regel zu klein, so erhellt ohne Weiteres, zu welchen Fehlschlüssen und Täuschungen man gelangen kann.

Fälle: Kleinwasser, Mittelwasser (Immerwasser?) und Großwasser (Hochwasser) unterschieden werden müßten.

Das vorzüglichste Mittel zur Bestimmung der secundlichen Wassermenge, welche Motoren zugeführt wird, ohne Anwendung sogenannter Hydrometer[1]), ist und bleibt (wahrscheinlich noch lange Zeit) die Herstellung sogenannter Poncelet-Durchlaßmündungen (S. 249 und 256) mit Contraction des Wassers an allen vier Seiten.

Da diese jedoch bei größeren Wassermengen meist nicht auszuführen sind, so verbleibt, als nächstes Mittel, der Einbau von Ueberfällen, mit scharfen Abflußkanten, ins Ober- oder Unterwasser, fast als alleinige Aushülfe übrig. Die betreffende Berechnung ist dann nach einer der Formeln des vorigen Paragraphen vorzunehmen, wobei man am Besten diejenige wählt, welche auf Versuchen mit Ueberfällen beruht, deren Dimensionen und Anordnungen dem vorliegenden speciellen Falle am Meisten entsprechen.

Hiernach schreiten wir zur Berechnung zweier Beispiele, die beide der Praxis entlehnt wurden und wobei man die erforderlichen Messungen mit Sachkenntniß und Gewissenhaftigkeit ausführte.

Beispiel 1.[2]) Zur Ermittlung der Wassermenge, welche als Aufschlagwasser für eine von Escher, Wyß & Co. in Zürich construirte und ausgeführte Henschel-Jonval-Turbine benutzt wurde, hatte Weisbach im Abflußgraben des Wassers eine Spundwand (einen vollkommenen Ueberfall) einbauen und das Wasser über die nach Außen abgeschrägte Kante desselben fließen lassen. Die zur Berechnung erforderlichen Abmessungen waren (unter Beibehaltung der seitherigen Bezeichnungen) für den in unserer Quelle mit Nr. 2 bezeichnetem Versuch folgende:

$$B = 4^m,034;\ T = 0^m,590;\ b = 3^m,602 \text{ und } H = 0^m,229.$$

Auflösung.

I. Weisbach's Formel (S. 300):

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu_1 \left\{1 + 1,718\left(\frac{bH}{BT}\right)^4\right\} bH\sqrt{2gH}.$$

Hier berechnet sich zuerst:

$$\left(\frac{bH}{BT}\right) = \frac{0,825}{2,380} = 0,3465.$$

Sodann ist: $1 + 1,718\left(\frac{bH}{BT}\right)^4 = 1,02472$ und somit:

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu_1 \,.\, 1,02472 \,.\, 0,825\sqrt{2gH},$$

---

[1]) Allgemeine Maschinenlehre, a. a. O., S. 134 ff. Auch später hier im Abschnitte „Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen“.

[2]) Dynamometrische Versuche mit mehreren von Escher, Wyß & Co. in Zürich in der Fischer'schen Papierfabrik zu Bautzen aufgestellten Henschel-Jonval-Turbinen. Polytechn. Centralblatt, Jahrg. 1849, S. 1025. Bewährte Sachverständige waren bei den Versuchen betheiligt, (nächst Weisbach) Zuppinger, Hülse, Bornemann und Brückmann.

oder da genau genug $\sqrt{2g} = \sqrt{2 \cdot 9^m,8088} = 4,43$ gesetzt werden kann:

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu_1 \cdot 1,02472 \cdot 0,825 \cdot 4,43 \sqrt{H}.$$

In der ersten Tabelle S. 297 ist der betreffende Werth von $\frac{2}{3}\mu_1 = \mu$, welcher $H = 0^m,229$ entspricht, direct nicht enthalten, weshalb derselbe durch Interpolation und zwar (hinreichend genau) mit Hülfe der sogenannten Newton'schen Formel

$$\mu = y = y_1 + (y_2 - y_1)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

gesucht werden mag.

Dieser Formel entsprechen die Werthe:

$x_1 = 0,200$	$y_1 = 0,390$
$x_2 = 0,250$	$y_2 = 0,379$
$x (= H) = 0,229$	$y (= \mu) = ?$

$$y = 0,390 + (0,379 - 0,390)\frac{0,229 - 200}{0,250 - 0,200} = 0,3836.$$

Folglich:

$$Q = 0,3836 \cdot 1,02472 \cdot 0,825 \cdot 4,43 \sqrt{0,229}, \text{ d. i.}$$

$$Q = \mathit{0,68735} \text{ Cubikmeter}^{1)}.$$

II. Francis' Formel (engl. Maaße):

$$Q = 3,33\,[b - 0,2\,H]\,H^{\frac{3}{2}}, \text{ (wegen } n = 2).$$

Da $b = 3^m,602 = 11',814$; $H = 0^m,229 = 0',751$ und $\sqrt{H^3} = 0,65$ ist, so ergiebt sich

$$Q = 3,33\,[11,814 - 0,2 \cdot 0,751]\,0,65, \text{ d. i.}$$

$$Q = 25,285 \text{ Cubikf. engl.} = \mathit{0,7156} \text{ Cubikmeter.}$$

III. Redtenbacher's Formel:

$$Q = \left(0,381 + 0,62\frac{b}{B}\right) bH\sqrt{2gH}, \text{ also wegen } \frac{b}{B} = \frac{3602}{4034} = 0,892,$$

$$Q = (0,381 + 0,062 \cdot 0,892)\,3,602 \cdot 0,2229 \cdot 4,43\sqrt{0,229}, \text{ d. i.}$$

$$Q = \mathit{0,762} \text{ Cubikmeter.}$$

---

[1]) Nach Abzug von 0,01240 Cubikmeter sogenannten todten Wassers, ergab sich als Betriebswassermenge pro Secunde:

$$Q_n = 0,68735 - 0,01240 = 0,67495 \text{ Cubikmeter.}$$

Das natürliche Gefälle bei diesem (in unserer Quelle, S. 1027) unter Nr. 2 vermerkten Versuche, betrug $H_n = 4^m,305$. Der Bremsversuch (mittelst des Prony'schen Zaumes) ergab als disponible Arbeit der Turbine: $\mathfrak{A}_b = 2137,45$ Meter-Kilogramm, so daß sich das Güteverhältniß $= \mathfrak{g}$ berechnete zu:

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{A}_b}{\gamma Q_n H_n} = \frac{2137,45}{1000 \cdot 4,305 \cdot 0,67495} = 0,735.$$

IV. Braschmann's Formel:

$$Q = \left[0,3838 + 0,0386\frac{b}{B} + \frac{0,00053}{H}\right] bH\sqrt{2gH}, \text{ giebt, da}$$

$$\frac{0,00053}{H} = \frac{53}{22900} = 0,0023 \text{ ist:}$$

$$Q = [0,3838 + 0,0386 \,.\, 0,892 + 0,0023]\, 3,602 \,.\, 0,229 \,.\, 4,43 \sqrt{0,229},$$

d. i.:

$$Q = \mathit{0,771} \text{ Cubikmeter.}$$

Bei diesen colossalen Differenzen erscheint eigentlich, für gegenwärtigen Fall, nur Francis' Formel anwendbar, weil dessen Versuche mit einem annähernd gleich breiten, wenn auch bedeutend höheren Ueberfalle angestellt wurden.

Beispiel 2. Bei einer von der Maschinenfabrik Briegleb, Hansen & Co. in Gotha für C. Walter zu Mühlhausen in Thüringen ausgeführten Achsial-Henschel-Jonval- (Knop-) Turbine, wurden am 15. Februar 1878 Bremsversuche und gleichzeitig Messungen zur Ermittlung des betreffenden Aufschlagwasserquantums vorgenommen. In einer uns vorliegenden Uebersichtstabelle der betreffenden Resultate wird die secundliche Wassermenge $= Q$ zu 0,2937 Cubikmeter angegeben, während die correspondirende Druckhöhe $H = 0,1664$ Meter gemessen wurde.

Der mit scharfer Abflußkante versehene Ueberfall (ohne Seitencontraction an der Ueberlaßstelle) hatte gleiche Breite mit dem Zuflußcanale, und zwar war $B = b = 2,310$ Meter, während die Höhe der Ueberfallskante über der Canalsohle, d. h. $S = 0,3574$ Meter, also die ganze Wassertiefe $T = S + H = 0,3574 + 0,1664 = 0,5238$ Meter betrug.

Es fragt sich, wie der nach Weisbach berechnete und angegebene Werth von Q mit den Werthen übereinstimmt, welchen für diesen Fall die Formeln von Francis, Boileau, Bornemann und Braschmann liefern?

Auflösung. Wir controliren zuerst die Angabe der erwähnten Versuchstabelle, nach welcher das secundliche Q mittelst der Weisbach'schen Formel berechnet sein soll:

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu_1 \left[1,041 + 0,3693 \left(\frac{H}{T}\right)^2\right] bH\sqrt{2gH}.$$

Zufolge der den Versuchen Lesbros entlehnten Tabelle S. 299 ist hier zuerst:

$$\tfrac{2}{3}\mu_1 = 0,393 \text{ zu setzen,}$$

so daß erhalten wird:

$$\text{I.} \quad Q = 3,393 \left[1,041 + 0,3693 \left(\frac{0,1664}{0,5238}\right)^2\right] 0,393 \,.\, 231 \,.\, 0,1664 \,.\, 4,43 \sqrt{0,1664}, \text{ d. i.}$$

$$Q = \mathit{0,299} \text{ Cubikmeter,}$$

ein Werth, der nur wenig von den oben angeführten abweicht.

Dagegen giebt:

II. Die Francis' Formel:

$$Q = 3,33\, bH^{\frac{3}{2}} \text{ (Cubikfuß engl.), wegen}$$

$$b = 2^m,31 = 7,58 \text{ Fuß engl. und } H = 0^m,1664 = 0,546 \text{ Fuß engl.}$$

$$Q = 3{,}33 \,.\, 7{,}58 \,.\, 0{,}546 \sqrt{0{,}546} = 10{,}17 \text{ Cubikfuß engl., d. i.}$$

$$Q = 10{,}17 \,.\, 0{,}0283 = 0{,}2878 \text{ Cubikmeter.}$$

Ferner liefert

III. Die Formel Boileau's:

$$Q = bH \sqrt{\frac{2g\,(H - e)}{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{S}{H}}\right)^2}} = bH \sqrt{\frac{2gH\left(1 - \frac{e}{H}\right)}{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{S}{H}}\right)^2}} = \mu b H \sqrt{2gH},$$

wenn man $H - e$ aus der später S. 323 von Boileau berechneten Tabelle entlehnt, woraus ich, wenn $H = 0^m{,}1664$ und $S = 0^m{,}3574$ ist, sofort ergiebt:

$$H - e = 0^m{,}028, \text{ ferner } e = 0^m{,}1384 \text{ und } \frac{e}{H} = \frac{1384}{1664} = 0{,}831.$$

Daher ist:

$$\mu = \sqrt{\frac{1 - \frac{e}{H}}{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{S}{H}\right)^2}}} = \frac{\sqrt{1 - 0{,}831}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{3574}{1664}\right)^2}}} = \frac{0{,}411}{0{,}947} = 0{,}434,$$

folglich:

$$Q = 0{,}434\, bH \,.\, 4{,}43 \sqrt{H} = 0{,}434 \,.\, 2{,}31 \,.\, 0{,}1664 \,.\, 4{,}43 \,.\, 0{,}407, \text{ d. i.}$$

$$Q = 0{,}300 \text{ Cubikmeter.}$$

Weiter liefert:

IV. Die Braschmann'sche Formel:

$$Q = \left[0{,}4224 + \frac{0{,}00053}{H}\right] b\,H \sqrt{2gH},$$

$$Q = [0{,}4224 + 0{,}0032]\, 2{,}31 \,.\, 0{,}1664 \,.\, 4{,}43 \sqrt{0{,}1664}, \text{ d. i.}$$

$$Q = 0{,}295 \text{ Cubikmeter.}$$

Endlich erhält man mittelst Bornemann's Formel, da hier $\frac{1}{3}\, T = \frac{0^m{,}5234}{3} = 0^m{,}174$, also $H < \frac{1}{3}\, T$ ist:

$$Q = \left(0{,}5673 - 0{,}1239 \sqrt{\frac{H}{T}}\right) b\,H \sqrt{2gH}, \text{ also}$$

$$Q = \left(0{,}5673 - 0{,}1239 \sqrt{\frac{1664}{5238}}\right) 2{,}31 \,.\, 0{,}1664 \,.\, 4{,}43 \sqrt{0{,}1664}, \text{ d. i.}$$

$$Q = 0{,}343 \text{ Cubikmeter.}$$

Nimmt man hiernach zur Bestimmung des Güteverhältnisses der Knop'schen Turbine, für den correspondirenden Versuch (Nr. 1, vom 15. Febr. 1878)

$$Q = 0{,}30 \text{ Cubikmeter}$$

an und beachtet man, daß das bei diesem Versuche gemessene Gefälle 8,015 Meter, die natürlich vorhandene Arbeit in Maschinenpferden ($= N_a$) also

$$\frac{1000 \cdot 0{,}3 \cdot 8{,}015}{75} = 32{,}06$$

betrug, endlich die durch das Bremsen ermittelte Zahl der Maschinenpferde sich zu 24,72 berechnete, so war das Güteverhältniß $= \mathfrak{g}$ der fraglichen Turbine:

$$\mathfrak{g} = \frac{2472}{3206} = 0{,}77.$$

Rechnet man mit dem arithmetischen Mittel aus sämmtlichen 5 Werthen für Q, so ergiebt sich $Q = 0^{cm},305$ und $N_a = 32{,}59$, folgt

$$\mathfrak{g} = \frac{2472}{3259} = 0{,}75,$$

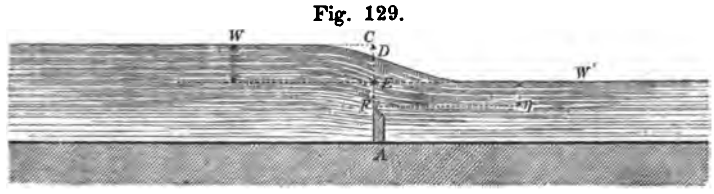
d. h. noch so viel, als man nur immer von einer achsialen Druckturbine (Actionsturbine) verlangen kann, wenn diese mit partieller Beaufschlagung arbeitet, was in der That bei dem fraglichen Versuche der Fall war, indem man hier nur den $\frac{10}{55}$ten Theil des Umfanges der Turbine beaufschlagt hatte.

§. 114.

b. Unvollkommene Ueberfälle.

Bei diesen Ueberfällen, wo, wie bereits S. 295 erklärt wurde, der Spiegel des Unterwassers W', Fig. 129, höher als die Kante F des Ueberfalles liegt, der Ausfluß also ähnlich wie bei einer unter

Fig. 129.



Wasser gesetzten Mündung erfolgt, hat man ebenfalls betreffende Messungen angestellt und darnach verschiedene Wege zur Berechnung der secundlich abfließenden Wassermenge $= Q$ in Vorschlag gebracht.

Nach Dubuat[1]) läßt sich der Abfluß des Wassers bei einem solchen Ueberfalle so ansehen, als wenn es von der Höhe CE wie bei einem vollkommenen Ueberfalle strömte und gleichzeitig durch eine unter Wasser gesetzte Mündung EF flösse, so daß das gesammte Wasserquantum Q aus zwei Theilen bestehend angenommen wird, und weshalb zufolge §. 104 und §. 112 für Q ohne Weiteres gesetzt werden müßte:

$$\text{I.} \quad Q = \tfrac{2}{3}\,\mu_1 b\,(H - \eta)\sqrt{2g\,(H - \eta)} + \mu_2 b\eta\sqrt{2g\,(H - \eta)}.$$

Eytelwein[2]), welcher diese Dubuat'sche Gleichung für brauchbar hält, räth $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}633$ zu setzen.

[1]) Principes d'hydraulique. T. I, Pag. 203, §. 146.
[2]) Handbuch der Mechanik und der Hydraulik. 2. Aufl., S. 186, §. 139.

Redtenbacher[1]) bemerkt, daß die genaue Berechnung von Q, im vorliegenden Falle, mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden sei und räth deshalb ebenfalls, sich mit einer rohen Annäherung zu begnügen, unter welcher Voraussetzung dieser Autor schreibt:

$$Q = 0{,}57\, b\, (H - \eta) \sqrt{2g\,(H - \eta)} + 0{,}62\, b\eta \sqrt{2g\,(H - \eta)}.$$

Es wird rathsam sein, von dieser Gleichung keinen Gebrauch zu machen, da Redtenbacher selbst sagt, daß die Werthe der Coefficienten 0,57 und 0,62 nur auf Schätzungen beruhen. Die ersten ausgedehnteren Versuche über den Abfluß bei unvollkommenen Ueberfällen verdankt man wieder Lesbros, der dabei die Formel zu Grunde legte:

$$\text{II.} \quad Q = \mu b H \sqrt{2g\,(H - \eta)}.$$

Die erforderlichen Werthe von μ sind aus nachstehender Tabelle zu entnehmen[2]).

$\frac{H-\eta}{H}$	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050
μ	0,295	0,368	0,430	0,496	0,556	0,597	0,605	0,600	0,596	0,580	0,570	0,557	0,546	0,537	0,531	0,526	0,522
$\frac{H-\eta}{H}$	0,06	0,08	0,10	9,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
μ	0,519	0,517	0,516	0,512	0,507	0,502	0,497	0,492	0,487	0,048	0,474	0,466	0,459	0,444	0,427	0,409	0,390

Abgesehen davon, daß Lesbros' Versuche mit nur schmalen Ueberfällen, die nicht über die ganze Canalbreite reichten, angestellt wurden, gab die Verschiedenheit der Coefficienten vorstehender Tabelle zu der Befürchtung Raum, daß die aufgestellte Formel nicht das wahre Gesetz des Ausflusses bei solchen Ueberfällen ausspricht.

Deshalb unternahm Bornemann[3]) in den Jahren 1866, 1867 und 1869 neue Versuche an Ueberfällen von 1,135 Meter Breite, bei Wassermengen von 105 bis 220 Liter pro Secunde. Aus diesen Resultaten bemühte sich auch der holländische Ingenieur Delprat, eine passende Formel zur Berechnung für Q bei unvollkommenen Ueberfällen zu entwickeln, worüber in der unten notirten Quelle ausführlich berichtet wird[4]).

---

[1]) „Der Maschinenbau". Zweiter Band (1863), S. 27.

[2]) Expériences hydrauliques. Pg. 490, Nr. 310, Tableau XLIII. Die Breite der Ueberfallskante b betrug hierbei $b = 0{,}24$ Meter.

[3]) Civilingenieur, Bd. 16 (1870), S. 291 und S. 375.

[4]) Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. Institutsjaar 1871—1872, Pg. 10—32 unter der Ueberschrift: „Proeven omtrent de afvloeijing van water over breede overlaten. Door K. R. Bornemann.

Delprat's Formel ist übrigens folgende: [1])

$$\text{III.} \quad Q = \left(\alpha + \beta \frac{\eta}{H}\right) \left\{ 2\,(H + k) + \eta \right\} b\sqrt{2g}\,\sqrt{H - \eta + k}.$$

Hierin sind α und β Erfahrungscoefficienten, so wie k die der Geschwindigkeit des ankommenden Wassers entsprechende Geschwindigkeitshöhe bezeichnet, also

$$k = \frac{1}{2g}\left[\frac{Q}{bT}\right]^2 \text{ ist.}$$

Später hat Bornemann unter Benutzung noch anderer, von ihm in den Jahren 1871 und 1872 mit Ueberfällen von $0^m{,}551$ und von $0^m{,}801$ Breite angestellten Versuchen, entsprechende Werthe von α und β berechnet, so daß er unter Andern, für den Ausfluß mit bedecktem Strahle, folgende Uebersicht bilden konnte: [2])

	α	β
Bei $b = 1^m{,}185$	0,1878	0,0981
„ $b = 0^m{,}801$	0,2119	0,0207
„ $b = 0^m{,}551$	0,1958	0,0489

Hiernach würden die Constanten für jede Ueberfallsbreite andere Werthe erhalten, deren gesetzmäßige Veränderung für eine allgemein gültige Formel noch ermittelt werden müßte.

Um dieses Uebel zu umgehen, hat es Bornemann vorgezogen, eine noch andere Formel aufzustellen, nämlich:

$$\text{IV.} \quad Q = b\sqrt{2g}\left\{\tfrac{2}{3}\mu\left[(H - \eta + k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}}\right] + \mu\eta\,(H - \eta + k)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

worin

$$\mu = 0{,}702 - 0{,}2226\sqrt{\frac{H - \eta}{b}} + 0{,}1845\left(\frac{\eta}{H}\right)^2 \text{ ist.}$$

Der Uebereinstimmungsgrad aller dieser Formeln, für practische Zwecke, erhellt einigermaßen aus folgendem Beispiele, welches wir absichtlich Eytelwein entlehnen [3]).

Beispiel. An dem Ausflusse eines See's befindet sich ein 2 Fuß hoher und 10 Fuß breiter unvollkommener Ueberfall ohne Flügelwände. Die Tiefe des Wassers unterhalb des Wehres ist 3 Fuß und die Höhe des Aufstaues 4 Fuß; man fragt, wie viel Wasser in jeder Secunde abfließt, wenn mit Eytelwein $\sqrt{2g} = 7{,}9$ (für preußische Maaße) und $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 0{,}633$ angenommen wird.

[1]) Bornemann in der Abhandlung: „Weitere Versuche über den Ausfluß unter Wasser bei Ueberfällen über die ganze Wand". Civilingenieur, Bd. XXII (1876), S. 87 ff.

[2]) Ebendaselbst, S. 92.

[3]) Handbuch der Mechanik und Hydraulik. 2. Auflage, S. 186, §. 139.

Auflösung. Mit Bezug auf Fig. 129 ist hier: $\overline{AE} = 3'$, $\overline{AF} = 2'$, folglich $\overline{EF} = \eta = 3 - 2 = 1'$, $\overline{EC} = 4'$, daher $\overline{EC} = EF = H = 5'$, und wie Eytelwein nach Formel I:

$$Q = \mu \sqrt{2g} \left\{ \tfrac{2}{3} (H - \eta) + \eta \right\} b \sqrt{H - \eta}, \text{ d. i.}$$

$$Q = 5 \left\{ \tfrac{2}{3} \cdot 4 + 1 \right\} 10 \sqrt{4} = \mathit{366{,}6} \text{ Cubikfuß.}$$

Um nach Lesbros Formel II. zu rechnen, beachte man, daß hier $\frac{H - \eta}{H} = \frac{5 - 1}{5} = 0{,}8$, also nach letzterer Tabelle $\mu = 0{,}427$ ist, daher auch:

$$Q = 0{,}42 \cdot 10 \cdot 5 \sqrt{2g \cdot (5 - 1} \text{ und wiederum } \sqrt{2g} = 7{,}9,$$

$$Q = \mathit{337{,}33} \text{ Cubikfuß.}$$

Bornemann's (jüngste) Formel IV:

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \left\{ \left[\tfrac{2}{3} (H - \eta + k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}} \right] + \eta (H - \eta + k)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

erfordert zuerst die Berechnung von μ und k aus

$$\mu = 0{,}702 - 0{,}226 \sqrt{\frac{H - \eta}{b}} + 0{,}1845 \left(\frac{\eta}{H} \right)^2 \text{ und aus}$$

$$k = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{bT} \right)^2.$$

Für μ erhält man:

$$\mu = 0{,}702 - 0{,}2262 \sqrt{\frac{4}{10}} + 0{,}1845 \left(\frac{1}{5} \right)^2 = 0{,}568.$$

Sodann aber, wenn in der Gleichung IV, $k =$ Null angenommen wird:

$$Q = 0{,}568 \cdot 10 \cdot 7{,}9 \left\{ \tfrac{2}{3} \cdot 4 \sqrt{4} + 1 \cdot \sqrt{4} \right\} = 328{,}51 \text{ Cubikfuß.}$$

Demnach $k = \frac{1}{62{,}41} \left(\frac{328{,}51}{10 \cdot 7} \right)^2 = 0{,}352.$

Somit also:

$$Q = 0{,}568 \cdot 10 \cdot 7{,}9 \left\{ \left[\tfrac{2}{3} (5 - 1 + 0{,}352)^{\frac{3}{2}} - 0{,}352^{\frac{3}{2}} \right] + 1 \cdot [5 - 1 + 0{,}352]^{\frac{1}{2}} \right\}, \text{ d. i.}$$

$$Q = 44{,}872 \left[\tfrac{2}{3} \cdot 8{,}865 - 2{,}086 \right], \text{ also:}$$

$$Q = \mathit{358{,}97} \text{ Cubikfuß.}$$

§. 115.

Dicke des Wasserstrahles in der Ebene der Ueberfallskante.

Wie bereits erwähnt, haben die theoretisch (von Navier und Braschmann) versuchten Bestimmungsweisen der Strahldicke e ($= ED$, Fig. 128) und damit die Senkungsgröße $H - e$ ($= CD$, Fig. 128) zu keinem für die Praxis brauchbaren Resultate geführt, weshalb es nicht genug anzuerkennen ist, daß Lesbros und Boileau auch diesen Gegenstand ihren Versuchen unterwarfen und damit zur Ausfüllung dieser Lücke so weit beitrugen, als damit practischen Bedürfnissen einigermaßen genügt wird.

In nachstehender Tabelle (aus Lesbros, Expériences etc., §. 200, Pag. 154) sind die gedachten Erfahrungswerthe zusammengestellt, wobei B, b und H die bisherigen Bedeutungen haben, e aber die mittlere Dicke des Wasserstrahles in der Ebene des Ueberfalls bezeichnet[1]), ferner $D^{(A)}$, $D^{(B)}$, $D^{(C)}$ .... die Senkungen $H - e$ ausdrücken, welche die respective mit (A), (B), (C) .... bezeichneten Formeln liefern[2]).

Als Maaßeinheit ist überall der Millimeter angenommen.

Werthe des Verhältnisses $\frac{b}{B}$	Ueberfälle, deren Abflußkante vom Canalboden gänzlich isolirt ist.	
	Mündend in die freie Luft	Außerhalb der Mündung mit einem horizontalen Gerinne versehen
$\frac{b}{B} < 0,5$	$\left.\begin{matrix} H - e = D^{(A)} = 0,9 + \sqrt{pe + 0,81} \\ p = 5,428 - (0,00173\,l - 2,373)^2 \end{matrix}\right\} (A)$	$H - e = D^C = [1,0 - (0,00138\,e - 0,768)^2]\, D^A \quad (C)$
$\frac{b}{B} > 0,6$	$\left.\begin{matrix} H - e = D^{(B)} = \alpha\eta^2 + \beta\eta - \gamma \\ \alpha = 0,00315\left[\left(\frac{b}{B} - 0,656\right)^2 + 0,037\right] \\ \beta = 0,89\left[\left(\frac{b}{B} - 0,83\right)^2 + 0,096\right] \\ \gamma = 9,1\left[\left(\frac{b}{B} - 0,98\right)^2 - 0,333\right] \end{matrix}\right\} (B)$	$H - e = D^D = \frac{D^B}{1,723 + (0,00444\,h - 0,607)^2} \quad (D)$

[1]) Man erhält diese Dicke, wenn man das Querprofil des Strahles in der Ueberfallskante (wie Fig. 131 zeigt) sorgfältig ermittelt und dessen Flächeninhalt durch die Breite der Ueberfallskante dividirt.

[2]) Zur Ermittlung der Constanten in den Formeln (A) und (C) benutzte Lesbros nicht weniger als 78 Versuche von Castel, Bidone, Eytelwein und Lesbros. In gleicher Weise wurde für denselben Zweck bei den Formeln (B) und (D) die Anzahl von 59 Versuchen von Castel, Eytelwein und Lesbros benutzt.

Zur Beurtheilung der Formeln (*A*) und (*B*) wurden in nachstehender Tabelle einige vergleichende Resultate aus den Versuchen und Rechnungen Lesbros zusammengestellt:[1])

Beobachter	Beobachtet				H berechnet nach Formel (*A*)
	b	$\frac{b}{B}$	Strahl-dicke η	H	
	Millim.		Millim.	Millim.	Millim.
Castel	50,00	0,0675	233,5	240,0	241,27
"	100,0	0,1351	111,30	120,0	120,33
"	200,0	0,2703	88,0	100,0	99,73
Eytelwein . .	157,0	0,1250	382,77	392,50	403,35
"	261,0	0,2080	267,84	282,60	290,02
"	366,0	0,2920	202,53	226,08	225,52
"	471,0	0,3750	164,22	187,14	187,31
Bidone. . . .	77,44	0,1205	159,60	169,19	168,71
"	170,77	0,2656	117,71	129,55	130,05
Poncelet und Lesbros . .	200,0	0,0543	1644,0[2])	1803,0	1800,5

Beobachter	Beobachtet				H berechnet nach Formel (*B*)
	b	$\frac{b}{B}$	Strahl-dicke η	H	
	Millim		Millim.	Millim.	Millim.
Castel	740,0	1,00	68,30	81,49	81,20
"	"	"	103,20	124,50	122,90
"	361,0	1,00	50,70	60,82	60,62
"	680,4	0,9195	67,60	80,91	78,38
"	300,2	0,8316	122,60	143,78	139,11
"	600,1	0,8109	84,10	100,66	95,44
Eytelwein . .	1082,0	0,8656	92,0	109,74	105,17
"	673,0	0,5384	128,0	152,48	152,52
Lesbros[3]) . .	200,0	0,833	183,30	209,00	209,04
"	"	1,000	129,70	155,10	155,30

[1]) Expériences etc., Pag. 109—111.

[2]) Nach sorgfältigen Messungen ergab sich der Querschnitt des Strahles, Fig. 131, in der Ebene der Abflußkante zu: 328,80 Quadratcentimeter. Dividirt man letztere Zahl durch die Breite $0^m,20$ des Ueberfalles, so folgt die mittlere Dicke des Wasserstrahles: $\frac{32880}{200}$ = 1644 Millimeter, wie in der Tabelle.

[3]) Der erste Versuch entspricht der Anordnung *A*, *e*, Fig 103, der zweite der von *A*, *f*, Fig. 103.

Zur Vervollständigung des Vorstehenden zeigt Fig. 130 den Längendurchschnitt mittelst einer Verticalebene durch die Mitte eines Ueberfallstrahles nach der Stromrichtung, welcher zu dem in vorstehender Tabelle angeführten Versuche Poncelet's und Lesbros'[1]) gehört, wobei die Ueberfallsbreite $b = 0^m,20$, $\frac{b}{B} = 0,0543$, $\eta = 0^m,1644$ und die Druckhöhe $H = 0^m,1803$ betrug. Fig. 131 zeigt endlich noch das Profil dieses Strahles in der Ebene der Ueberfallskante rechtwinklig zur Bewegungsrichtung.

Fig. 130.

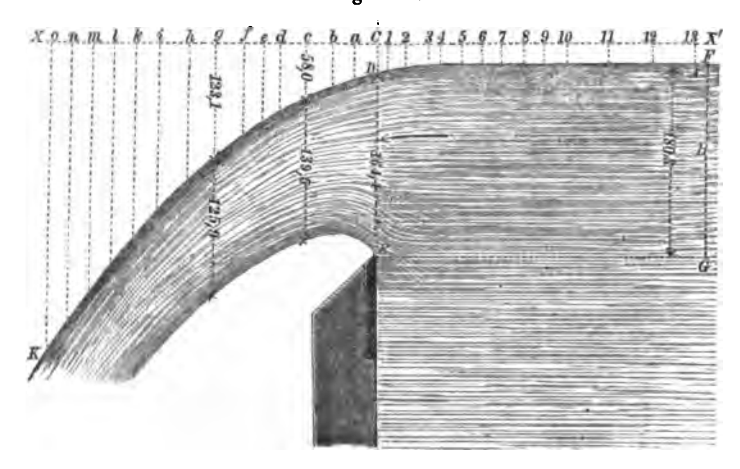
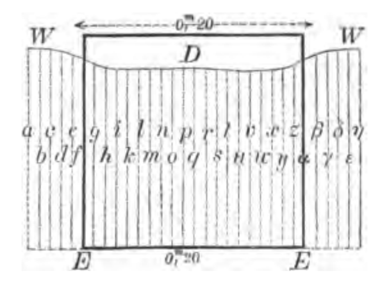


Fig. 131.



Die Coordinaten der Begrenzungscurve des Längenprofiles, Fig. 130, von der Ebene der Abflußkante, links nach CX und rechts nach CX' gerechnet, sind mit Bezug auf die eingeschriebenen Buchstaben und Ziffern der Figur in folgenden Tabellen zusammengestellt:

[1]) Expériences etc. par Poncelet et Lesbros. Pag. 130, Nr. 127, Planche 6.

Ort auf CX	C	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o
Horizontalabstand von C aus in Millimetern	0,0	20,0	40,0	64,0	90,0	104,0	120,0	150,0	170,0	200,0	220,0	240,0	260,0	280,0	300,0
Verticalabstand in Millimetern	35,6	40,9	47,7	58,0	73,3	83,4	96,5	123,1	141,7	170,0	191,1	214,4	239,0	264,5	293,4

Ort auf CX'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Horizontalabstand von C aus in Millimetern	10,0	30,0	50,0	60,0	80,0	100,0	120,0	140,0	160,0	180,0	220,0	260,0	300	Anfang der Senkung	
Verticalabstand in Millimetern	33,0	29,8	27,1	26,2	24,5	23,0	22,0	21,3	20,9	20,8	20,2	19,8	19,7		

Obwohl, wie die Coordinaten erkennen lassen, die Begrenzungscurve ADK nicht genau eine gemeine Parabel bildet, so kann dies doch für die gewöhnlichsten Fälle der Praxis angenommen, also auch hier die Formeln des §. 97 in Anwendung gebracht werden.

Die Ordinaten des Querprofiles, Fig. 131, des Strahles von der unteren Kante der Mündung aus gerechnet, sind mit Bezug auf die eingeschriebenen Buchstaben gedachter Figur folgende:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p
181,0	180,5	179,5	178,1	177,7	173,2	165,8	163,8	163,5	163,3	163,5	163,8	164,0	164,2	164,3
q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	α	β	γ	δ	$\varepsilon = \eta$
164,4	164,3	164,2	164,0	163,8	163,5	163,3	163,5	163,8	165,8	173,2	177,7	178,1	179,5	181,0

Boileau bemühte sich, aus seinen Versuchen Tabellen zu berechnen, mittelst welchen die Strahlsenkung $H - e$ für über die ganze Wand reichende Ueberfälle bestimmt werden kann, sobald die Druckhöhe H und die Höhe S der Ueberfallskante über der Canalsohle gegeben ist[1]).

Wir theilen hier diejenige dieser Tabellen mit, welche die Werthe von $H - e$ für vollkommene Ueberfälle verzeichnet und zwar:

---

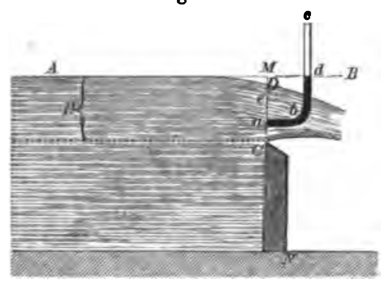
[1]) Traité de la mesure des eaux courantes. Pag. 70.

Druckhöhen $= H$ in Millimetern	Für folgende Höhen $= S$ der Ueberfallskante etc. über der Canalsohle. (Alle Werthe in Millimetern ausgedrückt.)														Druckhöhen $= H$ in Millimetern
	200	250	300	350	400	450	500	550	600	700	800	900	1000	1100	
40	8,0	9,0	9,3	9,5	9,5	9,3	8,6	7,6	7,1	6,5	6,4	6,5	6,6	6,7	40
50	9,0	10,2	10,6	11,0	11,0	10,6	9,8	9,0	8,4	8,3	8,0	8,1	8,2	8,3	50
60	10,3	11,4	12,0	12,2	12,0	11,8	11,0	10,4	10,2	10,0	9,8	9,9	10,0	10,1	60
70	11,9	12,8	13,3	13,4	13,2	13,0	12,2	12,0	11,8	11,4	11,2	11,4	11,5	11,6	70
80	13,2	14,1	14,9	15,0	14,8	14,5	13,6	13,4	13,3	13,0	12,8	12,9	13,0	13,1	80
90	.	15,8	16,3	16,8	16,2	16,0	15,2	15,1	15,0	14,7	14,5	14,4	14,5	14,6	90
100	.	17,2	18,0	18,2	17,9	17,6	17,0	16,6	16,5	16,3	16,1	16,0	16,0	16,0	100
120	.	20,4	21,4	21,6	21,3	20,6	19,9	19,6	19,4	19,2	19,1	19,0	19,0	19,0	120
140	.	23,4	24,6	24,8	24,3	23,7	23,1	22,9	22,7	22,4	22,0	21,6	21,6	21,6	140
160	.	26,5	27,6	27,7	27,0	26,7	26,4	26,2	26,0	25,7	25,5	24,7	24,6	24,6	160
180	.	29,4	30,5	30,4	29,6	29,0	28,8	29,0	29,2	29,4	28,6	27,5	27,1	27,4	180
200	.	32,4	33,0	32,9	32,4	31,9	31,7	31,6	32,4	32,6	31,7	30,3	30,0	30,6	200
220	.	.	.	.	.	.	.	35,0	35,8	35,8	34,8	33,2	32,8	33,8	220
240	.	.	.	.	.	.	.	38,2	38,7	38,6	37,8	36,0	35,6	36,8	240
260	.	.	.	.	.	.	.	.	41,4	41,8	41,0	39,2	38,9	39,9	260
280	.	.	.	.	.	.	.	.	44,9	45,0	43,8	42,4	42,6	43,8	280
300	.	.	.	.	.	.	.	.	.	47,9	47,0	46,1	46,0	46,7	300
320	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	49,1	49,6	49,6	49,5	320
340	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	51,8	52,9	52,7	52,1	340
360	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	54,8	56,4	56,0	54,7	360
380	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	57,0	60,0	59,7	57,2	380
400	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	59,6	63,2	62,7	60,3	400
420	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	62,4	67,0	66,0	.	420
440	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	65,6	70,0	.	.	440
460	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	69,4	73,5	.	.	460
480	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	73,0	.	.	.	480
500	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	77,0	.	.	.	500

Ist beispielsweise (wie S. 313) $H = 0^m,1664$ und $S = 0^m,3574$ gegeben, so liefert die Tabelle genau genug: $H - e = 0^m,028$, folglich $e = H - 0,028 = 0,1664 - 0,028 = 0^m,1384$.

Zusatz. Um bei Ueberfällen, auf möglichst leichte und sichere Weise, sowohl die Druckhöhe H als die Senkung $H - e$ des Wasserspiegels über der Abflußkante messen zu können, bedient man sich am Besten folgender zwei Methoden.

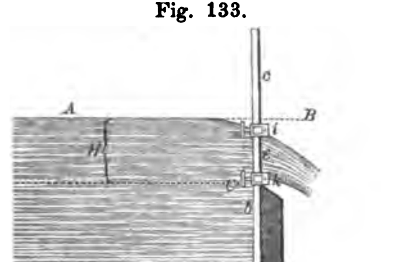
Fig. 132.



Nach Bidone[1]) nimmt man eine umgebogene Glasröhre abc, Fig. 132, und taucht diese so ein, daß die Mündung a des horizontalen Schenkels ab in die Ebene MN der Ueberfallskante kommt. Der Wasserstand bd im verticalen Schenkel bc ist dann stets so, daß dessen Oberfläche d im Niveau AB des ungesenkten Wasserspiegels liegt, mag die Mündung a mehr oder weniger tief unter das Wasser getaucht sein.

Dies Verfahren setzt jedoch voraus, daß die Oberfläche des Wassers sich ganz ruhig verhält, was naturgemäß nicht immer der Fall ist.

Fig. 133.



Deshalb bediente sich Boileau[2]) bei seinen Versuchen einer ganz geraden, an beiden Enden offenen Glasröhre abc, Fig. 133, die aber unten noch eine Seitenöffnung a hat, um die Röhre unmittelbar auf den Boden des Canals stellen zu können. Versieht man dann die Röhre mit zwei geeigneten, verschiebbaren und festzustellenden Schiebern i und k, die mit etwas Reibung auf der Glasröhre gleiten, ferner mit Marken (Spitzen etc.) ausgestattet sind, so erkennt man bald, daß sowohl e, als $H - e$ und H entsprechend gemessen werden können. Die Correction der Capillaritätswirkung, die Höhe des hierdurch entstehenden Meniscus ermittelte Boileau durch die Formel $\frac{29,8}{d}$, worin d den inneren Durchmesser der Röhre in Millimetern bezeichnet. Bei Röhren von 13 Millimeter lichter Weite, deren sich Boileau vorzugsweise bediente, wäre demnach die Meniscushöhe $= \frac{29,8}{13} = 2,292$ Millimeter. Die directe Messung ergab 2,30 Millimeter.

Um Oscillationen des Wassers in der Röhre abc zu verhüten, verschloß Boileau deren untere Oeffnung nicht vollständig, sondern ließ eine kleine Oeffnung a frei, deren Durchmesser etwa 1 Millimeter betrug.

[1]) Mémoires de l'Académie de Turin. Tome XXVIII, année 1824.
[2]) Traité de la mesure des eaux courantes. Pag. 51 und 83.

Bei Ueberfällen von geringer Breite räth Boileau, den durch Einsetzen der Röhre verursachten Stau bei der Berechnung zu berücksichtigen. Beispielsweise giebt er an, daß die Breite des Ueberfalles um das 1,4fache der Röhrendicke zu vermindern ist, wenn diese 10 bis 13 Millimeter beträgt.

Wegen noch anderer Sicherheitsmaßregeln und sonstiger Specialitäten für genaue Messungen, muß der Verfasser wiederum auf Boileau's kurz vorher citirtes Werk verweisen, woselbst dieser Gegenstand auf den Seiten 51, 82, 83 und 84 ausführlich erörtert wird. Einiges hiervon findet sich auch im Referate Herrn Bornemann's über Boileau's Werk im 2. Bande (1854), S. 78 des Civilingenieurs.

Viertes Capitel.

Ausfluß des Wassers durch Mündungen in den Seitenwänden der Gefäße bei veränderlicher Druckhöhe.

§. 116.

Unter Voraussetzung einer rectangulären Mündung, wie Fig. 92, würde, vom mathematischen Standpunkte aus, zur Berechnung der Ausflußmenge und Zeit der Senkung des Wasserspiegels, bei veränderlicher Druckhöhe, die Gleichung I, §. 95, zu Grunde zu legen sein. Für die betreffenden und gewöhnlichen Fälle der Praxis sind jedoch die Mündungshöhen im Verhältniß zu den Druckhöhen meist so niedrig, daß man für den Zweck der gedachten Berechnungen von der Formel II, §. 95, ausgehen, d. h. die Schwerpunktsentfernung vom Oberwasserspiegel als Druckhöhe einführen kann. Sodann erhält man aber Gleichungen, welche ganz identisch den des §. 87 etc. sind, sobald man die dortigen Druckhöhen auf den Schwerpunkt bezieht.

Unter Voraussetzung eines prismatischen Behälters vom Querschnitte $= A$ ist daher die Zeit $= t$ der Senkung von einer anfänglichen Druckhöhe η bis zu einer geringeren η_1:

$$t = \frac{2A}{\mu a \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{\eta} - \sqrt{\eta_1} \right\}.$$

Anmerkung. Bezeichnet q die pro Secunde dem prismatischen Gefäße vom Querschnitte A zufließende Wassermenge, u die Druckhöhe über der oberen Mündungskante, e die Höhe der Mündung, so erhält man, ähnlich wie S. 234, für das Element dQ der in der Zeit dt ausfließenden Wassermenge: $dQ = \frac{2}{3} \mu b dt \sqrt{2g} \left\{ (u + e)^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}} \right\}$ und $dQ = \pm A du + q dt$, also:

$$dt = \frac{\pm A}{-q + \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g}} \left\{ \frac{du}{(u+e)^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

$+$ oder $-$ je nachdem u mit t wächst oder abnimmt.

Die Integration dieser Gleichung ist zwar etwas umständlich, jedoch mit keinen besonderen Schwierigkeiten verbunden[1]).

Zusatz 1. Fließt das Wasser bei veränderlicher Druckhöhe durch einen oben offenen Seitenwandeinschnitt oder Ueberfall, so erhält man mit Bezug auf II, §, 111, für die Senkungszeit t, wenn die obigen Bezeichnungen beibehalten werden:

$$t = \frac{3A}{\mu b \sqrt{2g}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\eta_1}} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right\}.$$

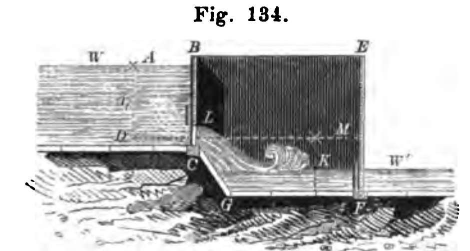
Zusatz 2. Für den Ausfluß bei veränderlicher Druckhöhe aus Seitenöffnungen nicht prismatischer oder ganz unregelmäßiger Gefäße, so wie für den Fall, daß mit dem Abflusse gleichzeitig Zufluß verbunden ist, kann es nach allem bis jetzt Abgehandelten keine besondere Schwierigkeit bieten, die betreffenden Fragen mit Hinsicht auf §. 91 bis mit §. 92 zu beantworten.

§. 117.

Schleusen-Füllung und Entleerung.

Die Formeln des vorigen Paragraphen lassen sich auch auf den Fall anwenden, wo ein ursprünglich leeres Gefäß $BCGFE$, Fig. 134, zum Theil oder ganz dadurch gefüllt wird, daß sich in dasselbe, durch eine Seitenmündung L, Wasser eines zweiten Gefäßes ergießt, in welchem letzteren die Druckhöhe fortwährend dieselbe bleibt. Die Erklärung hierzu ergiebt sich von selbst, wenn man beachtet, daß die Zeit der gedachten Füllung keine andere als die sein kann, welche man beobachtet haben würde, wenn ein gleiches Wasserquantum aus einer Seitenwandöffnung, vom Flächeninhalte L, aus dem sonst überall verschlossenen Gefäße $BGFE$ bei abnehmender Druckhöhe ausgeflossen wäre.

Fig. 134.



Den gemachten Voraussetzungen besonders entsprechend sind die sogenannten einfachen Schifffahrtsschleusen, weshalb auch hier die Zeit zur Anfüllung der Kammer $BGFE$ einer solchen Schleuse berechnet werden mag.

Hierzu bezeichne A den mittleren Querschnitt des auf ein rectanguläres Prisma reducirten Kammerraumes, K die mittlere Tiefe des letzteren vom Schwerpunkte der Schützenöffnung L bis zum Boden GF der Kammer gerechnet, ferner η die constante Druckhöhe des Oberwassers und endlich sei a der Flächeninhalt der Mündung L im Oberthore.

Sodann erhält man ohne Weiteres für die Zeit t_1, nach welcher der Raum $LGFM$ vom Boden bis zur Schwerpunktsebene LM der Mündung L gefüllt wird, wegen $A \cdot K = \mu a t_1 \sqrt{2g\eta}$:

[1]) Lösung solcher Aufgaben finden sich namentlich in Lehmus Sammlung etc. Bd. 1, S. 91 ff. Berlin 1828.

$$(1) \quad t_1 = \frac{AK}{\mu a \sqrt{2g\eta}}.$$

Eben so ergiebt sich die Zeit t_2, binnen welcher der obere Raum *LBEM* gefüllt wird, zu:

$$(2) \quad t_2 = \frac{2A\sqrt{\eta}}{\mu a \sqrt{2g}} = \frac{2A\eta}{\mu a \sqrt{2g\eta}}.$$

Daher die Zeit T zur vollständigen Füllung der vorher leeren Kammer, aus (1) und (2):

$$\text{I.} \quad T = \frac{A(K + 2\eta)}{\mu a \sqrt{2g\eta}}.$$

Die fast unglaublich gute Uebereinstimmung dieser Rechnungen mit der Erfahrung läßt sich u. A. aus einem Versuche Eytelwein's[1]) entnehmen, den derselbe an einer Schleusenkammer des Bromberger Canales anstellen ließ. Dabei war $A = 4284$ rhein. Quadratfuß, $\eta = 7$ Fuß 1 Zoll (man ließ vor der Beobachtung die Kammer erst so weit voll laufen, daß die Schützenöffnung vollkommen unter dem Wasserspiegel der Kammer stand, so daß η die Differenz des Ober- und Kammerwassers am Anfange der Beobachtung bezeichnet), $a = 2' \times 1\frac{1}{3}' = \frac{8}{3}$ □Fuß. Nimmt man nun nach §. 102 $\mu = 0{,}615$, so erhält man mittelst der Formel (2), wegen $\sqrt{2g} = 7{,}91$, für preuß. Maaße:

$$t_2 = \frac{2 \,.\, 4284 \,.\, 7{,}083}{0{,}615 \,.\, \frac{8}{3} \,.\, 21{,}04} = 1758{,}71 \text{ Secunden.}$$

Die Beobachtung gab 1763 Secunden.

Die Zeit des Leerlaufens der Schleuse berechnet sich, wenn η_1 die Niveau-Differenz des Schleusen- und Außenwassers bezeichnet und die Mündungshöhe im Unterthore $= e$, die Mündungsbreite $= b$ ist, sofort nach (2) zu:

$$\text{II.} \quad T_1 = \frac{2A\sqrt{\eta_1}}{\mu b e \sqrt{2g}},$$

sobald die Ausflußmündung im Unterthore ganz unter Wasser steht.

Wird dagegen letztgedachte Mündungshöhe e nur bis zu e_1 Höhe vom Unterwasser bedeckt, d. h. ist der Abstand des Unterwassers von der oberen Mündungskante $= e - e_1$, so berechnet sich die Entleerungszeit T_2 aus der Gleichung:

$$T_2 = \frac{2A\eta_1}{\mu b e_1 \sqrt{2g\eta_1}} + \frac{2A\eta_1}{\mu b (e - e_1)\sqrt{2g[\eta_1 - \frac{1}{2}(e - e_1)]}}, \text{ zu}$$

$$\text{III.} \quad T_2 = \frac{2A\eta_1}{\mu b \sqrt{2g}\left\{e_1\sqrt{\eta_1} + (e - e_1)\sqrt{\eta_1 - \frac{1}{2}(e - e_1)}\right\}}.$$

Beispiel. Nach den Angaben d'Aubuisson's[2]) wurde eine Schleusenkammer des Canals von Languedoc in der Zeit von 5 bis 6 Minuten gefüllt, bei welcher $A = 325{,}6$ Quadratmeter war und in Bezug auf Fig. 134, die Druckhöhe über dem Mündungsschwerpunkt

[1]) Hydraulik, §. 120.
[2]) Traité hydraulique, §. 97.

$\eta = 1^m,949$, der Abstand dieses Schwerpunktes vom Unterwasserspiegel, d. i. $k = 0^m,325$ und zwei neben einander liegenden Schützenöffnungen 1,2572 Quadratmeter Inhalt hatten. Es fragt sich, wie sich die Füllzeit nach obigen Formeln berechnet?

Auflösung. Man erhält ohne Weiteres nach Formel I, wenn, aus Tabelle S. 261, $\mu = 0,595$ gewählt wird:

$$T = \frac{325,6\,[2\,.\,1,949 + 0,325]}{0,595\,.\,1,2572\,\sqrt{2\,.\,9,81\,.\,1,949}} = 297,2 \text{ Sec.}$$

d'Aubuisson nimmt $\mu = 0,548$ und findet daher

$$T = 323 \text{ Sec.}$$

Trotzdem letzterer Werth noch besser mit der Beobachtung stimmt als der vorher berechnete, so beruht dennoch die d'Aubuisson'sche Annahme auf Versuchen, deren Resultate etwas bezweifelt werden müssen. Höchst wahrscheinlich ist die Angabe von 5 bis 6 Minuten Füllzeit nicht richtig, was um so wahrscheinlicher ist, als sie nur von Geschichtsschreibern, nicht aber von Hydraulikern angegeben wird. d'Aubuisson verweist daher selbst auf den oben angeführten Versuch Eytelwein's, um den practischen Werth der Formeln vorstehenden Paragraphens zu beurtheilen.

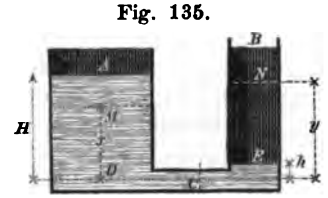
§. 118.

Füllzeit der Kammern gekuppelter Schleusen.

Die Resultate des vorstehenden Paragraphen sind ganz unbrauchbar für den Fall, daß die Druckhöhe des Speisewassers für das vorher leere Gefäß ebenfalls veränderlich ist, was unter Andern beim Anfüllen hinter einander liegender Schleusenkammern, oder bei sogenannten gekuppelten Schleusen [1]) eine practische Anwendung finden kann.

Zur Herleitung der betreffenden mathematischen Ausdrücke für die Füllzeit solcher Schleusen stelle Fig. 135 ABC zwei communicirende Gefäße M und N von prismatischer Form mit den respectiven Querschnitten A und B dar, das Verbindungsgefäß C beider habe den durchaus gleichen Querschnitt a. Ferner sei die anfängliche Druckhöhe im ersten Gefäße H, die variabele daselbst x, die anfängliche Druckhöhe im zweiten Gefäße B sei h, die variabele daselbst y.

Fig. 135.



Sodann erhält man sofort:

$$(1)\ Adx = -Bdy;\quad (2)\ Adx = -\mu a dt \sqrt{2g}\,.\,\sqrt{x-y}.$$

[1]) Gekuppelte Schleusen werden bei großen Gefällen angewandt, um letzteres auf mehrere Schleusen zu vertheilen, d. h. für jede einzelne Schleuse das gewöhnliche Gefälle von 6 bis höchstens 12 Fuß (1,88 bis 3,76 Meter) zu erhalten. Hierüber, so wie über das Füllen und Leeren der Schleusenkammern lese man Hagen, Wasserbaukunst. 2. Theil, 3. Bd., S. 23 und 221.

Die Integration beider Werthe liefert, wenn man beachtet, daß für $x = H$ gleichzeitig $y = h$ wird:

$$Ax + By = AH + Bh.$$

Hieraus ferner:

$$(3)\quad y = \frac{AH + Bh}{B} - \frac{A}{B}x,$$

wofür zur Abkürzung gesetzt werden mag:

$$y = m - nx.$$

Substituirt man letzteren Werth in (2), so folgt leicht, nach gehöriger Integration und Wiederentfernung der Größen m und n:

$$t = -\frac{2A\sqrt{B}}{\mu a (A+B)\sqrt{2g}}\sqrt{[x(A+B) - AH - Bh]} + K.$$

Für die Constante K ergiebt sich aber, weil für $x = H$ die Zeit $t =$ Null ist:

$$K = \frac{2A\sqrt{B}}{\mu a\,(A+B)\sqrt{2g}}\sqrt{B(H-h)}.$$

Daher aus (4) das bestimmte Integral folgt:

$$\text{I.}\quad t = \frac{2A\sqrt{B}}{\mu a\,(A+B)\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{B(H-h)} - \sqrt{[x(A+B) - AH - Bh]}\right\}.$$

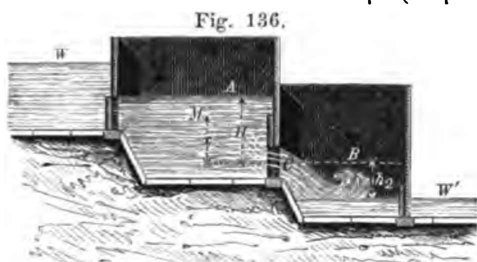
Für die Zeit T, nach welcher das Wasser in beiden Gefäßen (Kammern) gleiche Höhe hat, wird $x = y$ und somit aus (3):

$$x = \frac{AH + Bh}{A + B}.$$

Letzterer Werth in I. substituirt, giebt:

$$\text{II.}\quad T = \frac{2AB\sqrt{H-h}}{\mu a\,(A+B)\sqrt{2g}}.$$

Fig. 136.



Zusatz. Im Vorstehenden ist vorausgesetzt, daß die Ausflußöffnung gleich beim Anfange der Füllung ganz unter Wasser gesetzt ist. Ist dies nicht der Fall, steht vielmehr das Unterwasser um die Größe h_2 unter dem Schwerpunkte C, Fig. 136, der Schützenmündung, so gestalten sich die betreffenden Rechnungen folgendermaßen:

Zuerst erhält man für die Zeit t_1, nach welcher so viel Wasser aus der ersten Kammer in die zweite geflossen ist, daß der Wasserstand der unteren Kammer den Schwerpunkt der Einflußöffnung erreicht:

$$t_1 = \frac{2A}{\mu a\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{H} - \sqrt{x_1}\right\},$$

wo x_1 aus der Gleichung $A(H - x_1) = Bh_2$ zu entnehmen ist.

Eben so erhält man für die Zeit t_2, nach welcher der Wasserstand

in beiden Kammern gleiche Höhe erreicht hat, weil sodann x_1 die anfängliche Druckhöhe bezeichnet, nach II:

$$t_2 = \frac{2AB\sqrt{x_1}}{\mu a (A + B)\sqrt{2g}}.$$

Daher endlich die **ganze** Zeit $T_1 = (t_1 + t_2)$ zum Füllen, bis das Wasser in beiden Kammern in gleichem Niveau steht:

$$T_1 = \frac{2\sqrt{A}}{\mu a\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{AH} - \sqrt{AH - Bh_2}\right\} + \frac{2B\sqrt{A}}{\mu a(A+B)\sqrt{2g}}\sqrt{[AH - Bh_2]}$$

oder

$$\text{III.} \quad T_1 = \frac{2\sqrt{A}}{\mu a\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{AH} - \frac{A}{A+B}\sqrt{AH - Bh_2}\right\}.$$

Beispiel. An einer gekuppelten Schleuse des Canals von Languedoc beobachtete d'Aubuisson[1]) die Füllzeit bis zu gleichem Wasserstande in zwei Kammern zu 2 Minuten 29 Secunden, es fragt sich, welche Zeit sich nach vorstehenden Formeln berechnet, wenn $H = 4^m,14$ und $h_2 = 0^m,24$, ferner $A = 205\square^m$, $B = 215\square^m$, $a = 1\square^m,249$ ist und μ (nach d'Aubuisson) $= 0,548$ gesetzt wird?

Auflösung. Mittelst Formel II. ergiebt sich:

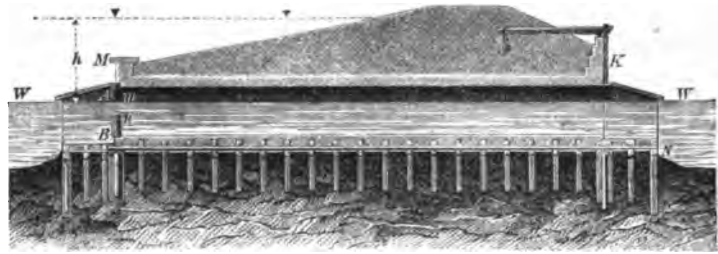
$$T = \frac{2 \,.\, 205 \,.\, 215\sqrt{4,14 - 0,24}}{0,548 \,.\, 1,249 \,.\, 420 \,.\, \sqrt{2 \,.\, 9,81}} = 137 \text{ Sec.} = 2 \text{ Minuten } 17 \text{ Secunden.}$$

Die Differenz von 12 Secunden zwischen der beobachteten und berechneten Zeit schreibt d'Aubuisson dem Umstande zu, daß der Thorschützen noch nicht ganz aufgezogen war, als das Wasser den Mündungsschwerpunkt erreichte.

§. 119.

Zum ferneren Studium des Ausflusses aus Seitenöffnungen bei veränderlicher Druckhöhe, folgen hier noch einige practische Aufgaben.

Fig. 137.



Aufgabe 1. In der Thür AB (Flutthüre) einer größeren Abwässerungsschleuse (eines Sieles) MN, Fig. 137, befindet sich eine Schützen- oder Schoßöffnung mn zum Hereinlassen des frischen Stromwassers, welches nahe der Mündung am Meere seinen Wasser-

[1]) Traité d'hydraulique, Pag. 117.

stand mit der Ebbe und Flut ändert. Beim Schließen der Thür berühre der Wasserspiegel W die obere Kante m der Schoßöffnung und die Flut steige unmittelbar nachher, während der ganzen Flutzeit T auf die Höhe h. Es ist anzugeben, wie viel Wasser durch die Schoßöffnung vom Flächeninhalte a (gegen die ganze Thoröffnung sehr gering) während der vollen Flutzeit ausgeflossen ist, sobald sich das Wasser über eine sehr große Binnenlandfläche ungehindert verbreiten kann.

Auflösung. Da das Gesetz des Steigens und Fallens der Flut und Ebbe an den Meeresküsten und betreffenden Stromschnellen, wohin sich Ebbe und Flut noch erstrecken, fast überall verschieden und insbesondere von der Gestalt der Ufer etc. abhängig ist, so würde die Auflösung unserer Aufgabe die Bekanntschaft einer sogenannten Flutcurve (Flutwelle) für den jedesmaligen Ort voraussetzen, aus welcher man die gehörigen Elemente der Rechnung entnehmen müßte. Nimmt man deshalb für gegenwärtigen Zweck an, daß die Flutcurve aus zwei gemeinen Parabeln AB und BC, Fig. 138, besteht, wovon der Scheitel A der einen im Ebbe-, der der anderen im Flutspiegel liegt[1]), so gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen.

Fig. 138.

Es repräsentire AE die Flutzeit T, EC die Höhe h vom Schwerpunkte der Oeffnung mn aus gerechnet und der Rechnungsabkürzung wegen werde angenommen, daß beide Parabeläste im Punkte B zusammenstoßen, welcher genau in der halben Höhe h liegt, so daß $DE = \frac{h}{2}$, $BD = \frac{T}{2}$ ist. Hiernach erhält man zunächst für den Parameter p dieser Parabeln $p = \frac{\overline{FB}^2}{\overline{AF}} = \frac{T^2}{2h}$.

Zur Berechnung der Wassermenge q, welche in der ersten Hälfte der Flutzeit ins Binnenland fließt, sei ferner $AK = x$ die veränderliche Steighöhe, welche der Zeit $= y$ entspricht. Sodann ist aber $y^2 = px = \frac{T^2}{2h} \cdot x$, $dy = \frac{T}{\sqrt{2h}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ und sonach:

$$dq = \mu a dy \sqrt{2gx}, \text{ d. i.}$$

$$dq = \mu a \frac{T}{2\sqrt{2h}} dx \sqrt{2g} \text{ und}$$

$$(1) \quad q = \mu a \frac{T\sqrt{g}}{2\sqrt{h}} \int_0^{\frac{h}{2}} dx = \frac{\mu a T \sqrt{2gh}}{4\sqrt{2}}.$$

Um eben so eine Gleichung für die Wassermenge q_1 der

[1]) Diese Annahme entspricht so ziemlich der von Hübbe (Reisebemerkungen, Hamburg 1844, S. 41) für Cuxhaven beobachteten Flutwelle.

zweiten Zeithälfte zu erhalten, sei x_1 der veränderliche Wasserstand über dem Schwerpunkte der Mündung mn und y_1 die entsprechende Zeit. Sodann ist: $y_1^2 = p\,(h - x_1) = \frac{T^2}{2h}\,(h - x_1)$ und

$$dy_1 = -\frac{T}{\sqrt{2h}} \cdot \frac{dx_1}{2\sqrt{h - x_1}},$$

oder, weil hier y_1 abnimmt, wenn x_1 wächst: $dy_1 = \frac{T}{\sqrt{2h}} \cdot \frac{dx_1}{2\sqrt{h - x_1}}$, daher:

$$dq_1 = \mu a dy_1 \sqrt{2gx_1}, \text{ d. i.}$$

$$dq_1 = \frac{\mu a T \sqrt{2g}}{\sqrt{2h}} \cdot \frac{dx_1 \sqrt{x_1}}{2\sqrt{h - x_1}} \text{ und hieraus:}$$

$$q_1 = \frac{\mu a T \sqrt{2g}}{2\sqrt{2h}} \int\limits_{\frac{h}{2}}^{h} \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{hx_1 - x_1^2}}\,{}^{1)} = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\mu a T \sqrt{2gh}}{4\sqrt{2}}.$$

Sonach die während der ganzen Zeit T ins Binnenland geflossene Wassermenge $= Q$:

$$Q = q + q_1 = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\mu a T \sqrt{2gh}}{4\sqrt{2}}, \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad Q = 0{,}631 \,.\, \mu a T \sqrt{2gh}.$$

Zusatz. Hätte man vorausgesetzt, daß die Flut in gleichen Zeiträumen auf gleiche Intervalle steigt, so würde man für eine veränderliche Zeit $t < T$ erhalten haben:

$$T : t = h : x \text{ oder } dt = \frac{T}{h}\,dx.$$

$$dQ = \mu a dt \sqrt{2gx} = \mu a \frac{T}{h}\,dx \sqrt{2gx} \text{ und}$$

$$Q = \mu a \frac{T}{h} \sqrt{2g} \int\limits_0^h x^{\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{2}{3}\,\mu a T \sqrt{2gh},$$

$$\text{II.} \quad Q = 0{,}666 \,.\, \mu a T \sqrt{2gh}.$$

Aus dem Vergleiche von I. und II. dürfte, mindestens für ähnliche practische Fälle, hervorgehen, daß man bei der Schwierigkeit, ein mathematisches Gesetz aus der Flutcurve abzuleiten, welche für einen bestimmten Ort beobachtet wurde, der letzteren Annahme wird folgen können.

---

1) $\int \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{hx_1 - x_1^2}} = -\sqrt{hx_1 - x_1^2} + \frac{h}{2} \text{arc}\left[\cos = \left(\frac{h - 2x_1}{h}\right)\right] + \text{Const.}$

§. 120.

Aufgabe 2. Es ist die Spülzeit bei einer Spülschleuse, Fig. 139 (Längendurchschnitt) und Fig. 140 (Grundriß)[1]) unter

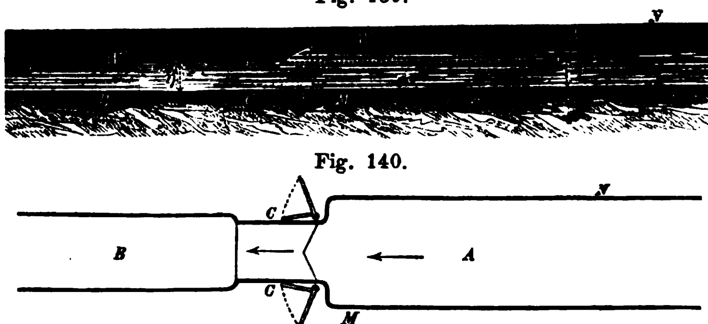


Fig. 139.

Fig. 140.

der Voraussetzung zu berechnen, daß das Wasser (Unterwasser) W' im Vorhafen B fortwährend gleiche Tiefe $= \eta$ behält, der anfängliche Abstand des ungesenkten Oberwasserspiegels W vom Unterwasserspiegel $= h$, am Ende der Spülzeit dagegen h_1 ist, und bei letzterem Wasserstande das Schließen der Thore erfolgt. Die sogenannte Luftöffnung (Ausflußmündung) der Schleuse habe eine Breite $CC = b$ und das Spülbassin MN enthalte (unter Voraussetzung prismatischer Form) einen Flächeninhalt von A Quadratfuß. Alle sonstigen Bezeichnungen mögen die bisherigen bleiben.

Auflösung. Setzen wir die veränderliche Wassertiefe des Oberwassers $= x$, die am Anfange des Spülens $h + \eta$, am Ende $h_1 + \eta$ ist, bezeichnen ferner mit dt ein Element der Spülzeit, so ist zuerst nach Formel II, S. 316:

$$-Adx = \mu b x\, dt \sqrt{2g\,(x - \eta)},$$

eine Gleichung, deren bestimmtes Integral zwischen den Grenzen $\eta + h$ und $\eta + h_1$ genommen und auf t reducirt giebt:

$$\text{I. } t = \frac{2A}{\mu b \sqrt{2g\eta}} \left\{ \operatorname{arc} . \operatorname{tg} \sqrt{\frac{h}{\eta}} - \operatorname{arc} . \operatorname{tg} \sqrt{\frac{h_1}{\eta}} \right\}.$$

Geht man dagegen von Formel I, S. 315, aus, so ist zu setzen:

$$-Adx = \tfrac{2}{3}\,\mu_1\,(x - \eta)\, b\,dt_1 \sqrt{2g\,(x - \eta)} + \mu_2\,\eta\, b\, dt_1 \sqrt{2g\,(x - \eta)}.$$

Für $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ folgt hieraus:

$$dt_1 = \frac{-Adx}{\mu b \sqrt{2g} \left\{ \frac{2}{3}\,(x - \eta)^{\frac{3}{2}} + \eta\,(x - \eta)^{\frac{1}{2}} \right\}},$$

---

[1]) Es bezieht sich diese Aufgabe auf die Bremerhaven-Spülschleuse mit Fächerthoren (Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst. 2. Theil, 3. Bd., S. 300). Die hier am Ende folgenden Zahlenwerthe verdanke ich der Güte des beim Baue beschäftigt gewesenen Ingenieurs (jetzigen Geheimen Regierungsrathe etc.) Herrn von Kaven in Aachen.

wovon das bestimmte Integral zwischen den obigen Grenzen ist:

$$\text{II. } t_1 = \frac{A\sqrt{6}}{\mu b\sqrt{2g\eta}}\left\{\text{arc . tg}\sqrt{\frac{2h}{3\eta}} - \text{arc . tg}\sqrt{\frac{2h_1}{3\eta}}\right\}.$$

Beispiel. Bei der Bremerhaven-Schleuse ist $A = 640{,}000$ Quadratfuß[1]), $\mu = 14$ Fuß, $h = 4\frac{1}{2}$ Fuß, $h_1 = 1$ Fuß und $b = 40$ Fuß, ferner ist $g = 33',6$ anzunehmen.

Auflösung. Für die Formel I. ist nach S. 316:

$$\mu = 0{,}512$$

als Mittelwerth zu nehmen, daher:

$$t = \frac{2 \,.\, 640000}{0{,}512 \,.\, 40\sqrt{33{,}6 \,.\, 28}}\left\{\text{arc . tg}\sqrt{\tfrac{45}{140}} - \text{arc . tg}\sqrt{\tfrac{1}{14}}\right\}, \text{ d. i.}$$

$$t = 2037{,}65 \,.\, \{0{,}516 \,.\, 0{,}216\} = 2037{,}65 \,.\, 0{,}255,$$

$$t = 519{,}60 \text{ Secunden.}$$

Für die Formel II. werde mit Eytelwein (wie bereits S. 317) $\mu = 0{,}633$ angenommen, weshalb folgt:

$$\frac{A\sqrt{6}}{\mu b\sqrt{2g\eta}} = \frac{640000\sqrt{6}}{0{,}633 \,.\, 40\sqrt{33{,}6 \,.\, 28}} = 2018{,}56 \text{ und}$$

$$t_1 = 2018{,}56\left\{\text{arc . tg}\sqrt{\frac{2 \,.\, 45}{3 \,.\, 140}} - \text{arc . tg}\sqrt{\frac{2}{42}}\right\}, \text{ d. i.}$$

$$t = 2018{,}56\,\{0{,}433 - 0{,}214\},$$

$$t = 442{,}10 \text{ Secunden.}$$

Die Beobachtung gab beinahe 8 Minuten = 480 Secunden, was, merkwürdig genug, das arithmetische Mittel aus beiden berechneten Werthen ist.

---

[1]) Bremer Maaße, wovon 1 Bremer Fuß = 0,922 preuß. = 0,289 Meter.

Zweiter Abschnitt.

Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.

§. 121.

Geschichtliche Notizen.

Die Culturgeschichte der Erdbewohner lehrt bekanntlich[1]), daß sich schon die allerältesten, gebildeten Völker, die Aegypter und Assyrer, bemühten, mehr oder weniger von der Noth getrieben, die fließenden Binnengewässer ihrer Gebiete zu beherrschen, solche zum Nutzen für Landwirthschaft und Verkehr verwendbar zu machen, die Gefährlichkeit ihrer Hochfluten zu verhindern und deren vortheilhafte Beschiffung zu ermöglichen oder zu erhöhen, kurz Alles aufzubieten, die natürlich vorhandenen Verhältnisse der fließenden Gewässer zum Wohle der Menschen zu gestalten.

Dem Canal- und Teichbau widmeten die Aegypter[2]) die größte Aufmerksamkeit, errichteten Dämme zu Schutzwehren der Städte und registrirten die Nilwasserstände durch besondere Meßapparate (Nilmesser), wovon sich einer in Oberaegypten, an der Insel Elephantina, ein anderer (wahrscheinlich) in Coptus für Mittelägypten und ein dritter in Memphis für Unteraegypten vorfand[3]). Schleusenwerke waren wahrscheinlich durch ganz Aegypten und zwar sehr häufig und von beträchtlicher Größe angelegt; ihre Aufsicht führten geeignete Kunstverständige, welche das Oeffnen und Schließen der Thore und Thüren und den Ausfluß und Einfluß der Gewässer überwachten[4]).

Nach den Aegyptern hatten die Assyrer[5]) das kühnste und ausgedehnteste Wasserbausystem, regulirten die Gewässer des Euphrat und Tigris, hemmten deren nachtheilige Wirkungen durch gewaltige Steindämme und erbauten flußbreite Canäle und andere geeignete Werke.

Persien[6]) besaß in dieser altgeschichtlichen Zeit bereits eine eigenthümliche Gattung unterirdischer Canäle, Karuz genannt, die, ganz in

---

[1]) In der Allgemeinen Maschinenlehre des Verfassers, Bd. IV, S. 545 ff., nach Herodot und anderen zuverlässigen Quellen.

[2]) Hirt, „Ueber den allmäligen Anbau und Wasserbau des alten Aegyptens". Berlin 1815. Ferner Prof. Schmidt in der deutschen Bauzeitung, Jahrg. 1878, S. 210 ff. (Zur Geschichte des Wasserbaues in Aegypten etc.).

[3]) Nilmesser (der alten Zeit) findet man beschrieben und abgebildet in (dem Werke Napoleon I.) „Description de l'Égypte". Tome I, Pag. 146 und 201, so wie Pag. 31 und 33. Ferner berichtet hierüber Wilkinson in seinem Werke „A popular account of the ancient Egyptians". Vol. II, Pg. 249 und 257.

[4]) Auch bei Wilkinson in dessen zweibändigem Werke „A popular account of the ancient Egyptians". Vol. II, Pg. 5—11. — Herodot, besonders die (englische, illustrirte) Ausgabe von Rawlison und zwar Vol. I, Pag. 389 und Vol. II, Pag. 278. Endlich auch in Engineering (The British Association at Bristol), Jahrg. 1875, Pag. 142.

[5]) Hirt, Die Geschichte der Baukunst bei den Alten. Berlin 1821, S. 148 ff.

[6]) Ebendaselbst, S. 178.

Felsen gehauen, süßes Wasser aus reichen Quellengebieten durch ein felsiges Vorland in die persische Ebene leiteten.

In Indien wurden künstliche Wasserreservoire (Sammelteiche) gepflegt, worin man die massenhaften Niederschläge der Regenzeit aufspeicherte und in der Zeit der Trockenheit durch zahlreiche Canäle den wasserbedürftigen Ländereien zuführte.

Auch in China, wo Land- und Gartenbau, nach Bedürfniß und Liebhaberei, schon in den ältesten Zeiten sorgfältig gepflegt wurden, stand die Wasserwirthschaft in großer Blüthe[1]).

Im zweiten Zeitalter Griechenlands (658 bis 476 vor Chr.) hatte man wahrscheinlich dort bereits gründliche Erfahrungen über den Bau der Wasserleitungen gesammelt, was namentlich durch die große Leitung zu Samos bestätigt wird[2]).

Von den Wasserbauten der Römer[3]) sind es hauptsächlich die Wasserleitungen (Aquaducte) der Hauptstadt, die zu den bewunderungswürdigsten der damaligen Bauwerke gehörten. Aus weiter Ferne zogen sich die Leitungen durch die Campagna, ganze Bäche Wassers wurden in mannshohen bedeckten Canälen nach Rom geführt, damit auch die höchsten Punkte der Stadt der Wohlthat des Wassers theilhaftig wurden.

Die erste Wasserleitung erhielt Rom bereits 442 vor Chr. durch den Censor Appius Claudius, weshalb sie Aqua Appia genannt wurde[4]). Die heute noch berühmteste (dem Zeitalter nach dritte) Leitung, die Aqua Marcia[5]), wurde 146 vor Chr. unter dem Consulate des Sulpicius Galba und des Aurelius Cotta hergestellt[6]).

Als die Leitungen der Appia und der nach ihr angelegten (zweiten) Leitung, die des Anio vetus, baufällig geworden waren, gab der Senat einem gewissen Marcius, welcher damals als Prätor zwischen Bürgern und Auswärtigen Recht sprach, den Auftrag, nicht nur diese Leitungen wieder herzustellen, sondern es sich auch angelegen sein zu lassen, zu erforschen, ob der Stadt nicht noch andere Gewässer zugeführt werden könnten. Dieser nun erbaute aus Quadersteinen weitere Leitungen und führte durch sie das zum Vortheile der Bürger Roms erworbene Wasser in die Stadt, welches (noch) heute von seinem Urheber den Namen „Aqua Marcia“ führt[7]).

---

[1]) Reuleaux, „Ueber das Wasser“. Berlin 1871, S. 33 ff.

[2]) Hirt, Die Geschichte der Baukunst bei den Alten. Bd. 1, S. 256.

[3]) Becker, Handbuch der Römischen Alterthümer. Erster Theil, S. 701. — Ersch und Gruber, Encyklopädie der Wissenschaften und Künste. Fünfter Theil, der Artikel „Wasserleitungen“ (Aquaducte).

[4]) Becker, a. a. O., S. 702.

[5]) Frontinus, Ueber die Wasserleitungen der Stadt Rom. In der deutschen Uebersetzung, welche 1841 Dederich in Wesel besorgte, S. 244.

[6]) Der Verfasser kann nicht umhin, der herrlichen Limonaden zu gedenken, welche demselben bei seinem Besuche Roms, im Jahre 1871, mit vielen anderen Besuchern der ewigen Stadt, an dem Brunnen des Marcia-Wassers, auf der Piazza Colonna, von schönen Händen gereicht wurden.

[7]) In der deutschen (von Dederich besorgten) Uebersetzung der Schrift des Frontinus wird S. 245 bemerkt, „daß die Marcia an der Valeris'schen Straße quillt und zwar beim 36. Meilensteine, 3000 Schritt von Rom kommend rechts. Ihre Leitung hat von der Fassung bis zur Stadt eine Länge von 61710$\frac{1}{2}$ Schritt“ etc.

Zu Frontinus Zeit (unter Kaiser Nerva, 96 bis 98 nach Chr.), der damals Aufseher der Wasserleitungen war, wurde Rom durch 9 Aquaducte mit Wasser versorgt[1]), welche der Stadt täglich 27 Millionen Cubikfuß (englisch) oder 764 Millionen Liter Wasser zugeführt haben sollen[2]).

In seiner Schrift berichtet Frontinus auch über die Maaße und Mittel, welche bei Vertheilung der Nutzwasser in der Stadt Rom in Anwendung gebracht wurden, bemerkt dabei u. A., daß die aus einem Ausgußrohre fließende Wassermenge nicht blos von der Weite dieses Rohres, sondern auch von der Höhe des zugehörigen Sammelbehälters abhänge, ohne jedoch ein bestimmtes Gesetz für die Abhängigkeit von Durchmesser und Druckhöhe angegeben zu haben, weshalb es zweifellos ist, daß Frontinus ein solches Gesetz überhaupt nicht gekannt hat, einfach, weil ihm die Gesetze des freien Falles der Körper unbekannt waren. Schon zu Frontinus Zeiten befanden sich Kunst und Wissenschaft in Verfall, bald nachher wurde jedoch ganz Europa in die gräulichste Barbarei versenkt, ein Zustand, der bekanntlich 1300 Jahre dauerte. Zuerst in Italien und zwar in der Zeit der Mediceer (von 1400 an) erholte sich der menschliche Geist aus der langen Erstarrung, insbesondere unter der Regierung des Cosmus (der 1464 starb), und zwar anfänglich im Gebiete der schönen Künste, nachher aber auch in den mathematischen, astronomischen und Naturwissenschaften, wo bald nachher die Namen Leonardo da Vinci[3]) und Galilei[4]) (Galileo) weithin glänzten.

Leonardo war das größte Genie des 15. Jahrhunderts. Berühmt als Maler (man denke nur an sein herrliches „Abendmahl Christi“), war er auch Philosoph, Dichter, Musiker, Architekt, Ingenieur und Meister in der Behandlung naturwissenschaftlicher und technischer Fragen[5]). Von neueren italienischen Schriftstellern[6]) wird Leonardo als der Urheber einer systematischen Hydraulik bezeichnet.

Beim Baue des berühmten Mailänder Domes war Leonardo hervorragend beschäftigt[7]). Nach der unten citirten Quelle[8]) sollen von Leonardo

---

[1]) Nach Größe der Druckhöhe geordnet, waren die damaligen 9 Leitungen folgende: Anio vetus (die höchste von allen) — Claudia — Julia — Tepula — Marcia — Anio novus — Virgo — Appia und Alsietina (unter allen die niedrigste).

[2]) Nach (des Amerikaners) J. H. Parker's Buche „Aqueducts of Rom“, sollen später, nachdem die Wasserleitungen des Trajan und des Marcus Aurelius vollendet waren, die Zahl der Leitungen $9 + 5 = 14$ betrug, täglich $332\frac{1}{4}$ Gallon oder 1508 Liter Wasser pro Kopf der Bevölkerung in die Stadt geführt worden sein. Man sehe hierüber auch den Scientific American vom 11. August 1877.

[3]) Leonardo da Vinci, geb. 1452 zu Vinci bei Florenz; gest. 1519 auf Schloß Cloux bei Amboise.

[4]) Galilei, geb. 1564 zu Florenz und gest. 1642 zu Arcetri im Toscanischen.

[5]) Dr. H. Grothe „Leonardo da Vinci als Ingenieur und Philosoph“. Ein Beitrag zur Geschichte der inductiven Wissenschaften und der Technik des Maschinenwesens. Eine fleißige (nach italienischen Quellen bearbeitete) Abhandlung, die zuerst in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, Jahrg. 1875, S. 96—189, veröffentlicht wurde.

[6]) Die betreffenden Quellen bei Grothe etc., a. a. O., S. 115.

[7]) Ebendaselbst, S. 107.

[8]) Grebenau, „Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen“. München 1867, S. 16 (Note).

angegebene Schleusen zum ersten Male[1]) an dem Canale von Tessin nach Mailand benutzt worden sein, um Steine zum Dombaue herbeizuführen. Um 1497 beschäftigte den Leonardo die Schiffbarmachung des Canales von Martesano, die Canalisation des Ticino, so wie er außerdem das Wasser der Adda nach Mailand leitete, den schiffbaren Canal von Martesana nach den Thälern von Chiavenna und dem Veltlin zog, das Project des Canals von Romorantin entwarf, welcher den Zweck hatte, das Land zu berieseln und fruchtbar zu machen.

Bei diesen vielen und verschiedenen hydraulischen Arbeiten dürfte der von Boileau[2]) gelieferte Nachweis richtig sein, daß Leonardo da Vinci zur Ermittlung der Geschwindigkeit betreffender fließender Gewässer, zuerst die Methode der Doppelschwimmer in Anwendung gebracht habe, worauf wir später (S.363) ausführlich zurückkommen werden.

Nach bestimmten hydraulichen Gesetzen für die Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen zu forschen, scheint sich Leonardo nicht zur Aufgabe gemacht zu haben. Dies hat vielmehr zuerst ausschließlich Galilei, mehr noch seine Schüler und Zeitgenossen beschäftigt.

Galilei's directe Wirksamkeit in dieser Richtung ist allerdings nicht groß gewesen[3]), vielmehr scheint er vor der wissenschaftlichen Behandlung der hydraulischen Aufgaben eine gewisse Scheu gehabt zu haben, welches folgender Ausspruch bestätigen würde, den er gemacht haben soll:[4]) „Ich habe weniger Schwierigkeiten in der Entdeckung der Bewegung der Himmelskörper gefunden, ungeachtet ihrer erstaunlichen Entfernung, als in den Untersuchungen über die Bewegung des fließenden Wassers, welche doch unter unseren Augen vorgeht“.

Mehr als wahrscheinlich ist jedoch, daß Galilei seinen Schülern zuerst eine Theorie des Wasserabflusses aufgestellt habe, welche sich auf die Gesetze der Bewegung fester Körper auf schiefen Ebenen (ohne Beachtung der Reibung) gründete[5]). Besondere Aufmerksamkeit scheint Galilei der Frage über den Einfluß der Krümmungen eines Flusses in Bezug auf den Aufenthalt des Wassers zugewandt zu haben. In der auf folgender Seite, Note 1, angegebenen Quelle sagt hierüber der große Naturforscher, der Mann der Thatsachen, Folgendes:

---

[1]) Es ist (nach den Vorgängen der Aegypter und Assyrier) unrichtig, wenn man Leonardo als den Erfinder der Schleusen bezeichnet.

[2]) Traité de la mesure des eaux courantes etc. Pag. 262.

[3]) Zeitschr. des österr. Ingenieur- und Architecten-Vereins. Jahrg. 1869, S. 6. Nach Bernard's 1787 in Paris erschienenen „Nouveaux principes d'hydraulique“.

[4]) Brünings, „Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers“. Frankfurt a. M. 1798, S. 4.

[5]) Wie der große Meister zur Erfindung des Barometers, durch seinen Schüler Toricelli (S. 180), die erste Veranlassung gegeben hat, so ist es kaum zweifelhaft, daß der Entdecker der Bewegungsgesetze fester Körper auf der schiefen Ebene, auch mehr als Andeutungen machte, daß die Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen auf ähnlichen Gesetzen beruhe. Brünings in seiner Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, S. 8, ist genau derselben Ansicht.

Der Verfasser benutzt hier die Gelegenheit, (besonders) junge Studirende auf Dr. Caspar's Schrift: „Galileo Galilei. Zusammenstellung der Forschungen und Entdeckungen Galilei's auf dem Gebiete der Naturwissenschaft“, aufmerksam

„Was die Krümmungen und Biegungen eines Canales anlangt, so bin ich nicht abgeneigt, zuzugeben, daß die aus geradlinigen Winkeln gebildeten und vorzüglich, wenn sie spitz oder rechtwinklig, oder beinahe rechtwinklig sind, den Lauf des Wassers beträchtlich und auch merkbar verzögern können. Wenn aber die Winkel stumpf sind, und selbst, wenn sie von geraden Linien eingeschlossen werden, so glaube ich, daß die Verzögerung nur gering sei. Wenn aber der Fluß, wie man zu sagen pflegt, sich schlängelt und seine Biegungen einen Bogen bilden, so hege ich entschieden die Ansicht, daß der Aufenthalt des Wassers dann ganz unmerkbar ist".[1])

Im Jahre 1628 erschien von Castelli[2]) (Benedictiner von der Congregation des Monte Cassino), dem Schüler und treuesten Freunde[3]) Galilei's, das erste wissenschaftliche Werk über Hydraulik als Abhandlung vom Maaße fließender Gewässer (Della misura dell' acque correnti)[4]). In dieser Schrift findet sich der allgemeine Satz vor, daß sich bei einem im Beharrungszustande fließenden Wasser die Querschnitte umgekehrt wie die Geschwindigkeiten verhalten. Hiernach führte derselbe die Geschwindigkeit als ein Element in der Berechnung des Ausflußquantums ein und war demnach der erste, welcher auf den Irrthum aufmerksam machte, als wenn bei der Berechnung des strömenden Wassers allein die Profile und nicht auch die Geschwindigkeiten in Rechnung zu bringen wären. Leider hatte Castelli über die Abhängigkeit zwischen Geschwindigkeit und Tiefe eines Flusses eine falsche Ansicht. Nach ihm sollte die Geschwindigkeit der Wasserfäden den Tiefen proportional sein, so daß das Gesetz der Veränderung, die sogenannte Geschwindigkeitsscala, ein Dreieck bilden müsse, dessen Spitze in dem Wasserspiegel und dessen Basis am Boden liege.

Toricelli[5]) war es (1644) namentlich, welcher die Castelli'sche Ansicht widerlegte und durch sorgfältig angestellte Versuche zeigte, daß hier dasselbe Gesetz wie beim freien Falle der Körper herrsche, weshalb er auch schloß, daß die Acceleration oder die Beschleunigung der Bewegung des Wassers auf schiefen Ebenen von dem Gefälle abhänge. Hiernach darf man annehmen, daß die heutige wissenschaftliche Hydraulik zur Zeit des 17. Jahrhunderts in Italien entstand.

---

zu machen, die 1854 in Stuttgart (bei Ebner & Seubert) erschienen ist. Das Capitel über die Bewegung der Körper auf schiefer Ebene beginnt in dieser Schrift S. 31.

[1]) Lettera di Galileo Galilei sopra il fiume Bisenzio a Rafaello Staccoli. Da Bellosguarda li 16. Gennajo 1630. Nach Bloehm's „Versuch einer näheren Erörterung der Mittel, durch welche der Handelsverkehr in den Elbgegenden des Fürstenthums Lüneburg erhalten und gehoben werden kann". Göttingen 1841, S. 73.

[2]) Castelli (S. 187 dieses Buches).

[3]) Castelli leistete Galilei (als dessen Nachfolger in der Professur der Universität Pisa im Jahre 1613) wesentliche Dienste in dem Kampfe mit der römischen Curie, worüber u. A. nachzulesen ist in Carl von Gebler's Werke „Galileo Galilei". Stuttgart (bei Cotta) 1876, S. 56, 69 ff.

[4]) Bossut's „Lehrbegriff der Hydrodynamik". Deutsch von Langsdorf, Bd. II, S. 439 und 440.

[5]) Toricelli (S. 187).

An mehreren Stellen dieses Landes fanden sich hierzu besondere Veranlassungen. In Oberitalien, wo von den Alpen viele wilde Wasser herabstürzen, und bevor sie sich in den Po ergießen, die Besitzungen einer Menge kleiner Potentaten durchströmten, trachtete Jeder, sich diese unschädlich zu machen. In Mittelitalien, wo zahlreiche Bäche ihren Ursprung in den Apenninen finden, konnten die den Arno u. s. w. zufließenden Wasser in gleicher Weise gefährlich werden. Bei dem Bestreben der Anwohner, sich hiergegen zu schützen, entstanden die zahlreichen Streitigkeiten, insbesondere zwischen den Städten Bologna, Modena und Ferrara. Hierüber sind sehr viele Bücher geschrieben worden, für die Mehrzahl der Betheiligten unnütz oder schädlich, oft genug das Werk (hinsichtlich der betreffenden Fächer) unwissender Menschen.

Aehnliches fand sich an den Ufern der Tiber vor, überall hatte man sich nach Mitteln zur Beherrschung der fließenden Wasser umgesehen, so daß der Gedanke, die Gesetze ihrer Bewegung aufzusuchen, durch diese Bemühungen sehr bald erweckt werden mußte. Gleichzeitig wurden, zufolge der sich überall findenden kleinstaatlichen Grenzen und naturgemäß sich widerstreitenden Interessen, häufige und erbitterte Erörterungen hervorgerufen, worüber uns die Schriften von Castelli, Guglielmini[1]), Manfredi[2]), Zendrini[3]), später noch Brünings[4]) u. A. berichten. Die lange Polemik regte alle Kräfte des Geistes auf, welche der Wissenschaft ohne solche Berührung wohl niemals würden zu Gute gekommen sein.

Guglielmini folgte der Anschauung des Toricelli, d. h. er nahm an, daß die Geschwindigkeit des sich in Canälen und Flüssen bewegenden Wassers (analog dem Gesetze über den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen), wie die Quadratwurzel aus der Tiefe wachse, demzufolge also die in einer Verticalen auftretenden Geschwindigkeiten eine parabolische Scala bilden müßten. Eben so untersuchte Guglielmini Alles, was sich auf die Bewegung des Wassers in Leitungen bezieht, er bestimmte die Abmessungen dieser Wasserleitungen in Rücksicht auf ihr Gefälle und die Wassermenge, welche sie abführen, u. dgl. m. Die betreffende Schrift hierüber erschien 1690 unter dem Titel: „Della misura dell' acque correnti“ (Vom Messen fließender Wasser). Dieser Arbeit folgte 1697 „Della natura de fiumi“ (Abhandlung über die Natur der Flüsse). Diese Schrift fand zu ihrer Zeit den größten Beifall, deren

---

[1]) Guglielmini (geb. 1655 zu Bologna, gest. 1710 zu Padua), Dr. med., Generalaufseher der Gewässer des Bolognesischen und daneben Professor der Mathematik und Hydrometrie (seit 1694) an der Universität Bologna, dann Professor der Mathematik (1698) und der Medicin an der Universität zu Padua.

[2]) Manfredi (geb. 1674 zu Bologna, gest. 1739 ebendaselbst), Dr. juris, seit 1699 Professor der Mathematik an der Universität zu Bologna, dann 1704 auch Oberaufseher der Wasserleitungen daselbst. Seine hydraulischen Arbeiten sind abgedruckt in der „Raccolta di autori che trattano del moto dell' acque“. II, Pag. 374.

[3]) Zendrini (geb. 1679 zu Saviore, gest. 1747 zu Venedig), Dr. med. (Padua 1701), Mathematiker und Wasserbaumeister der Republik Venedig seit 1720.

[4]) Brünings, „Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers“. Deutsch von Krönke, S. 3.

letzte Ausgaben Manfredi[1]) mit lehrreichen Anmerkungen bereicherte. Darin handelt der Verfasser (entsprechend der Galilei'schen Lehre von der Beschleunigung schwerer Körper) von der Bewegung des Wassers, welches entweder lothrecht oder längs eines schief gegen den Horizont geneigten Bettes herabläuft; er macht auch einen Versuch, die Resultate der Theorie so zu modificiren, wie es der Widerstand der Luft, die Reibung und überhaupt alle Hindernisse erfordern, welche das Wasser bei seiner fortschreitenden Bewegung findet und seine Geschwindigkeit vermindern können. Weiter handelt Guglielmini vom Ausfluß eines Stromes in einen anderen oder ins Meer, von der Vereinigung mehrerer Flüsse, vom Steigen und Fallen der Flüsse etc., kurz, er berührt fast alle Verhältnisse und Umstände, welche für den rationellen Hydrotekten von Nutzen sein können. Deshalb wird auch behauptet[2]), daß Guglielmini die erste wirkliche Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen aufgestellt habe und daß er den Namen des größten Meisters der italienischen hydraulischen Schule verdiene[3]).

Recht gut abgefaßte und ziemlich vollständige Auszüge aus den beiden vorgenannten Werken Guglielmini's liefert Bossut im 2. Theile seines Lehrbegriffes der Hydrodynamik, worauf hier verwiesen werden muß[4]).

Grandi[5]), dessen Tractat „Del movimento dell' acque“ etc. sich ebenfalls in der Raccolta befindet, hält wegen der Hindernisse, welche das Wasser im Bette zu überwinden hat, die Annahme von Guglielmini für nicht genügend, doch behält er noch eine parabolische Geschwindigkeitsscala, indem er annimmt, daß sich die Geschwindigkeiten, wie die Quadratwurzeln der Abstände von einem gewissen Punkte über dem Wasserspiegel verhalten. Ausführlichere Notizen über Grandi's Arbeiten finden sich wieder bei Bossut[6]) und Brünings[7]).

Erwähnt zu werden verdient noch, daß seiner Zeit auch der gelehrte italienische Mathematiker Frisi[8]), in seinem 1777 zu Mailand erschienenen Werke: „Instituzioni di Meccanica, d'Idrostatica, d'Idrometria“ etc., der Grandi'schen Theorie huldigte. Frisi hat sich auch durch andere hydrotechnische Arbeiten[9]) einen Namen gemacht, insbesondere durch

---

[1]) Manfredi (geb. 1674 zu Bologna, gest. 1739 ebendaselbst), 1699 Professor der Mathematik zu Bologna, dann 1704 auch Oberaufseher der Wasserleitungen daselbst. Die meisten seiner hydraulischen Arbeiten sind abgedruckt in der „Raccolta degli autori che trattano del moto dell' acque“. Firenze 1723.

[2]) Robert Gordon in seinem „Fragment containing a discussion of a new Formula for the flow of Water in open Channels“. Nach Bornemann im Civil-Ingenieur. Jahrg. 1877, S. 47.

[3]) Grebenau, „Humphreys und Abbot's Theorie der Bewegung des Wassers“, S. 16, Nr. 4.

[4]) Deutsch von Langsdorf. Bd. 2, S. 443 bis mit 458.

[5]) Grandi (geb. 1671, gest. 1742), Professor an der Universität zu Pisa.

[6]) Hydrodynamik (Deutsche Bearbeitung), Bd. 2, S. 458.

[7]) Brünings, Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, S. 13 ff.

[8]) Frisi, geb. 1728, gest. 1784.

[9]) Nach Brünings, a. a. O., S. 16, durch eine Abhandlung über Vertheilung und Zusammenfluß der Ströme.

die in drei Bücher getheilte Schrift: „Del moto di regolare i fiume i torrenti“, die auch Bossut bespricht[1]).

Der Erste, welcher durch Versuche nachwies, daß in Bezug auf Geschwindigkeitsänderung des fließenden Wassers von der Oberfläche nach dem Boden hin gerechnet, oft keine Zunahme, sondern im Gegentheil eine Abnahme stattfinden könne, war der uns bereits hinlänglich bekannte Mariotte[2]). Dieser verdienstvolle Physiker nahm seine ersten Geschwindigkeitsmessungen in einem kleinen Flusse vor und zwar bediente sich derselbe hierzu der schon von Leonardo da Vinci in Anwendung gebrachten Doppelschwimmer, wozu er Wachskügelchen benutzte, die mittelst Fäden unter einander verbunden waren[3]). Wie nachher durch spätere Beobachtungen bestätigt wurde, ging in der That hieraus hervor, daß die Geschwindigkeit mit wachsender Tiefe abnimmt, außer im Falle eines Aufstaues durch plötzliche Verengung des Querschnittes.

Zu fast gleichen Resultaten gelangte der französische Gelehrte und Wasserbaumeister Henri Pitot[4]), der mit einem nach ihm benannten Instrumente (Pitot's Röhre), worauf wir später ausführlich zurückkommen werden, Messungen in verschiedenen Tiefen der Seine bei Paris anstellte, wobei er ebenfalls fand, daß die Geschwindigkeiten von oben nach unten zu abnehmen.

Von Italienern, welche sich (namentlich) um die Ermittlung des Gesetzes der Geschwindigkeitsänderungen von der Oberfläche zum Boden, des in Canälen und Strömen fließenden Wassers, durch Anstellung von Versuchen verdient machten, sind (in dieser Zeit) insbesondere folgende vier zu nennen: Zendrini[5]), Lecchi[6]), Michelotti[7]) und Lorgna[8]), die sich zugleich sämmtlich des sogenannten Stromquadranten[9]) als Geschwindigkeitsmessers bedienten.

Zendrini stellte seine Versuche im Po an und zwar an einer 5 Fuß 8 Zoll tiefen Stelle dieses Flusses, wobei er die im Wasser tauchende Kugel an einem 7 Fuß langen Faden aufgehangen hatte.

Leider lieferten die meisten Versuche, welche sich auf die Ermitt-

---

[1]) Bossut (II, S. 463 der deutschen Uebersetzung) hebt hervor, daß diese drei Bücher über wichtige practische Fragen handeln, z. B. über Flüsse, welche über Grand fließen, Sand und Steine mit sich führen etc.

[2]) Mariotte, S. 137 und S. 187.

[3]) „Traité du mouvement des eaux“ (Ausgabe von 1700), Pag. 198 ff. In der deutschen Ausgabe (von Meinig) S. 213 ff.

[4]) Pitot (geb. 1695, gest. 1771), gelehrter Mathematiker und Wasserbaumeister der Staaten von Languedoc.

[5]) Zendrini (geb. 1679, gest. 1747), Doctor med. in Padua, dann Mathematicus und Wasserbaumeister der Republik Venedig.

[6]) Lecchi (geb. 1702, gest. 1776), Prof. der Mathematik zu Pavia, dann Mathematicus und Hydraulicus der Kaiserin Maria Theresia.

[7]) Michelotti (geb. 1710, gest. 1777). Siehe S. 198.

[8]) Lorgna (geb. 1730, gest. 1796), Brigadier und Gouverneur der Militärschule in Verona.

[9]) Eine im Wasser untertauchende Kugel, aufgehangen an einem Faden, den man im Mittelpunkte eines (rahmenförmigen) Kreisquadranten befestigte. Specielles hierüber in dem mit „Tachometer“ überschriebenen Paragraphen S. 361.

lung des Gesetzes der Geschwindigkeitsänderungen in verschiedenen Tiefen des Flusses bezogen, widersprechende Resultate. Ein Hauptgrund, zufolge dessen Zendrini die Geschwindigkeiten in der Tiefe meist zu groß fand, scheint der gewesen zu sein, daß er den Einfluß der Kettenlinie unbeachtet gelassen hatte, welche der Faden bildete, woran die Kugel aufgehangen war.

Zendrini selbst handelt von diesen Messungen etc. in seinem Werke „Leggi e Fenomeni dell' acque correnti" und hiernach insbesondere Brünings in seiner Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, S. 15 und S. 50 [1]).

Lecchi's Versuche wurden an dem Flusse Chiése und in der angrenzenden Wasserleitung von Brescia, bei Gelegenheit eines gewissen Streites über die Vertheilung des Wassers in diesen beiden Armen angestellt, aus denen der eine [2]) Hydrotekt eine Zunahme der Geschwindigkeiten von oben nach unten, der andere [3]) eine Abnahme derselben entnehmen zu können glaubt, Lecchi aber selbst sich folgendermaßen ausdrückt: „Meine Versuche haben eine große Verschiedenheit von zu- und abnehmender Geschwindigkeit, und auch über die Stelle der größten Geschwindigkeit gegeben, und zwar nicht blos in Canälen von geringer Tiefe, sondern auch im Po an sehr tiefen Stellen" etc. Weiteres hierüber in Lecchi's (1765 erschienen) Schrift: „Idrostatica esaminata ne' suoi principi et stabilita nelle sue regole della misura dell' acque correnti".

Michelotti (der Vater) [4]) stellte vielfache Versuche zur Ermittlung des gedachten Geschwindigkeitsgesetzes, so wie über andere, für den Hydrotekten wichtige Sätze an und benutzte in ersterer Beziehung, außer dem Stromquadranten, auch die Pitot'sche Röhre [5]), ferner ein kleines unterschlägiges Wasserrad (Strauberad) [6]) und noch andere Mittel (hydraulische Schnellwaage [7]) etc.), die gleichfalls sämmtlich später (unter der Ueberschrift „Tachometer") erörtert werden sollen.

Die zahlreichen (freilich vorzugsweise) in kleinen künstlichen Canälen angestellten Versuche Michelotti's ließen die Ansicht dieses fruchtbaren Hydraulikers im Allgemeinen dahin neigen, daß er der alten Paraboltheorie, mit nach dem Boden hin zunehmenden Geschwindigkeiten, zwar (zum Theil) widersprach [8]), indeß doch auch zu keiner ganz bestimmten Entscheidung gelangte.

---

[1]) Man sehe auch wieder Bossut, „Hydrodynamik". Zweiter Band, S. 463 Grebenau, in der Uebersetzung der „Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen, nach den Untersuchungen Humphreys' und Abbot's des Mississippi-Stromes". München 1867. Anhang F (Zusätze des Uebersetzers), S. CVIII ff., bemüht sich nachzuweisen, daß auch Zendrini's, Lecchi's und Lorgna's Versuche die neue Theorie, nämlich die einer Geschwindigkeits-Parabel mit horizontaler Achse, deren Scheitel unter dem Wasserspiegel liegt etc., dennoch bestätigten.

[2]) Brünings, a. a. O., S. 58.

[3]) Grebenau (Humphreys und Abbot), a. a. O., Anhang F, S. CVIII.

[4]) Das bereits S. 199 citirte Werk.

[5]) Ebendaselbst (Deutsche Uebersetzung), S. 205.

[6]) Daselbst S. 110.

[7]) Desgleichen S. 119.

[8]) Hydraulische Versuche (Deutsche Bearbeitung), S. 218 und besonders Brünings a. a. O., S. 66 und 75, wo derselbe (S. 66) über Miche-

Bemerkenswerth sind noch folgende Ergebnisse der Michelotti'schen Versuche:

Erstens, daß das Längenprofil der Oberfläche eines fließenden Wassers eine Hyperboloide und das Längenprofil des Grundbettes die hierzu gehörige Asymptote bilde[1]).

Zweitens, daß man bei der Bewegung fließender Gewässer in regulären Canälen auf folgende drei Grundregeln Rücksicht nehmen müsse:

a. Daß sich die Geschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln der Höhen verhalten.

b. Daß die Querschnitte (Querprofile) ihren mittleren Geschwindigkeiten, umgekehrt genommen, proportional sind.

c. Daß die Geschwindigkeiten merkliche Verzögerungen durch die vielen Hindernisse im Flußbette erleiden[2]).

Lorgna nahm seine Geschwindigkeitsmessungen (mit dem Stromquadranten) an kleinen Flüssen und Bächen (im Jahre 1770) vor und war den hierbei erhaltenen Resultaten gemäß der Ansicht, daß die Geschwindigkeit des fließenden Wassers „erst bis auf eine gewisse Tiefe unter der Oberfläche zu, von da aber nach dem Boden hin, wieder abnehme“[3]). In dem von Lorgna 1777 zu Verona veröffentlichten Werke „Memorie intorno all' acque correnti“ wird die von ihm zu Geschwindigkeitsmessungen erfundene hydraulische Schnellwaage (Stadèra Idraulica) ausführlich beschrieben und besprochen, worauf wir gleichfalls (nachher §. 125 im Abschnitte „Tachometer“) zurückkommen werden.

Genauere und deshalb schon entscheidendere Versuche über die Geschwindigkeitsabnahmen in Betten fließender Wässer, haben zuerst der Italiener Ximenez (Ximenes)[4]) und der bereits wiederholt erwähnte Deutschholländer Brünings[5]) angestellt.

Ximenes nahm seine Geschwindigkeitsmessungen im Arno vor und zwar mit einem eigens von ihm erfundenen mechanischen Instrumente, Ventola Idraulica (Wasserfahne)[6]) genannt. An der betreffenden

---

lotti's Messung Folgendes bemerkt: „Aus diesen Berechnungen, wenn man sie mit einander vergleicht, ist es klar, daß die nach der (alten) parabolischen Scala (nach dem Boden hin) zunehmende Geschwindigkeit nicht einmal in kleinen gemauerten Canälen statthat, wo man die Hindernisse nur gering, oder wenigstens sehr einförmig annehmen kann, wie viel weniger ist dann zu erwarten, daß dies Gesetz in natürlichen Canälen (Flußbetten) statthaben sollte. Man sehe deshalb auch Woltmann, Bd. 3, S. 309 seiner hydraulischen Architectur.

[1]) Ebendaselbst §. 120 (S. 135).

[2]) Brünings a. a. O., S. 16 und 22. Ferner Woltmann a. a. O., Bd. 3, S. 302.

[3]) Ebendaselbst S. 61. Grebenau im Anhange F, S. CIX, zur Uebersetzung des wiederholt citirten Werkes von Humphreys und Abbot, will aus den von Lorgna mit dem Stromquadranten angestellten Versuchen ebenfalls den Beweis von der (neuen) Geschwindigkeitsparabel mit horizotaler, aber tief unter dem Wasserspiegel liegenden Achse entnehmen können.

[4]) Ximenes (geb. 1716 in Sicilien, gest. 1786 zu Florenz), Jesuit, Prof. zu Florenz und Wasserbaumeister des Großherzogs von Toscana.

[5]) Brünings (geb. 1736 zu Neckerau in der Pfalz, gest. 1805 in Haag), Generaldirector des Waterstaats der batavischen Republik.

[6]) Beschrieben und abgebildet in §. 125 (Tachometer).

Stelle hatte der Arno ungefähr 115 Braccia oder 355½ rh. Fuß (111⅔ Meter) Breite und circa 16½ rhn. Fuß (5,18 Meter) Tiefe und zwar in einer Entfernung von 20 italienischen Meilen von der See, so daß Ebbe und Flut keine Einwirkung auf die Strömung erzeugen konnten.

Von seinen Versuchen handelt Ximenes in dem Werke „Nuove Sperienze Idrauliche, fatte ne' Canali e ne' fiume“ etc. etc. Siena 1780[1]).

Brünings schließt seine Kritik über die Messungen des Ximenes mit folgendem, die ganzen Ergebnisse charakterisirenden Satze: „Es ist keine theoretische und durch die Erfahrung bestätigte Regel vorhanden, wonach die Geschwindigkeit des strömenden Wassers auf allen Tiefen, und also auch die mittlere Geschwindigkeit bestimmt werden könnte“.[2])

Die Versuche von Brünings am Oberrhein, Niederrhein, an der Waal, Yssel u. s. w. (1789, 1790 und 1792) angestellt, wurden seiner Zeit als solche bezeichnet, welche Alles an Größe, Zweck, Ordnung und Genauigkeit übertreffen, was die Hydraulik damals in diesem Punkte aufzuweisen hatte[3]).

Zu den Geschwindigkeitsmessungen bediente sich Brünings eines von ihm selbst angegebenen Instrumentes (Tachometer genannt), welches im Wesentlichen mit der Schnellwaage des Michelotti übereinstimmt, jedoch den Vorzug hatte, daß man die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen derselben Perpendiculare, unmittelbar nach einander messen konnte, ohne das Instrument bei jedem Versuche aus dem Wasser nehmen zu müssen.

Eytelwein[4]) zog seiner Zeit aus sämmtlichen Versuchsresultaten des Ximenes und Brünings folgenden Schluß: „Obgleich sich aus allen diesen vortrefflichen Beobachtungen noch kein allgemeines Gesetz zur Bestimmung der Geschwindigkeitsabnahme ableiten läßt, so geht doch so viel daraus hervor, daß die Geschwindigkeiten von oben nach unten zu abnehmen, und daß für einerlei Verticallinie, bei größeren Geschwindigkeiten an der Oberfläche, die Abnahmen bei einerlei Tiefen größer sind, als bei kleineren Geschwindigkeiten.

Bereits vor diesem Ausspruche Eytelwein's hatte sich Woltmann[5]) bemüht, (aus Beobachtungen des Ximenes und des Brünings) nachzuweisen[6]), daß die sogenannte Geschwindigkeitsscala eine Parabel sei, deren Achse vertical und deren Scheitel in derjenigen Tiefe unter dem Wasserspiegel liege, wo die Geschwindigkeit ganz aufhöre. Die betreffende Parabel erhielt daher die genau entgegengesetzte Lage (von d'Aubuisson „parabole renversée“ genannt), wie die Geschwindigkeitsparabel der alten (italienischen) Schule, d. h. ihre größte Ordinate sollte

---

[1]) Im Auszuge bei Brünings, Abhandlung von der Geschwindigkeit des fließenden Wassers, S. 67, 99 und besonders S. 69 ff.

[2]) Zur Kenntnißnahme der Versuche des Ximenes ist auch das Lesen betreffender Referate zu empfehlen, welche Woltmann in seinen Beiträgen zur hydraulischen Architectur, Bd. III, S. 310 und ferner liefert.

[3]) Woltmann, Beiträge zur hydraulischen Architectur, Bd. III, S. 348.

[4]) Eytelwein, Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. Zweite Auflage, S. 171.

[5]) Woltmann (geb. 1757 im Hannoverschen, gest. zu Hamburg 1837), bis 1812 Wasserbaudirector in Hamburg.

[6]) Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels. Hamburg 1790, S. 47.

nahe oder im Wasserspiegel, die kleinste aber am Boden des betreffenden Canales oder Flusses liegen.

Dessen ungeachtet empfahl Eytelwein[1]), bis zuverlässigere, noch zweifellosere Versuche bekannt sind, statt eines complicirten Gesetzes über die Geschwindigkeitsabnahme, die betreffende Scala als eine gerade Linie anzusehen.

Selbstverständlich folgte man diesem Vorschlage Eytelwein's nur in beschränktem Maaße, in gewissen Kreisen und selbst hier nur so lange, als nicht weitere Versuche zu neuen Forschungen veranlaßten.

So gelangte Gerstner[2]), zufolge Messungen mit dem Stromquadranten oder hydrometrischen Pendel, zu einer Ellipse als Geschwinidgkeitscurve[3]), während Funk[4]) eine logarithmische Stromscala nachwies[5]).

Raucourt[6]), welcher Versuche in der an der Oberfläche gefrorenen Newa anstellte, glaubte, daß das Gesetz der Geschwindigkeitsabnahme durch die Ordinaten einer Ellipse dargestellt werden könnte, deren Scheitel ein wenig unter der Fußsohle und deren kleine Achse etwas unter dem Wasserspiegel liege[7]).

Defontaine (Ingénieur en chef des ponts et chaussées) veröffentlichte 1833 die unten notirte vortreffliche Arbeit[8]) über den (französischen) Rhein und dessen Wasserbauwerke, wobei er nachwies, daß das Gesetz der Geschwindigkeitsabnahme von der Oberfläche nach dem Boden hin, durch die Ordinaten zweier mit einander einen Winkel bildenden geraden Linien, dargestellt werde[9]).

Sehr richtige Bemerkungen machte später (1847) der französische

---

[1]) Hydraulik, §. 133, S. 175.

[2]) Gerstner (geb. 1756 zu Kommotau in Böhmen, gest. 1832 bei Gitschin), Prof. der Mechanik und Hydraulik am polytechn. Institute in Prag, Wasserbaudirector von Böhmen etc.

[3]) Bemerkungen über das hydrometrische Pendel etc. Prag 1819.

[4]) Funk (geb. 1768 zu Neuen-Rhese in Mecklenb.-Strelitz, gest. 1820 in Berlin), Geheimer Oberbaurath, vorher Landbaumeister in Minden a. d. Weser.

[5]) Versuch einer auf Theorie und Erfahrung gegründeten Darstellung der wichtigsten Lehren der Hydrotechnik. Berlin 1820, S. 22 ff.

[6]) Raucourt (geb. 1799 in Charville, gest. 1841 zu Paris), Ingénieur en chef des ponts et chaussées und einige Jahre in russischen Diensten.

[7]) Annales de Chimie et Physique. Tome 46 (1831), Pag. 93. Auch in d'Aubuisson's Hydraulique (2e Edit.), Pag. 177.

[8]) „Des Travaux du Rhin“ etc. Annales des Ponts et Chaussées. Tome VI (1833), Pag. 1—200.

[9]) In unserer Quelle (Pag. 150) mit schönen Abbildungen (Tafel LXVII) begleitet. — Bresse in seinem „Cours de Mécanique Appliquée“. Seconde Partie (Hydraulique), Paris 1860, berichtet Pag. 187, daß Defontaine bei einem seiner Versuche am Rheine das Gesetz der Geschwindigkeitsabnahme in einer Perpendicularen, vom Wasserspiegel zum Boden, durch eine Parabel darstellbar, gefunden habe, deren Achse im Längenprofile lag und welche für den Stromstrich der Gleichung entsprach:

$$u = 1,226 - 0,175 \,.\, z^2,$$

wenn u die Geschwindigkeit bezeichnet, welche in der Tiefe z einer Verticalen unter dem Oberwasserspiegel vorhanden ist, dabei u und z in Metern ausgedrückt. Bresse liefert (a. a. O.) eine Tabelle, woraus die große Uebereinstimmung zwischen den Geschwindigkeiten erhellt, welche mit Hülfe des Woltmann'schen Flügels erhalten wurden, und denen, welche die Formel liefert.

Ingenieur **Baumgarten** in der unten notirten Arbeit[1]) über den fraglichen Gegenstand, welche folgendermaßen lauten:

„Man darf annehmen, daß diejenigen Ingenieure, welche glaubten, das Gesetz der Geschwindigkeitsabnahme durch Ellipsen, Parabeln oder durch zwei sich schneidende gerade Linien darstellen zu können, mehr oder weniger Recht hierzu hatten; allein ich bin der Ansicht, daß in Wirklichkeit keine dieser Linien dem wahren Naturgesetze entspricht, daß sie vielmehr höchstens als Aushülfsmittel in der Weise betrachtet werden können, wie die Ellipsen nur Annäherungen an die Bahnen sind, welche die Planeten bei ihrer Bewegung beschreiben".

Boileau[2]) gelangte bei seinen mit Woltmann'schen Flügeln ausgeführten Messungen in der Mosel zu Metz ebenfalls zu **Parabeln mit horizontaler Achse**, deren Gleichungen die Form hatten:

$$u = A - Bz^2,$$

wenn u wieder die Geschwindigkeit und z die Tiefe des betreffenden Profilpunktes in einer Perpendicularen im Stromstriche bezeichnet. Die Achse lag dabei in der Regel etwas unter dem Wasserspiegel[3]).

Einen vollständig theoretischen Nachweis, daß das Gesetz der Geschwindigkeitsabnahme durch eine Parabel mit horizontaler, in der Wasseroberfläche liegenden Achse darzustellen sei, lieferte wohl zuerst **Dupuit** in der ersten Auflage[4]) seiner „Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes". In der 2. Ausgabe dieses Werkes findet derselbe Autor als Geschwindigkeitscurve eine Parabel des $\frac{n+1}{n}$ Grades, deren Achse ebenfalls mit dem Wasserspiegel zusammenfällt.

Ebenfalls Parabeln mit horizontaler Achse ergaben sich bei den großartigen, in den Jahren 1851 bis 1858 angestellten Mississippi-Messungen, welche, zum Zwecke der Regulirung dieses gewaltigen Stromes, zwei Officiere der nordamerikanischen Kriegsmarine, der Capitän A. A. **Humphreys** und der Lieutenant H. C. **Abbot** ausführten und die 1861 unter dem Titel „Report upon the physics and hydraulics of the Mississippi" veröffentlicht wurden[5]).

---

[1]) Annales des Ponts et Chaussées. Tome XIV (1847, 3), Pag. 362. „Sur le moulinet de Woltmann, destiné à mesures les vitesses de l'eau".

[2]) „Traité de la mesure des eaux courantes" etc. Pg. 297.

[3]) An einer Stelle im Stromstrich, wo die größte Wassertiefe $0^m,348$ betrug, ergab sich das Geschwindigkeitsmaximum zu $u = 0^m,872$ und zwar in der Entfernung $0^m,065$ unter dem Wasserspiegel. Obige Gleichung war für diesen Fall:

$$u = 0^m.878 - 2,615 \,.\, z^2.$$

[4]) Paris 1848, §. 15, **Dupuit's** Gleichung war damals folgende:

$u = V - \frac{V-W}{H^2} \,.\, z^2$, während sie in der 2. Auflage (Pag. 18) die Gestalt hat:

$$u = (V-W)\left(\frac{z}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}},$$

worin V die Geschwindigkeit an der Oberfläche, W die am Boden und H die ganze Wassertiefe bezeichnet.

[5]) Deutsch bearbeitet von **Grebenau**, München 1867. Der Wasserspiegel des colossalen Stromes, der zu Zeiten über eine Million Cubikfuß engl. Wasser pro Secunde abführt, hat Breiten von 2000 — 4400 Fuß engl. und Tiefen von 50 bis 120 Fuß.

Von hierher gehörigen Hauptresultaten dieser für die Praxis sehr beachtenswerthen Messungen notiren wir folgende:

1) Die horizontale (in der Stromrichtung liegende) Parabelachse der Geschwindigkeitscurve liegt in 0,3 (genauer in 0,297) der Wassertiefe unter der Oberfläche [1]).

2) Der Parameter dieser Parabel ist direct proportional der Quadratwurzel aus der mittleren Geschwindigkeit der betreffenden Perpendicularen und indirect proportional dem Quadrate der Wassertiefe.

3) Als allgemeines Gesetz der Windeinwirkung auf die Lage der Curvenachse sind folgende Ergebnisse zu betrachten: [2])

a. Die Wirkung eines stromabwärts oder aufwärts wehenden Windes ist direct proportional seiner Stärke; im ersten Falle bewirkt er eine Hebung, im zweiten Falle eine Senkung der Geschwindigkeitscurve.

b. Die Größe dieser Hebung oder Senkung ist unabhängig von der mittleren Geschwindigkeit des Flusses".

Die Geschwindigkeitsmessungen Humphreys' und Abbot's und deren Folgerungen sind nachher einerseits Gegenstand scharfer Kritiken und von mancherlei Zweifeln, anderseits aber auch zu weit getriebener Lobeserhebungen geworden. Von gewichtigen Männern, die in Bezug der gewonnenen Resultate viele Bedenken und scharfe Tadel erhoben, nennen wir hier nur Hagen [3]), und von denen, welche die Arbeiten in wissenschaftlicher Beziehung jedenfalls zu hoch stellten, Grebenau [4]).

Grashof nahm hinsichtlich dieser Beurtheilung gleich Anfangs die rechte Stellung ein, indem er u. A. sich an der unten angegebenen Stelle folgendermaßen äußerte: [5])

„Ist auch durch Humphreys' und Abbot's Werk die rationelle Theorie der Wasserbewegung kaum gefördert worden, so ist solches dennoch als wesentlich Epoche machend in der Hydraulik anzuerkennen, theils wegen der darin enthaltenen wichtigen, neuen empirischen Thatsachen und Formeln, theils wegen des dadurch gebotenen, außerordentlich reichen Materiales zu einer späteren rationellen Erklärung und Begründung der durch Beobachtung gefundenen Gesetze".

Von anderen neueren Arbeiten, die sich auf den fraglichen Gegen-

---

[1]) Grebenau's Uebersetzung, S. 65 und ferner.

Zufolge 222 im Mississippi unter den verschiedensten Umständen angestellten Messungen ergab sich die betreffende Parabelgleichung (für engl. Fuß) zu:

$$u = 3{,}2611 - 0{,}79222\,(z - 0{,}3)^2,$$

wenn z die vom Oberwasserspiegel an gerechnete Entfernung des Wasserfadens ist, welcher der secundlichen Geschwindigkeit u entspricht, dabei z in Bruchtheilen der als 1 angenommenen Flußtiefe vorausgesetzt.

[2]) Grebenau's Uebersetzung, S. 104, §. 118.

[3]) Abhandlungen der Königlichen Academie der Wissenschaften in Berlin, Jahrgang 1868 und Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, Jahrg. 1868, S. 63 ff.

[4]) In der Uebersetzung des Humphreys und Abbot'schen Werkes, sowie in dessen Buche: „Rheinstrommessung bei Basel".

[5]) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. XI (1867), S. 875.

stand beziehen, sind vorzugsweise die der Franzosen Darcy-Bazin und die Grashof's für uns von beachtenswerther Bedeutung.

Darcy's Arbeiten, Beobachtungen, Messungen und Theorien über die Bewegung des Wassers in Canälen, Flüssen und Röhren, deren Anfang vom Jahre 1850 datirt, wurden durch seinen Tod unterbrochen [1]), nachher aber durch seinen Collegen und Mitarbeiter Bazin vollständig zu Ende geführt.

Bereits 1865 erschien zu Paris das Werk „Recherches hydrauliques, entreprises par M. H. Darcy, Inspecteur général des ponts et chaussées, continuées par H. Bazin, Ingénieur des ponts et chaussées". In diesem Werke wird das betreffende Geschwindigkeitsgesetz von Pag. 226 an behandelt und zwar weist Bazin für regelmäßige Canäle eine gemeine Parabel mit horizontaler Achse nach, welche letztere, zugleich die Maximalgeschwindigkeit enthaltend, bei größeren Tiefen etwas unter dem Wasserspiegel liegen soll [2]).

Auf höchst elegantem, analytischem Wege gelangt Grashof [3]) ebenfalls zu Geschwindigkeitsparabeln mit horizontaler Achse. Referent kann das Studium der betreffenden „Theoretischen Entwickelungen" in §. 124 des unten notirten Werkes nicht genug empfehlen, benutzt jedoch den Eingang des folgenden Paragraphen (125) desselben, um jetzt den Schluß des ersten Abschnittes gegenwärtiger geschichtlicher Einleitung, zum Capitel „Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen", zu bilden. Dieser Eingang lautet folgendermaßen:

„Die theoretischen Entwickelungen im vorigen Paragraphen beruhen auf der Voraussetzung, daß die materiellen Punkte des Wassers in einfach gesetzmäßiger Weise sehr schwach gekrümmte Bahnen durchlaufen, welche bei gleichförmiger permanenter Bewegung in parallele Grade übergehen. In der That ist es aber unausbleiblich, daß die längs der Canalwand hinfließenden Wassertheilchen, durch die in verschiedenen Graden stets vorhandenen Hervorragungen dieser Wand, vielfach seitlich abgelenkt werden, daß also Strömungen entstehen, die von der Canalwand nach oben und nach der Mitte hin gerichtet sind, und welche dann nothwendig wieder andere, entgegengesetzt gerichtete Strömungen zur Folge haben. Indem diese Mischungsbewegungen mit der Hauptströmung des Wassers im Canal interferiren, kann dadurch das Gesetz der Geschwindigkeitsänderung von Punkt zu Punkt eines Querschnittes so wesentlich modificirt werden, daß es mit Zuverlässigkeit nur auf empirischem Wege durch vielfache Beobachtungen bestimmbar ist" [4]).

---

[1]) Darcy, geb. 1803, gest. 1858. Ein betreffender, von Charié-Marsaines verfaßter Nekrolog findet sich abgedruckt in den „Annales des ponts et chaussées". Tome XV (1858, 2), Pag. 90 ff.

[2]) a. a. O., Pag. 233, §. 38. Mit großen Darstellungen der Geschwindigkeitscurven auf Planche XXIV.

[3]) Theoretische Maschinenlehre, Bd. 1, S. 713. Unserer Bezeichnung entsprechend, findet Grashof:

$$u = V - m\,(z - a_0)^2,$$

wobei V das Maximum von u, m den Parameter und a_0 den Abstand der Parabelachse vom Wasserspiegel bezeichnet.

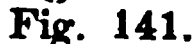
[4]) Der Verfasser verzeichnet im Nachstehenden eine Reihe für die rationelle Praxis werthvolle Arbeiten, die sich vorzugsweise auf das Thema der Geschwindigkeitsscala fließender Wässer beziehen: Exner in Breslau

Erstes Capitel.

Benennungen und Zahlenwerthe, die sich auf die Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen beziehen.

§. 122.

Bevor die geschichtlichen Notizen in einem zweiten Abschnitte fortgesetzt und beendet werden können, haben wir uns mit technischen Benennungen und mit Zahlenwerthen bekannt zu machen, die zum weiteren Verständnisse erforderlich sind, so wie endlich gewisse Fundamentalsätze gefunden werden müssen, welche die Grundlage empirischer Formeln bilden, ohne die zur Zeit die technische wissenschaftliche Hydrodynamik ihre Aufgaben nicht zu lösen vermag.


Fig. 141.



Hierzu stelle zunächst Fig. 141 das Längenprofil eines Canales (Flusses) in der Stromrichtung genommen dar, so wird die Niveaudifferenz EC zweier Punkte A und C der Wasseroberfläche, die durch eine Gerade AC von bestimmter Länge verbunden sind, das Gefälle, bezogen auf die Länge AC, genannt. Das Gefälle pro Längeneinheit heißt relatives Gefälle, Abhang oder Rösche.

In der Folge werden wir das Gefälle EC stets durch h, die zugehörige Länge AC mit l, also den Abhang durch $\frac{h}{l}$ ausdrücken,

(eine Abhandlung, die vom Jahre 1869 datirt und Messungen in der Oder aus dem Jahre 1868 zu Grunde legt), „Ueber den Gebrauch des hydrometrischen Flügels zur Bestimmung der Wassermenge von Strömen". Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen. Jahrg. 1875, S. 341. — Sasse in Merseburg, „Ueber die Geschwindigkeitsformeln in Bezug auf die Bewegung des Wassers in Flüssen". Deutsche Bauzeitung. Jahrg. 1871, S. 241 und 249. — Harlacher in Prag, „Beiträge zur Hydrographie des Königreichs Böhmen" (auf Messungen in der Elbe basirt). Technische Blätter. Jahrg. 1871, S. 81 und Jahrg. 1872, S. 137. — Bukowský in Prag, „Mittheilung über eine an der Elbe bei Podiĕbrad gemachte Wassermessung". Mittheilungen des Böhmischen Architecten- und Ingenieur-Vereins. Jahrg. 1873, S. 1. — Grebenau in Germersheim, „Die internationale Rheinstrom-Messung bei Basel", im November 1867. Ein Beitrag zur Theorie und Praxis der Wassermessungen in größeren Flüssen. München 1873. — Keck in Hannover „Ueber das von Hagen aufgestellte Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeit des strömenden Wassers mit der Entfernung vom Boden sich vergrößert". Zeitschrift des Hannoverschen Architecten- und Ingenieur-Vereins. Jahrg. 1872, S. 476. — Sasse in Merseburg, „Die Vertical-Parabel bei Stromgeschwindigkeits-Messungen" (an der Saale und Unstrut). Zeitschrift des Hannoverschen Architecten- und Ingenieur-Vereins. Jahrg. 1873, S. 191. — Schlichting in Tilsit, „Ueber die Geschwindigkeits-Parabel mit senkrechter Achse". (Nach Messungen in der Memel bei Tilsit.) Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen. Jahrg. 1877, S. 75. — Sasse in Merseburg, „Ueber die Verticalgeschwindigkeitscurve in den Flüssen". Zeitschrift des Hannoverschen Architecten- und Ingenieur-Vereins. Jahrg. 1878, S. 53.

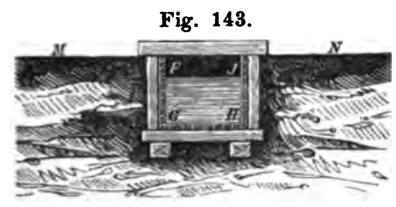
zuweilen aber auch $\frac{h}{l} = \sin\varphi$ setzen, wobei φ den Winkel CAE bezeichnet, welchen die Oberfläche mit dem Horizonte AE bildet.

Fig. 142.



Schneidet man den im Canale $MGHN$ fließenden Wasserkörper durch eine auf seine Bewegungsrichtung normale Ebene, so wird die dadurch entstehende Fläche $FGHJ$, Fig. 142, das Querprofil, der Querschnitt des Wasserkörpers genannt, dessen Inhalt in der Folge stets mit a bezeichnet werden soll.

Fig. 143.



Derjenige Theil vom Umfange des Canalprofiles (Flußprofiles), welcher sich in unmittelbarer Berührung mit dem Wasser befindet, wird der benetzte Umfang oder der Wasserperimeter genannt, in unseren Figuren also $FG + GH + HJ$. Wir werden die Größe desselben stets durch p bezeichnen.

Den Quotienten $\frac{a}{p}$ pflegt man (nach Dubuat)[1]) den mittleren Radius (rayon moyen) zu nennen, weil bei einem halbkreisförmigen Querschnitt vom Radius $= r$, offenbar

$$\frac{a}{p} = \frac{r^2\pi}{2r\pi} = \frac{r}{2}$$

ist. Bei sehr flachen Canälen, von rectangulärem Querschnitte, wo bei b Breite und e Wassertiefe $\frac{a}{p} = \frac{be}{b + 2e}$ ist, läßt sich annäherungsweise $\frac{a}{p} = e$, d. i. gleich der Wassertiefe setzen.

Anmerkung. Bewässerungscanälen giebt man nach Nadault de Buffon[2]) ein relatives Gefälle von $\frac{1}{3600}$ bis $\frac{1}{1666}$ oder beziehungsweise ein absolutes Gefälle von $0^m,277$ bis $0^m,60$ pro Kilometer. Canälen, die zur Bewässerung und Schifffahrt zugleich dienen, ein relatives Gefälle von $\frac{1}{6666}$ bis $\frac{1}{3333}$ oder ein absolutes Gefälle von beziehungsweise $0^m,15$ bis $0^m,30$ pro Kilometer.

Canäle, die zur Schifffahrt allein bestimmt sind, erhalten entweder gar kein Gefälle, oder ein sehr geringes. So z. B. hat der Erie-Canal (Buffalo-Albany) bei 358 engl. Meilen (à 5280′) Länge ein Gefälle von 689 Fuß (im Hauptcanale), was eine Rösche $\frac{h}{l} = 0{,}000351$ giebt, der

[1]) Principes d'hydraulique. Tome Première, Pag. 33, Nr. 29.
[2]) Traité des Irrigations. Tome II, Pag. 213.

Canal de l'Ourcq bei 96000 Meter Länge, ein absolutes Gefälle von $10^m,14$ oder einen Abhang $\frac{h}{l} = 0,0001056$.

Bei der Croydon-Wasserleitung (New-York) nahm man $\frac{h}{l} = 0,0002174$, bei der New-River-Wasserleitung (London) $\frac{h}{l} = 0,00004735$ etc.

Für Aufschlagwassergräben oder Gerinnen giebt man dem Zuführcanale: $\frac{h}{l} = \frac{1}{2000}$ bis $\frac{1}{2500}$, dem Abführcanale: $\frac{h}{l} = \frac{1}{500}$ bis $\frac{1}{1000}$.[1]) Nach Weisbach (Ing.-Mechanik, Bd. 2) nimmt man bei Aufschlaggräben der Freiberger Betriebsgewässer $\frac{h}{l} = 0,00025$ bis $0,0005$, dagegen bei Abzugsgräben $\frac{h}{l} = 0,001$ bis $0,002$.

Ströme und Flüsse haben nahe ihrem Ursprunge ein größeres Gefälle, als unweit der Mündung ins Meer. So hat die Elbe auf der Strecke von Podiëbrad bis Leitmeritz auf die Meile durchschnittlich ein Gefälle (nach Stranz)[2]) von 9 Fuß, d. i. $\frac{h}{l} = \frac{1}{2822} = 0,00035$. Hübbe[3]) fand dagegen das Gefälle des Elbspiegels, auf der Strecke von Neßhaken bis Schulau (unterhalb Hamburg) auf 30000 Fuß Stromlänge: in der Mitte der Flutzeit circa 14 Zoll oder $\frac{h}{l} = \frac{1}{26000} = 0,000038$; in der Mitte der Ebbezeit circa 12 Zoll oder $\frac{h}{l} = \frac{1}{30000} = 0,000033$. Der Rhein von Constanz bis Straßburg hat: $\frac{h}{l} = 0,001140$ und von Straßburg bis Rotterdam: $\frac{h}{l} = 0,000450$. Die Donau von Donaueschingen bis Wien: $\frac{h}{l} = 0,000490$, und von Wien bis zum Meere: $\frac{h}{l} = 0,000090$.[4])

Eine Zusammenstellung der Gefälle für die wichtigsten deutschen Ströme befindet sich im 15. Bande der „Statistik des deutschen Reiches“.

Die stärksten für Schiffe eben noch passirbar relativen Gefälle in Strömen (Stromschnellen), sind nach Hagen $\frac{1}{600}$ bis $\frac{1}{500}$, a. a. O., Theil II, Bd. 1, S. 472.

Schließlich folgen hier noch zwei Tabellen über das Gefälle des Mississippi von Cairo aus (nahe da, wo sich der Ohio in den Mississippi ergießt) bis zu den vier Stromspalten im Golf von

---

[1]) Eine fernere Regel ist die, im Zuleitungscanale dem Wasser eine mittlere Geschwindigkeit von $0^m,40$ bis $0^m,60$ pro Secunde und im Abführcanale eine mittlere Geschwindigkeit von $0^m,75$ bis $1^m,0$ zu gestatten, das Gefälle aber nach den folgenden Paragraphen zu berechnen.

[2]) Vergleichende hydrographische Tafeln. Breslau 1836, S. 30.

[3]) Das Fahrwasser der Unterelbe. Hamburg 1854, S. 66.

[4]) Angaben für noch andere Flüsse finden sich u. A. in „Annales des Ponts et Chaussées“. 1843, 3, Pag. 264. Für den Rhein bei Hagen, Theil II, Bd. II, S. 329.

Mexico. Auch sind dabei die Hoch- und Niederwasser von St. Louis bis zum Golf verzeichnet[1]).

Oertlichkeit	Entfernung vom Beginn der Stromspaltungen	Differenz zwischen Hoch- und Niederwasser			Entsprechende Höhe über dem Golf	
		Hochwasser	Niederwasser	Größe der Differenz	Hochwasser	Niederwasser
	Engl. Meilen	Jahr	Jahr	Fuß	Fuß	Fuß
Beginn d. Stromspaltung	0	1851	1851	2,3	2,8	0,5
Fort St. Philipp	20	1851	1851	4,5	5,1	0,6
Carollton	104	1851	1851	14,4	15,3	0,9
Donaldsonville	176	1851	1851	24,3	25,8	1,5
Baton Rouge	228	1851	1851	31,1	33,9	2,8
Red-river-Landing . .	299	1851	1851	44,3	49,5	5,2
Natchez	361	1858	1855	51,0	60,0	15,0
Vicksbury	470	1858	1855	49,0	?	?
Gaines Landing	630	1858	1855	?	149,0	?
Napoleon	672	1858	1855	50,0	?	?
Memphis	855	1858	1855	40,0	221,0	181,0
Colnmbus	1059	1858	1855	47,0	310,0	263,0
Cairo	1080	1858	1855	51,0	322,0	271,0
St. Louis	1253	1858	1860	37,0	408,0	371,0

Resultirendes Gefälle des Wasserspiegels pro Meile (1 Meile = 5280 Fuß engl.)				Relatives Gefälle auf 1000 Längeneinheiten bei	
bis	Entfernung	bei Hochwasser	bei Niederwasser	Hochwasser	Niederwasser
	Meilen	Fuß	Fuß		
Golf bei S. W. Paß . .	17	0,165	0,029	0,031	0,0055
Golf bei N. O. Paß . . .	16	0,175	0,031	0,033	0,0059
Golf bei Paß à l'Outre .	15	0,187	0,033	0,035	0,0062
Golf bei Süd Paß	14	0,200	0,036	0,037	0,0068
Beginn der Stromspalten .	20	0,115	0,005	0,022	0,0009
Fort St. Philipp	84	0,121	0,004	0,023	0,0008
Carrollton	72	0,146	0,008	0,028	0,0016
Donaldsonville	52	0,156	0,025	0,029	0,0047
Baton Rouge	71	0,220	0,034	0,042	0,0064
Red-river-Landing	62	0,266	0,158	0,050	0,0299
Natchez	269	0,309	?	0,058	?
Gaines Landing	225	0,320	?	0,061	?
Memphis	204	0,436	0,402	0,082	0,076
Columbus	21	0,571	0,381	0,108	0,072
Cairo	173	0,497	0,578	0,094	0,109

[1]) Humphreys und Abbot a. a. O. Deutsche Bearbeitung von Grebenau, Anhang A, S. VI.

§. 123.

Geschwindigkeit eines Stromprofiles.

Um zur Beurtheilung der verschiedenen Geschwindigkeiten in einem und demselben Stromprofile Gelegenheit zu geben, theilen wir nachfolgende Tafel aus dem Resultate der Geschwindigkeitsmessungen des holländischen Hydraulikers Brünings im Niederrheine (oberhalb der Scheidung des Ysselstromes) mit, wobei bemerkt werden mag, daß die Breite von 48 Ruthen = 576 Fuß des betreffenden Querprofiles in 8 gleich große Theile getheilt, und in jedem Theilpunkte eine Perpendiculare genommen wurde, so daß die Zahl der Perpendicularen 7 betrug, in denen er die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen bestimmte[1]).

Tiefe unter der Oberfläche	1. Perpendiculare	2. Perpendiculare	3. Perpendiculare	4. Perpendiculare	5. Perpendiculare	6. Perpendiculare	7. Perpendiculare	Mittelwerthe
1 Fuß	30,85	35,28	38,27	43,63	42,78	43,63	42,78	39,603
2 „	30,85	35,28	37,30	41,04	41,04	41,92	41,92	38,479
3 „	32,02	34,23	37,30	40,13	41,92	41,92	41,04	38,366
4 „	29,64	33,14	37,30	40,13	41,44	42,79	41,04	37,497
5 „	28,88	32,02	36,30	38,27	39,21	42,78	39,21	36,667
6 „	28,88	29,64	35,28	37,30	38,27	41,04	37,3	35,387
7 „	27,06	27,06	34,23	36,30	37,30	37,30	36,30	33,650
8 „	25,67	27,06	32,02	33,14	35,28	36,30	36,40	32,258
9 „	24,21		27,06	30,85	34,23	33,14	29,64	31,022
10 „					32,02			32,020
Mittelwerthe[2])	28,422	32,166	35,389	37,749	39,497	39,602	39,389	35,873
Ganze Tiefe der Perpendiculare	11 Fuß	$8\frac{1}{2}$ Fuß	$9\frac{1}{2}$ Fuß	10 Fuß	$10\frac{1}{2}$ Fuß	11 Fuß	11 Fuß	

Die Abnahme der Geschwindigkeiten, von der Oberfläche nach dem Boden hin, ist dabei unverkennbar. Die Nichtstetigkeit dieser Abnahme dürfte vorzugsweise ihren Grund darin haben, daß die bei größeren Flüssen vorkommenden Wirbel und Gegenströme hier von Einfluß waren. Die Geschwindigkeiten unmittelbar an der Oberfläche und am Boden fehlen (wozu das von Brünings angewandte Geschwindigkeits-Meßinstrument nicht eingerichtet war), jedoch ist anzunehmen, daß beide beziehungsweise kleiner gewesen

[1]) Woltmann, Beiträge zur hydraulischen Architectur. Bd. 3, S. 359.

[2]) Der Profilinhalt betrug: $5752\frac{1}{2}$ Quadratfuß;
Mittlere Tiefe: 9 Fuß $11\frac{1}{4}$ Zoll;
Mittlere Geschwindigk.: 2,99 Fuß (pro Secunde);
Wassermenge: 17197 Cubikfuß (pro Secunde).
Alle Maaße sind Rheinländische:
(1 Fuß rhn. = $0^m,314$; 1 Quadratfuß rhn. = $0\square^m,098$; 1 Cubikfuß = $0^{cm},0288$).

sind, als die Werthe der Horizontalreihen für 6 Zoll und 9 Fuß Tiefe. Hiernach würde ferner zu schließen sein, daß die größte Geschwindigkeit etwa 6 Zoll bis 1 Fuß unter der Oberfläche stattfand. Alle diese Schlüsse lassen sich von den sonst in den verschiedenen Rheinarmen (Waal, Yssel etc.) von Brünings angestellten Messungen (man sehe dessen S. 345, Note 1, angegebenes Werk) in gleicher Weise bilden.

Um die Gelegenheit zum Anknüpfen nicht unwichtiger Bemerkungen zu benutzen, läßt der Verfasser hier noch einige Tabellen folgen, wovon sich die ersteren auf die bereits vorher (S. 353) erwähnten Mississippi-Messungen, die anderen auf Messungen in drei deutschen Flüssen (der Unstrut, Saale und Elbe) beziehen.

I. Resultate aus Geschwindigkeitsmessungen unter dem Wasserspiegel des Mississippi bei Carrollton [1]).

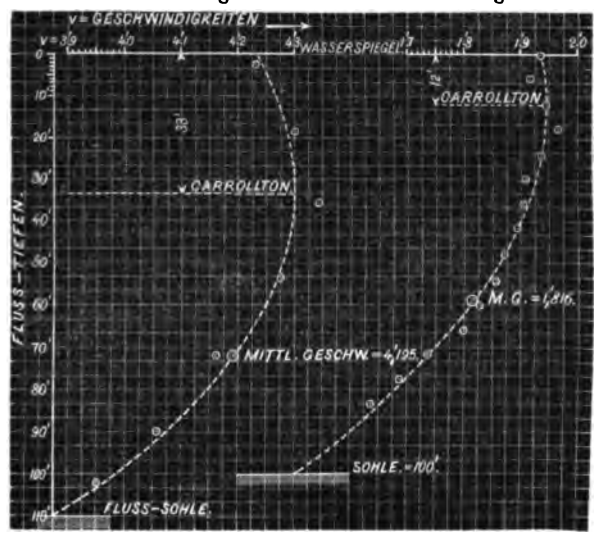
A. Während des Hochwassers von 1851 bei circa 110 Fuss (engl) Flusstiefe.

(Jede Geschwindigkeit ist das Mittel aus 13 Werthen [Messungen]).

Wassertiefen	Spiegel	3 Fuß	6 Fuß	18 Fuß	36 Fuß	54 Fuß	72 Fuß	90 Fuß	102 Fß
Geschwindigkeiten pro Sec. im Stromstrichprofile	4,3538	4,3747	4,4285	4,2984	4,3463	4,2745	4,1580	4,0528	3,9481

Von diesen mittelst Doppelschwimmern gewonnenen Werthen

Fig. 143a. Fig. 143b.



---

1) Humphreys und Abbot's Theorie der Bewegung des Wassers etc. Nach Mississippi-Messungen. Deutsch von Grebenau, S. 56 und 57, so wie S. 60 und 61.

haben sich die Experimentatoren (Humphreys und Abbot) bemüht, vorstehende Curve (Parabel), Fig. 143[a], zu entwerfen. Man erkennt dabei, daß die Maximalgeschwindigkeit in der Tiefe von 33 Fuß unter dem Wasserspiegel stattgehabt hatte und die mittlere Geschwindigkeit 4,195 Fuß gewesen sein soll. Referent hat sich vergeblich bemüht, letzteren Werth direct aus den Messungsresultaten zu entnehmen. Allerdings, wenn man die drei ersten Werthe durch 4,2301 Fuß ersetzt (während ihr Mittel nach der Tabelle 4,3856 beträgt), ergiebt sich 4,196 Fuß etc.

B. Während des Hochwassers von 1851 *bei circa* 100 *Fuss Tiefe.*

(Jede Geschwindigkeit ist das Mittel aus 5 Werthen [Messungen]).

Wassertiefen	Spiegel	6 Fuß	12 Fuß	18 Fuß	24 Fuß	30 Fuß	36 Fuß	42 Fuß
Geschwindigkeiten pro Sec. im Stromstrichprofile	1,9362	1,9185	1,9438	1,9727	1,9394	1,9062	1,9043	1,8929

Wassertiefen	48 Fuß	54 Fuß	60 Fuß	66 Fuß	72 Fuß	78 Fuß	84 Fuß
Geschwindigkeiten pro Sec. im Stromstrichprofile	1,8672	1,8596	1,8247	1,7996	1,7388	1,6891	1,6390

Auch diese Geschwindigkeitsänderungen haben die Experimentatoren sich bemüht, durch die zweite Curve (Parabel), Fig. 143[b], darzustellen. Die Maximalgeschwindigkeit soll in 12 Fuß Tiefe unter dem Wasserspiegel stattgefunden haben, während die mittlere Geschwindigkeit zu 1,816 Fuß angegeben wird. Letzterer Werth ist wiederum nicht aus den Versuchswerthen zu ermitteln. Der Durchschnitt aus den Versuchen ergiebt 1,856 Fuß als mittlere Profilgeschwindigkeit.

Referent muß überhaupt vor der Täuschung warnen, als hätten die Versuchsresultate die in Fig. 143[a] und 143[b] dargestellten gefälligen, continuirlichen Curven als Geschwindigkeitsscalen ergeben. Die Herren Humphreys und Abbot haben hierzu vielmehr allerlei Wendungen und Annahmen machen müssen. Man hat eben vorausgesetzt, es müssen diese Curven Parabeln sein! Hagen hat diese ganze Darstellungsweise ebenfalls scharf kritisirt, worüber nachzulesen ist im XVIII. Jahrg. (1868) der Erbkam'schen Zeitschrift für Bauwesen, S. 67 ff.

II. Resultate aus Geschwindigkeitsmessungen in der Unstrut, Saale und Elbe,
nach Angaben des Regierungs- und Baurathes Sasse in Merseburg[1]).
(Die Geschwindigkeitsmessungen geschahen mit Hülfe Woltmann'scher Flügel.)

A. Unstrut-Profil.		B. Saale-Profil.		C. Elbe-Profil.	
Wassertiefen in Metern	Geschwindigkeit pro Secunde in Metern (7 Verticalen)	Wassertiefen in Metern	Geschwindigkeit pro Secunde in Metern (15 Verticalen)	Wassertiefen in Metern	Geschwindigkeit pro Secunde in Metern
0,157	1,089	0,157	0,510	0,314	1,044
0,471	1,184	0,471	0,485	0,942	1,065
0,785	1,218	0,785	0,428	1,569	1,026
1,098	1,172	1,098	0,395	2,197	0,981
1,412	1,108	1,412	0,392	2,825	0,897
1,726	1,024	1,726	0,367	3,452	0,871
2,040	0,872	2,040	0,329	4,080	0,736
Größte Tiefe = 3,532 Met. Stromaufwärts mäßiger Wind.		Größte Tiefe = 2,511 Met.		Größte Tiefe = 5,65 Met.	

Nach dem Vorhergehenden kann es nicht schwer fallen, aus diesen drei Zusammenstellungen Schlüsse über den Gang der Verticalcurven in einem Profile zu ziehen. Bemerkenswerth sind die besonderen Gründe, welche Herrn Sasse bestimmten, in den mehr regelmäßigen uud tiefen Profilen der Saale und Unstrut Messungen zu versuchen. A. a. O. S. 196 wird nämlich Folgendes bemerkt: „Auch nach Feststellung einer geeigneten Formel für das zu den Messungen angewandte Instrument (Woltmann'scher Flügel) und nach Verwendung von einer genügenden Zeit zur Geschwindigkeitsmessung ist es schwer, aus den aufgetragenen Geschwindigkeiten sofort zu erkennen, ob die Geschwindigkeitscurve einer Parabel angehört, ob deren Achse senkrecht stehen oder wagerecht liegen müsse, und ob in letzterem Falle die Achse unterm Wasserspiegel liegen könne oder nicht". Nach den vorstehenden Resultaten dürfte (auch entsprechend den Theorien S. 347 und 349) die Annahme einer Geschwindigkeitsparabel mit senkrechter Achslage (nach Hagen und Schlichting) nicht aufrecht zu erhalten sein[2]).

§. 124.

Wassermenge. — Mittlere Geschwindigkeit.

Die Wassermenge $= Q$, welche pro Secunde durch ein bestimmtes Fluß- oder Canalprofil fließt, erhält man, unter Voraussetzung, daß der Beharrungszustand der Bewegung (§. 77)

[1]) „Die Verticalparabel bei Stromgeschwindigkeits-Messungen". Zeitschrift des Hannov. Archit.- und Ing.-Vereins, Jahrg. 1878, S. 191 ff. Der Verfasser benutzt die Gelegenheit, auf eine ebenfalls werthvolle Abhandlung desselben Autors in derselben Zeitschrift, Jahrg. 1870, S. 193, aufmerksam zu machen, welche die Ueberschrift trägt: „Die Parabeltheorie in ihrer Anwendung auf die Bewegung des Wassers in der Saale und Unstrut".

[2]) Ausführlich hierüber in einer Abhandlung des Herrn Sasse in der Zeitschrift des Hannov. Archit.- und Ing.-Vereins, Jahrg. 1878, S. 53.

bereits eingetreten ist, nach §. 81 oder §. 96, wenn man den Querschnitt ω eines jeden das Profil durchströmenden Wasserfadens, mit der ihm entsprechenden Geschwindigkeit $= u$ multiplicirt und die Producte addirt. Es ergiebt sich folglich die Gleichung:

$$(1) \quad Q = \Sigma (\omega u).$$

Dividirt man Q durch den Flächeninhalt a des Profiles, wobei $a = \Sigma(\omega)$ ist, so wird der Quotient die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Profiles genannt, die zwar nur eingebildet, zu betreffenden Verständnissen für die ganze Hydraulik aber von der größten Wichtigkeit ist. Wir bezeichnen die mittlere Profilgeschwindigkeit in der Folge stets mit v, erhalten also:

$$(2) \quad v = \frac{Q}{a}, \text{ so wie}$$

$$(3) \quad Q = av$$

$$\text{und auch: } (4) \quad v = \frac{\Sigma (\omega u)}{a}.$$

Aus (4) erhellt zugleich, wie man durch entsprechende Messungen die mittlere Profilgeschwindigkeit zu bestimmen im Stande ist.

Statt, wie es in (4) verlangt wird, das durch Breiten- und Tiefenmessungen ermittelte Stromprofil in entsprechend kleine Flächenstücke ω zu theilen, und für die Mitte eines jeden derselben eine Messung der Geschwindigkeit $= u$ des durchfließenden Wasserfadens vorzunehmen, schlägt man gewöhnlich nachbemerkte Wege ein.

1) Man theilt die aufgenommene Profilfläche durch Perpendicularen in Abschnitte, bestimmt die mittlere Geschwindigkeit in jeder dieser Perpendicularen[1]), berechnet den Flächeninhalt des einer jeden Perpendiculare zugehörigen Theiles, multiplicirt beziehungsweise diese Werthe mit einander, und dividirt die Summe derselben durch den Flächeninhalt des ganzen Profiles, der Quotient wird dann als mittlere Geschwindigkeit des letzteren betrachtet.

Aus geeigneten Messungen (die Geschwindigkeiten durch schwimmende, unten mit Eisen beschlagene Stäbe bis auf 20 Fuß Tiefe ermittelt) stellte Wiebeking a. a. O. S. 37, §. 41, bei einem

---

[1]) Die mittlere Geschwindigkeit $= U$ in einer und derselben Perpendiculare ist auf folgende Weise zu bestimmen.

Fig. 144.

Es sei $\overline{AN}$ die Perpendiculare, in der man in gleichen Abständen $AC = CE \ldots\ldots = LN$ die Geschwindigkeiten u_1, u_2, $u_3 \ldots\ldots u_7$ gemessen und als Ordinaten einer Curve BP aufgetragen hat, deren Fläche $ABPN$ man die Geschwindigkeitsscala zu nennen pflegt. Der Inhalt der letzteren Fläche ist offenbar die Summe aller Geschwindigkeiten der ganzen Perpendiculare, aus der man U erhält, wenn man diese Summe durch die Länge $\overline{AN}$ der Perpendiculare dividirt. Demnach ist:

$$U = \frac{\frac{1}{2}\overline{AC}\,[(AB + CD) + (CD + EF) \ldots\ldots (LM + NP)]}{AN}, \text{ oder}$$

$$U = \frac{AC}{AN} \left(\tfrac{1}{2} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \tfrac{1}{2} u_7\right).$$

Rheinprofile von 920 Fuß Breite (unweit Erfelden im Großherzogthum Hessen) nachstehende Tabelle zusammen:

Perpendicularen	Flächeninhalt des einer jeden Perpendiculare zugehörigen Theiles	Mittlere Geschwindigkeit der Perpendiculare	Wassermenge, welche durch den Profiltheil fließt
I.	1691 □Fuß	3,527 Fuß	5866 Cub.-Fuß
II.	1936	4,454	8623
III.	1843	4,211	7760
IV.	2006	3,944	7912
V.	2111	3,823	8068
VI.	2146	3,712	7966
VII.	1971	3,693	7279
VIII.	1732	3,441	5960
IX.	1668	3,398	5668
X.	1557	2,981	4641
XI.	1026	2,949	3026
XII.	1330	2,632	3500
Summen . .	21017	42,765	76269

Hiernach ist:

$$Q = \Sigma\,(\omega u) = 76269 \text{ Cubikfuß}^{1)},$$
$$a = 21017 \text{ Quadratfuß und somit}$$
$$v = \frac{76269}{21017} = 3{,}628 \text{ Fuß},$$

die mittlere Tiefe $= e$ des ganzen Profiles ist überdies:

$$e = \frac{21017}{920} = 22{,}83 \text{ Fuß}.$$

Diese Methode ist unter Andern auch von Lahmeyer bei seinen vielfachen Versuchen (Messungen in der Weser) in Anwendung gebracht worden. Man sehe deshalb S. 56 seines Buches: „Erfahrungsresultate über die Bewegung des Wassers in Flußbetten und Canälen“. Braunschweig 1845.

---

[1]) Nach einer Angabe in den „Annales des Ponts et Chaussées“, 1846, Bd. 3, Pag. 212, beträgt die normale Wassermenge des Rheines in den Gebieten der Niederlande (Hollands), nach im Jahre 1819 gemachten Beobachtungen, pro Secunde (in runden Zahlen):

2000 Cubikmeter bei mittlerem Wasserstande,
6000 „ bei Hochwasser und bis
9000 „ bei den allerhöchsten Wasserständen.

Vergleichsweise werde auf die Wassermenge der Elbe im ungetheilten Strome oberhalb Hamburg und Harburg aufmerksam gemacht. Nach Hübbe („Erfahrungen und Beobachtungen im Gebiete der Strombaukunst“. Erster Theil, S. 77) ist daselbst bei 800 Fuß Breite die Profilgröße = 12224 Quadratfuß, die mittlere Geschwindigkeit = 2,16 Fuß, und sonach die pro Secunde abfließende Wassermenge 26404 Cubikfuß = 815,88 Cubikmeter. Grebenau („Die internationale Rheinstrommessung bei Basel“. München 1873, S. 67) berechnete, nach im November 1867 angestellten sorgfältigen Messungen (oberhalb der Baseler Drahtseilfähre, bei 201,27 Meter Flußbreite) in einem Profile von 426,122 Quadratmeter, die Wassermenge pro Secunde zu 828,836 Cubikmeter.

2) Ein anderes Verfahren (gewöhnlich das Brünings'sche genannt) besteht darin, die mittleren Geschwindigkeiten der einzelnen Perpendicularen zu addiren, die Summe durch die Anzahl der Perpendicularen zu dividiren, und den Quotienten als die mittlere Geschwindigkeit der ganzen Profilfläche zu betrachten. Wendet man dies Verfahren auf das Beispiel der Brünings'schen Messungen an einem Rheinarme (§. 123) an, so erhält man zuvörderst also als Summe sämmtlicher 7 Perpendiculargeschwindigkeiten: 251,214 und die mittlere Geschwindigkeit:

$$v = \frac{251,214}{7} = 35,887 \text{ Zoll} = 2,99 \text{ Fuß}.$$

Da nun der Inhalt des dort gemessenen Profiles 5752,5 □Fuß betrug, so ergiebt sich

$$Q = av = 5752,5 \times 2,99 = 17199,97 \text{ Cubikfuß}$$

für die zur Zeit der Messung durch das Profil fließende Wassermenge.

Die Wassermenge des ganzen Rheinstromes nach der Wiebeking'schen Messung (1) berechnet sich auf diese Weise folgendermaßen:

Es ist die Summe der sämmtlichen 12 Perpendiculargeschwindigkeiten $= 42,765$, daher deren mittlere Geschwindigkeit $= \frac{42,765}{12}$ $= 3,563$. Diese als mittlere Geschwindigkeit $= v$ des ganzen Profiles betrachtet, findet sich endlich die Wassermenge

$$Q = av = 21017 \times 3,563 = 74883 \text{ Cubikfuß}.$$

3) Der Verfasser hat folgende Methode im Frühsommer 1852 zur Bestimmung der Wassermenge des Leineflusses unweit Hannover (zwischen Döhren und dem sogenannten „schnellen Graben") benutzt. Die Geschwindigkeiten wurden in 5 gleich weit, in der ganzen Flußbreite von 101 Fuß, von einander abstehenden Perpendicularen beziehungsweise gemessen und die mittleren Perpendiculargeschwindigkeiten gefunden zu: 1,4319 Fuß; 1,3279 Fuß; 1,2761 Fuß; 1,36278 Fuß und 0,8418 Fuß, so daß sich für die mittlere Profilgeschwindigkeit setzen ließ: $v = \frac{6,240}{5} = 1,248$ Fuß $= 0,3644$ Meter.

Mit Hülfe der Simpson'schen Regel wurde aus den betreffenden Tiefenmessungen der Flächeninhalt des Profiles zu 916,5 Quadratfuß = 78,20 Quadratmeter, und daher die pro Secunde abfließende Wassermenge berechnet zu:

$$Q = av = 916,5 \times 1,248 = 1143,79 \text{ Cubikfuß} = 28,49 \text{ Cubikmeter}.$$

Das Maaß der Genauigkeit der besprochenen Methoden dürfte in der Weise als abnehmend zu bezeichnen sein, wie sie hier aufgezählt wurden.

Bei einer am 25. Juni 1869 von den Studirenden der Hannoverschen technischen Hochschule sorgfältig ausgeführten Messung zwischen dem Schützenhause bei Hannover und der Stadt (also unterhalb des sogenannten „schnellen Grabens", eines Wehres für Hochwasser), d. h. an einer Stelle, wo die beiden Leinarme noch vereinigt sind,

welche das Aufschlagwasser für die beiden Stadtmühlen zuführen, ergab sich in einem Profile von 42□m,522 die mittlere Geschwindigkeit zu 0,536 Meter, folglich die secundliche Durchflußmenge zu 22,79 Cubikmeter. Die fast 6 Cubikmeter größere, vorher berechnete Wassermenge, bei ziemlich gleichem Wasserstande, ist als das Quantum zu betrachten, welches zu jener Zeit über das angegebene Wehr floß.

Im Sommer (12. Juli) 1877 wurden gleichfalls sorgfältige Messungen in den beiden Leinearmen ausgeführt, wobei sich für den östlichen Arm (Klickmühle) eine secundliche Wassermenge von 11,50 Cubikmeter ergab, während sich für den nördlichen Leinearm (Brückmühle) das secundliche Wasserquantum zu 8,80 Cubikmeter herausstellte, die Summe (beider Arme) also 20,30 Cubikmeter betrug. Das ebenfalls gemessene Gefälle an den Mühlen war dabei 2,15 Meter.

§. 125.

Tachometer.

Von allen zum Messen der Geschwindigkeit fließender Gewässer zur Zeit in Anwendung gebrachten und bemerkenswerthen Mitteln[1]) oder mechanischen Instrumenten (Tachometer)[2]), lassen sich

---

[1]) Zur Vervollständigung geschichtlicher Notizen werde hier noch der sogenannten hydrometrischen Flasche gedacht, mit welcher 1721 der italienische Arzt Dr. Nadi Versuche im Po und anderen italienischen Flüssen anstellte. Diese Vorrichtung bestand in einem Blechgefäße (einem prismatischen Kasten) mit einer verschließbaren Oeffnung (einem Loche) in einer der Seitenwände und einer bis über die Oberfläche hinausreichenden Röhre. Brachte man dies Gefäß unter Wasser und öffnete das Loch in der Seitenwand, so strömte durch letzteres Wasser in das Gefäß, während durch die nach oben hin mündende Röhre die atmosphärische Luft entweichen konnte. Aus der Wassermenge, welche in einer gewissen Zeit durch die Seitenwandöffnung in das unter Wasser befindliche Gefäß floß, schloß man auf die Geschwindigkeit des Wassers in der Tiefe des betreffenden Flusses. Die hierbei gemachten Voraussetzungen zeigten sich bald nachher als unstatthaft.

Mit Abbildungen begleitete Beschreibungen dieser Flasche finden sich bei Brünings, a. a. O., S. 45, Fig. 5 und in der Nuova Raccolta, Tomo II, Pag. 460, Tav. 10, Fig. 1.

Ein anderes Mittel zum Messen des Wassers kleiner Flüsse (Bäche), der sogenannte Regulator, wurde seiner Zeit von Guglielmini in Vorschlag und in Anwendung gebracht. Dieser bestand in einem derartigen Einbaue quer in den Fluß, daß eine rectanguläre Durchlaßöffnung geschaffen wurde, hinter der sich constantes Druckwasser über ihrer oberen Kante bilden konnte, so daß überhaupt ein Ausfluß durch eine sogenannte Lesbros Mündung (§. 101) entstand. Mittelst Formeln, wie die auf S. 243 dieses Buches, ließ sich dann die betreffende mittlere Geschwindigkeit berechnen. Auch Michelotti hat einen solchen Regulator zu Beobachtungen fließenden Wassers mehrfach in Anwendung gebracht. Man sehe deshalb die hydraulischen Versuche Michelotti's (Zimmermann's Uebersetzung), Bd. I, S. 119 und Bd. II, S. 196. Ferner verdient auch nachgelesen zu werden das mit „Del Regolatore" überschriebene Capitel in Venturoli's „Elementi di Meccanica e d'Idraulica", Pag. 240, §. 525.

[2]) Von τάχος (tachos) Geschwindigkeit.

zwei Hauptgattungen unterscheiden. **Erstens** solche, wobei feste Körper der Strömung des Wassers frei überlassen werden, sogenannte **Schwimmer**, deren Anwendung sich darauf gründet, daß sie genau die Geschwindigkeit des Wassers annehmen, auf welchem sie schwimmen[1]). **Zweitens** Instrumente, wo man die **statische** oder **mechanische** Wirkung des Wassers gegen feste Flächen benutzt, um daraus mehr oder weniger direct die Geschwindigkeit des fließenden Wassers zu bestimmen.

Wir werden im Nachstehenden die hauptsächlichsten Schwimmer und mechanischen Instrumente kurz besprechen.

A. Schwimmer.

1) **Holzstückchen, Holzklötze**[2]), **Tönnchen**[3]), **Glasflaschen, Stäbe, hohle Kugeln u. s. w.** läßt man je nach Umständen unmittelbar auf der Wasserfläche oder etwas unter derselben tauchend so schwimmen, daß man nur die Zeit zu beobachten braucht, innerhalb welcher der betreffende Körper eine bestimmte vorher gemessene Strecke **gleichförmig**, ohne durch irgend welche Hindernisse gestört zu werden, durchläuft. Der Quotient aus dem zurückgelegten Wege, dividirt durch die beobachtete Zeit, giebt die Geschwindigkeit des Wassers in dem betreffenden Stromstriche. Wie man hieraus auf die Geschwindigkeit einer bestimmten Perpendiculare und weiter auf die eines ganzen Profiles zu schließen vermag, wird weiter unten ausführlich erörtert.

2) **Der Stab des Cabeo**[4]), oder der hydrometrische Stab, Fig. 145, der bereits §. 124 bei den Wiebeking'schen Geschwindigkeitsmessungen im Rheine erwähnt wurde, kann entweder von so einfacher Anordnung, wie bei **Wiebeking**, d. h. ein schwimmender, unten mit Eisen beschlagener Stab sein, oder, wie in unserer Abbildung, eine hohle Blechröhre von 30 bis 40 Millimeter Durchmesser mit Deckel und Boden bilden, welche aus gleich langen, zusammengeschrobenen Stücken mn besteht und die mit kleinen Metallkugeln etc. für die gehörige Eintauchung gefüllt werden kann.

Fig. 145.



Hat der Stab auf seine ganze Länge

[1]) Bei verhältnißmäßig großen Körpern ist diese Annahme nicht ganz richtig. So z. B. bewegen sich ohne weitere Triebkraft stromabwärts fahrende Schiffe immer etwas schneller als das Wasser, was man an der Wirksamkeit der Steuerruder bemerken kann.

[2]) Grebenau, „Rheinstrommessung" etc., S. 16 und S. 76.

[3]) Humphreys und Abbot's Mississippi-Messungen (Deutsche Uebersetzung), S. 50, §. 67.

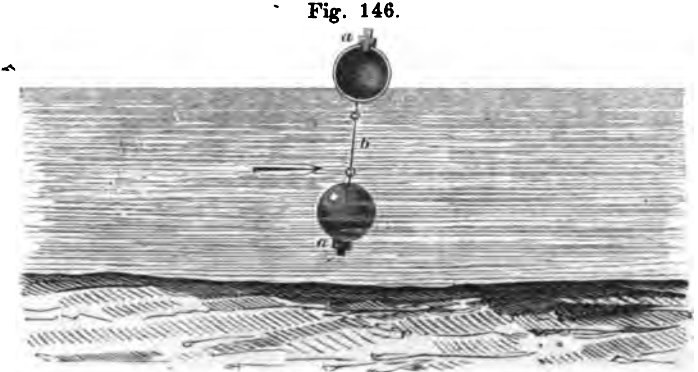
[4]) Cabeo (geb. 1585 zu Ferrara, gest. 1650 zu Genua), Jesuit und eine Zeit lang Professor der Mathematik in Parma, benutzte den nach ihm benannten Stab (asta) zuerst im Jahre 1646, worüber von Masetti berichtet wird in der „Nuova Raccolta", Tomo II, Pag. 398. Nachher bemühte sich ein anderer Italiener und Zeitgenosse von Cabeo, Barattieri, um die Verbesserung dieses hydrometrischen Stabes, worüber Brünings in seiner Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, S. 99 ff., betreffende Angaben liefert.

einen gleichen Querschnitt (und verhütet man das Aufstoßen auf den Boden, wie die Einwirkung des Windes auf das aus dem Wasser hervorragende Ende), so kann man annehmen, daß er sich bald mit der mittleren Geschwindigkeit des Längenprofiles fortbewegt, in welchem er schwimmt.

Wiebeking[1]) empfiehlt diesen Stab, für jede beliebige Tiefe des Stromstriches, unter allen Schwimmern am meisten, und selbst Hagen[2]) führt eine Stelle an, wo er oft mit großem Vortheile benutzt worden sein soll. In neuester Zeit (1867) hat Grebenau bei seinen „Rheinstrommessungen" von derartigen Stabschwimmern nützlichen Gebrauch gemacht. Die dabei verwandten cylindrischen hölzernen Stäbe hatten 3 Centimeter Dicke und tauchten 45 Centimeter tief ein, daß sie vertical (?) schwammen. Ausführliches hierüber in der erwähnten Grebenau'schen Schrift, S. 79 ff. Theoretisch handeln am Ausführlichsten über diesen Stab die italienischen Professoren Masetti in der „Nuova Raccolta", Tomo II, Pag. 494 und Venturoli in der unten notirten Quelle[3])

3) Hohlkugeln von Metallblech, Fig. 146, von gleichem, 10 bis 20 Centimeter betragenden Durchmesser, mit Verschraubung *a*

Fig. 146.



und Dichtung versehen, um durch Einfüllung von Wasser und nachherigem Verschließen die Kugeln zu bestimmten Einsenkungen veranlassen und die Geschwindigkeit in der Schwimmtiefe der zweiten Kugel angeben zu können, die überdies mit der ersten, nahe der Oberfläche schwimmenden, durch einen an beiden Enden mit Haken versehenen Draht *b* verbunden ist. Durch entsprechende Gestaltung der an die beiden Kugeln befestigten Oesen ist sowohl die Verbindung der Kugeln leicht zu bewirken, als deren Auslösung im Wasser zu verhüten. Nach vielfachen Messungen mit derartigen, der technischen Hochschule in Hannover gehörigen Kugeln schwimmen sie bei weitem unregelmäßiger, als die vorbemerkten Schwimmstäbe.

---

[1]) a. a. O., §. 180, S. 181 ff.

[2]) a. a. O., 2. Theil, Bd. 1, S. 250.

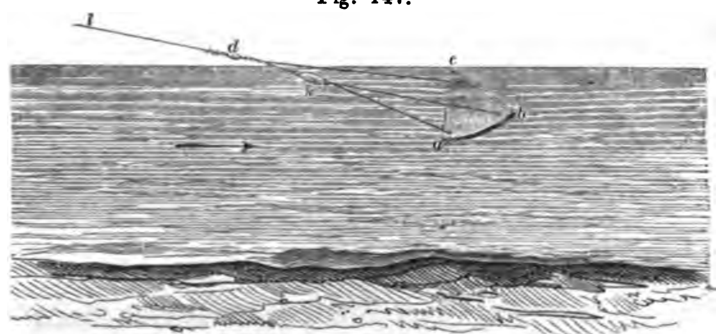
[3]) „Elementi di meccanica e d'idraulica". Vol. II. Septima edizione. Milano 1847. §. 487.

Auch Lahmeyer in seinen „Erfahrungsresultaten“ (S. 50, Note 2) bemerkt, daß Flaschen weit besser schwimmen als Kugeln, die ein zu großes Beharrungsvermögen besitzen.

Hat man zuerst die Geschwindigkeit $= V$ beobachtet, mit welcher die obere Kugel schwimmt und nachher ferner die Geschwindigkeit $= u$ der verbundenen Kugeln, so läßt sich die Geschwindigkeit c der unteren Kugel aus der Gleichung $u = \frac{V+c}{2}$ zu $c = 2u - V$ bestimmen[1]).

4) Das Log der Seeschiffer, Fig. 147. Ein Schwimmer

Fig. 147.



für den besonderen Fall, daß man von entsprechenden Stellen, z. B. Brücken, namentlich bei Hochwasser, Messungen der Oberflächengeschwindigkeit zu machen beabsichtigt. Es besteht das Log aus drei Haupttheilen, dem Logbrettchen, der Logleine und der Logrolle[2]), wozu gewöhnlich noch das Logglas, d. h. eine kleine Sanduhr (die halbe Minuten angiebt), kommt. Das Logbrett ist ein hölzerner Quadrant *abc* von etwa 15 bis 16 Centimeter Radius und 12 Millimeter Dicke, an dessen Bogenrande *ab* ein Bleistreifen befestigt ist, damit dasselbe, ins Wasser geworfen, so weit einsinkt, daß nur die Spitze *c* hervorragt und zugleich in möglichst senkrechter Stellung fortschwimmt. Die Logleine *l* ist durch kurze Schnüre *da*, *db* und *dc* mit dem Log verbunden, wozu letzteres nahe seinen Winkelpunkten durchbohrt ist. Bei *k* befindet sich eine Art von Zapfenkuppelung (Dog und Pinne), die durch einen starken Ruck an der Logleine gelöst werden kann, damit beim Wiederaufwickeln der letzteren das Logbrett eine flache Lage annimmt.

Ein verbessertes sogenanntes „Patent-Log“, mit einer Propeller-Schraube ausgestattet, findet sich abgebildet und beschrieben in des Verfassers „Allgemeiner Maschinenlehre„, Bd. I, S. 139. Ein Schiffslog nach neuerer Anordnung (Reynold's Patent und „The Pendant Log“ genannt) lassen die vorstehenden

---

[1]) Mehr hierüber sehe man in Venturoli, a. a. O., §. 482, so wie in Bornemann's „Hydrometrie“, S. 92.

[2]) Die Logrolle zur Aufnahme, zum Los- und Aufwickeln der Logleine ist, als selbstverständlich, in unserer Figur weggelassen.

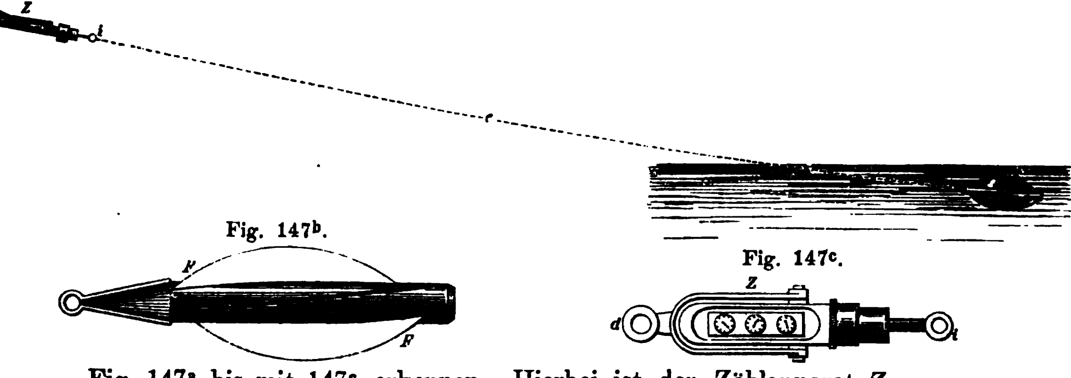


Fig. 147^a.

Fig. 147^b.

Fig. 147^c.

Fig. 147^a bis mit 147^c erkennen. Hierbei ist der Zählapparat Z von der Wasserschraube F derartig getrennt, daß sich ersterer, wie aus Fig. 147^a erhellt, auf dem Hintertheile des Schiffes (auf einer Brücke etc.) befindet, während letztere im Wasser schwimmt, das Verbindungsmittel beider aber die $\frac{1}{4}$ Zoll (engl.) dicke Logleine e derartig bildet, daß sie zu gleicher Zeit die Transmissionswelle ist, welche die Umdrehungen der Schraube F auf den erwähnten Zählapparat Z überträgt. Der Körper der Schraube ist dabei ein Holzcylinder von 50 Millimeter Dicke und 400 Millimeter Länge, während die äußerste Kante eines jeden der drei Schraubenflügel 70 Millimeter von der Drehachse entfernt ist. Da die Schraube der Wirkung zweier Kräfte unterworfen ist, wovon die eine (die Schwerkraft) senkrecht, die andere (der Druck des fließenden Wassers) horizontal gerichtet ist, so erklärt sich bald, weshalb die Schraube nicht untersinkt, sondern mit ihrer Achse in einer Richtung erhalten wird, welche, als Resultirende der beiden genannten Kräfte, mit der Richtung der rotirenden Logleine ie zusammenfällt.

B. Besondere mechanische Instrumente.

Mancherlei selbstverständliche Uebel, welche alle Schwimmer mit sich führen, insbesondere die Voraussetzung, daß das Wasser in der Länge des Stromfadens, worin der schwimmende Körper fließt und woraus die Geschwindigkeit abgeleitet werden soll, eine ganz gleichförmige Bewegung habe, daß die Schwimmer nur im Stromstriche mit entsprechender Regelmäßigkeit fortgehen u. s. w., sind bereits seit langer Zeit Veranlassung gewesen, Instrumente zu ersinnen, welche von diesen Uebelständen frei sind. Ein sehr einfaches, aber auch nur zur Bestimmung der Oberflächengeschwindigkeit brauchbares Instrument ist:

1) Das hydrometrische Strauberädchen[1]), Fig. 148,

[1]) Von wem dies Strauberädchen zuerst in Anwendung gebracht worden ist, hat der Verfasser nicht ermitteln können. Die älteste von ihm aufgefundene Nachricht findet sich in Leupold's „Theatrum Machinarum Generale". Leipzig 1724, S. 151, Tafel 59. Brünings, a. a. O., S. 86, berichtet über die Ver-



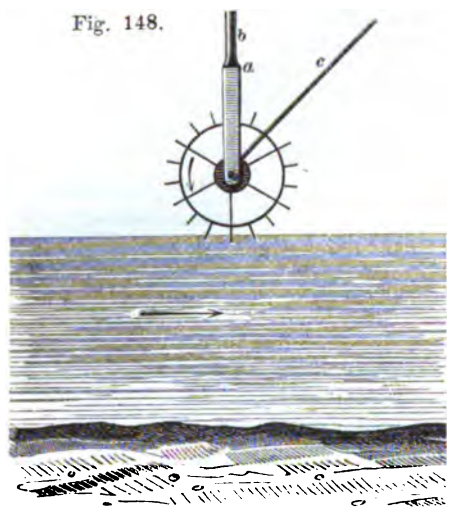


Fig. 148.

aus dünnem Blech möglichst leicht gearbeitet, was höchst beweglich in Zapfen läuft, die in einer Gabel *a* ihre Lagerstellen finden. An der Zinke oder dem Stiele *b* der Gabel wird das Rädchen in der gezeichneten Stellung ins fließende Wasser gehalten und die während bestimmter Zeit erfolgten Umdrehungen durch die Zahl der Windungen eines dünnen Fadens *c* bestimmt, den man auf der Welle des Rädchens sich aufwickeln läßt.

Wegen der Zapfenreibung, der schiefen Eintauchung der Radschaufeln, auch weil letztere immer etwas Wasser mit in die Höhe nehmen, können die hiermit angestellten Geschwindigkeitsmessungen keine großen Ansprüche auf Sicherheit machen.

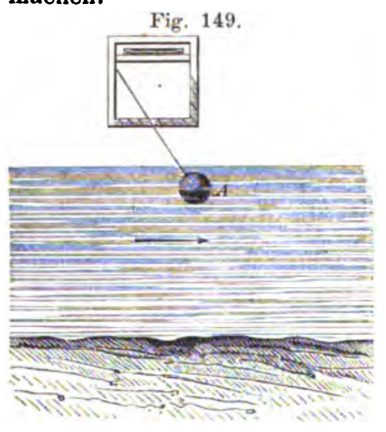


Fig. 149.

Aus letzterer Ursache und namentlich um Geschwindigkeitsmessungen an jeder beliebigen Stelle eines fließenden Wassers vornehmen zu können, erdachte man die ferner hier zu nennenden Instrumente, wovon wir zunächst aufführen:

2) Das hydrometrische Pendel oder den Stromquadranten, Fig. 149.[1]) Eine an einem Faden aufgehangene Kugel *A*, von größerem specifischen Gewichte als das Wasser, wird dem Stoße des strömenden Wassers ausgesetzt und aus dem Abweichungswinkel der Fadenrichtung von der Verticalen, auf die betreffende Stromgeschwin-

---

wendung dieses Rädchens durch die Italiener Muratori, Genneté und Andere. Nicht minder hat mit derartigen Rädchen auch Michelotti (der Vater) Versuche angestellt, worüber in dessen wiederholt citirtem Werke (Deutsche Uebersetzung von Zimmermann, S. 111 ff.) berichtet wird.

[1]) Das von Zendrini, Lecchi, Lorgna, Michelotti u. A. zu Versuchen benutzte hydrometische Pendel soll (nach Boileau, a. a. O., Pag. 265) Castelli erfunden haben. Theorien desselben, mit Beachtung der Gestalt, welche der Faden im tiefen Wasser annimmt (Kettenlinie oder Ellipse), hat besonders Gerstner in seiner Schrift gegeben: „Bemerkungen über das hydrometrische Pendel". Prag 1819. Ferner handelt davon auch Venturoli in seinem wiederholt citirten Buche: „Elementi di Meccanica e d'Idraulica". Pag. 226, §. 500.

digkeit geschlossen. Bei Messungen in einiger Tiefe wird dies Instrument ganz unbrauchbar, da die Wirkung des Wasserstoßes gegen den Faden einen andern Abweichungswinkel erzeugt, als ohnedem wahrgenommen werden würde, betreffende Rechnungen aber zu keinem Ziele führen [1]).

Bekanntlich war der Stromquadrant vorzugsweise das Instrument, womit die obengenannten italienischen Hydrauliker Guglielmini, Grandi, Zendrini, Michelotti etc. ihre Geschwindigkeitsmessungen ausführten.

3) Die hydraulische Schnellwaage des Michelotti (wahrscheinlich vom Jahre 1771) [2]), Fig. 150, aus einer ebenen Platte A bestehend, gegen welche das fließende Wasser stößt und die an einer Stange B befestigt ist, welche mit einem Hebel DE derartig zu einem Ganzen vereinigt werden kann, daß beide zusammen an einer rechtwinklig auf DE stehenden Achse aufgehangen und um diese zu Schwingungen veranlaßt werden können. Die betreffenden Hebellager werden von einem besonderen Gestelle (in der Figur weggelassen) getragen [3]). Wie man durch geeignete Verschiebung der Laufgewichte K, wenn die Platte A der Stromwirkung ausgesetzt ist, eine Verticalstellung der Stange B und Horizontalstellung des Hebels DE bewirken kann, ist von selbst klar. Aus den betreffenden Dimensionsverhältnissen der Platte, des Hebels und der Gewichte K läßt sich auf die Größe des Wasserstoßes und hiervon wiederum auf die betreffende Stromgeschwindigkeit schließen.

Fig. 150.

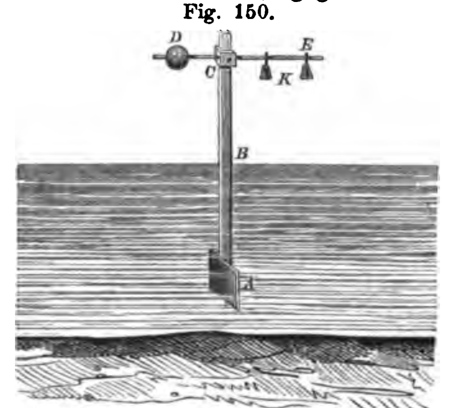
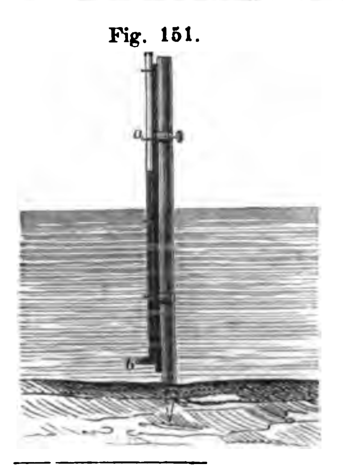


Fig. 151.



Die verhältnißmäßig großen Reibungen bei diesem Instrumente, die selbst genauere Stoßmessungen unsicher machen, sind Ursachen, daß auch dies Instrument gegenwärtig nirgends mehr Anwendung findet.

4) Pitot's Röhre, Fig. 151 (zuerst

[1]) Sehr speciell hat sich, wie schon bemerkt, mit diesem Instrumente Gerstner in der bereits genannten Schrift, so wie in seinem Handbuche der Mechanik, Bd. 2, §. 229, beschäftigt. Empfehlenswerth ist ferner das Lesen der Abschnitte „Del pendulo idrometrico“ und „Del pendulo idrometrico composto“ in Venturoli's Buche Elementi di Meccanica e d'Idraulica.

[2]) Michelotti, Hydraulische Versuche, S. 220, §. 36.

[3]) Michelotti, a. a. O., Tafel IV, Fig. 42. Zu erwähnen ist, daß schon

1730 von Pitot der Pariser Academie der Wissenschaften präsentirt)[1]), besteht aus zwei nicht zu engen Glasröhren *a*, die beide an den Enden offen sind, wovon aber die eine am unteren Ende rechtwinklig umgebogen und zu einer entsprechend feinen trichterförmigen Spitze *b* gestaltet ist. In letzterer Röhre steigt das Wasser um eine der Geschwindigkeit des fließenden Wassers in gewissem Verhältnisse proportionale Größe höher, als in der durchaus geraden Röhre, aus welcher Höhendifferenz auf die betreffende Stromgeschwindigkeit geschlossen werden kann.

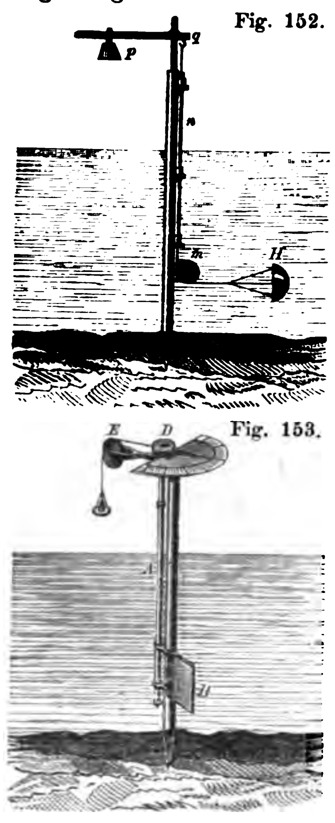


Fig. 152.

Fig. 153.

5) Wasserhebel des Lorgna, Fig. 152 (in dem unten notirten Werke Lorgna's zuerst besprochen)[2]). Statt der Platte bei Michelotti, wogegen das Wasser stößt, ist hier eine hohle Halbkugel *H* angebracht, die durch einen über eine Rolle *m* durch eine Röhre *n* gehenden Faden mit einer gewöhnlichen Hebelschnellwaage *pq* in Verbindung gebracht ist. Auch dies Instrument ist gegenwärtig außer Gebrauch.

6) Wasserfahne des Ximenes, Fig. 153 (von diesem berühmten Hydrauliker im Jahre 1780 zunächst für Messungen im Arno erfunden)[3]). Dabei ist *A* eine lothrechte Spindel, die um Zapfen an beiden Enden drehbar, unten aber mit einer Platte *B* versehen ist, gegen welche man ebenfalls das fließende Wasser stoßen läßt. Am oberen Ende der Spindel *A* ist eine horizontale Scheibe *D* angebracht, an dieser eine Schnur befestigt und solche wiederum über eine Leitrolle *E* geschlagen, an deren äußersten Ende eine Schale zum Auflegen von Gewichten vorhanden ist. Letzteres kann man sich leicht so groß denken, daß die Scheibe *B* normal von den Wasserfäden getroffen wird, deren Geschwindigkeit bestimmt werden soll[4]).

Leupold (Theatr. mach. generale, 1724, Tab. 59) derartige Instrumente beschrieben hat.

[1]) Unter der Ueberschrift: „Description d'une machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes".

[2]) Memorie interno all' acque correnti. Verona 1777. Auch Brünings bespricht in seiner wiederholt notirten Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, S. 88 ff., das Lorgna'sche Instrument.

[3]) Nuove Sperienze Idrauliche etc. Siena 1780. Dann in der Nuova Raccolta II (1824), Pag. 477, so wie endlich im Brünings'schen Werke S. 67, S. 69 und 99.

[4]) Man sehe Woltmann's Beiträge zur hydraulischen Architectur, Bd. 3, S. 310.

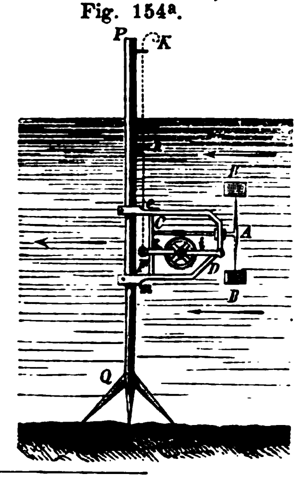


Fig. 154.

7) Tachometer von Brünings, Fig. 154 (wahrscheinlich schon vor 1789 von Brünings in Ausführung und bei seinen holländischen Strommessungen in Anwendung gebracht)[1]), ein Instrument, welches zwar in der Hauptsache an denselben Uebeln der zuletzt aufgeführten leidet, aber deshalb berühmt geworden ist, weil Brünings seine zahlreichen, bereits vorher erwähnten und theilweise aufgeführten großartigen Versuche in den Hauptflüssen Hollands damit angestellt hat und weil dies Instrument zum Messen der Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen derselben Perpendicularen, unmittelbar nacheinander, benutzt werden kann, ohne daß man es zum betreffenden Ablesen aus dem Wasser zu nehmen nöthig hat. Die Stoßplatte A nebst dem Kasten B, zur Führung ihres Armes und der Leitrolle C für den Faden D, welcher die Stoßkraft des Wassers auf den Hebel EF überträgt, sind an der festen Stange H mittelst Zahnstangen und Zahnradanordnungen (die in unserer Figur weggelassen sind) verschiebbar und beliebig höher und niedriger zu stellen.

8) Woltmann's hydrometrischer Flügel, (wahrscheinlich noch vor 1790[2]) von Woltmann in Hamburg zuerst zu Geschwindigkeitsmessungen in der Elbe in Anwendung gebracht), ist einem Anemometer von Schober nachgebildet und daher nicht ganz angemessen nach Woltmann (allein) benannt worden[3]).

Fig. 154ª.



Unsere Fig. 154ª zeigt den Flügel in der Gestalt, welche ihm Woltmann zuerst gab. Der Flügel (ein kleines Windmühlenrädchen) AB hat vier Arme und deshalb auch vier Flächen B, gegen welche man das strömende Wasser wirken läßt. Auf der Flügelwelle Ac ist eine endlose Schraube eingeschnitten, die ihre Bewegung auf ein Zahnrad i überträgt, welches

[1]) Brünings, a. a. O., S. 110 ff. Dann Woltmann in seinen Beiträgen zur hydraulischen Architectur. Dritter Band, S. 347 ff.

[2]) Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels. Erste Auflage (4°), Hamburg 1790. Zweite (vom Herausgeber mehr oder weniger verdorbene) Auflage (8°), datirt vom Jahre 1835.

[3]) Woltmann bemerkt selbst in der Vorrede seines Buches, daß er die Hamburgische Gesellschaft zur Beförderung der Künste und Gewerbe auf Schober's Anemometer aufmerksam gemacht habe. Daß er der Erfinder des Flügels sei, wird nirgends behauptet.

in einer Brücke *DF* gelagert ist. Letztere Brücke dreht sich um *D*, während ihr anderes Ende *F* mittelst einer nach oben gehenden Schnur *K* gefaßt werden kann und dadurch der Eingriff zwischen Zahnrad und Schraube zu bewirken ist. Nach Aufhören des Zuges an der Schnur *k* wird durch eine geeignet angebrachte Feder die Auslösung von Zahnrad und Schraube bewirkt. Mittelst geeigneter Bügel und zweier Hülsen *m* läßt sich das ganze Instrument auf einer kräftigen Stange *PQ* verschieben und in geeigneter Tiefe feststellen.

§. 126.

Woltmann'sche Flügel der Gegenwart.

a. Verbesserter Woltmann'scher Flügel ohne electrische Zeichengebung.

Abgesehen von den Schwimmern, haben sich von sämmtlichen im vorigen Paragraphen besprochenen mechanischen Instrumenten zum Messen der Geschwindigkeiten in Canälen, Flüssen etc., strömenden Gewässern nur der Woltmann'sche Flügel und die Pitot'sche Röhre als wirklich practisch brauchbar herausgestellt, weshalb auch nur diese nach einander speciell erörtert werden sollen.

Fig. 154[b] zeigt einen Woltmann'schen Flügel in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Größe, wie solcher von Landsberg in Hannover für die Maschinen-Modellsammlung der hiesigen technischen Hochschule, hauptsächlich nach Amsler'schem[1]) Vorbilde, ausgeführt wurde.

Der schraubenförmige Flügel *aa* rotirt hier innerhalb des Blechcylinders *T*, dessen Zweck ist, das seitliche Ausweichen der Wasserfäden in den Umgebungen des Flügels unschädlich zu machen[2]). Die Flügelwelle *b* wird in ihrer Fortsetzung nach rechts von einer cylindrischen Hülse *c* umgeben, die bei *S* theilweise aufgeschnitten ist, um die daselbst angebrachte endlose Schraube mit einem Rade *d* von 100 Zähnen in Eingriff bringen zu können. Letzteres Zahnrad hat demnach stets einen ganzen Umlauf gemacht, wenn der Flügel 100 Umdrehungen (Touren) vollendet hat. Zum Ablesen der Einer und Zehner dient die nahe der Peripherie des Rades *d* angebrachte Theilung, nebst dem correspondirenden Zeiger *e*. Züm Ablesen der Hunderte wird ein sogenanntes Maltheserkreuz oder das Einzahnrad *f* benutzt. Es steckt nämlich auf der Achse des Rades *d* eine Scheibe, die mit einem einzigen Zahne versehen ist, welcher letzterer in die Lücken des Maltheserkreuzes *f* greift. Letzteres wird also um eine Zahntheilung verdreht, wenn das Rad *d* einen

---

[1]) J. Amsler-Laffon, „Der hydrometrische Flügel". Beschrieben und abgebildet in den Prager (von Prof. Kick redigirten) „Technischen Blättern", III. Jahrg. (1871), S. 91.

[2]) Nach Wissen des Verfassers hat Treviranus seiner Zeit zuerst vorgeschlagen, das Woltmann'sche Flügelrad mit dem Ringe *T* zu umgeben. Man sehe hierüber eine Abhandlung von Treviranus, welche in Förster's Allgemeiner Bauzeitung, Jahrg. 1861, S. 125, abgedruckt ist.

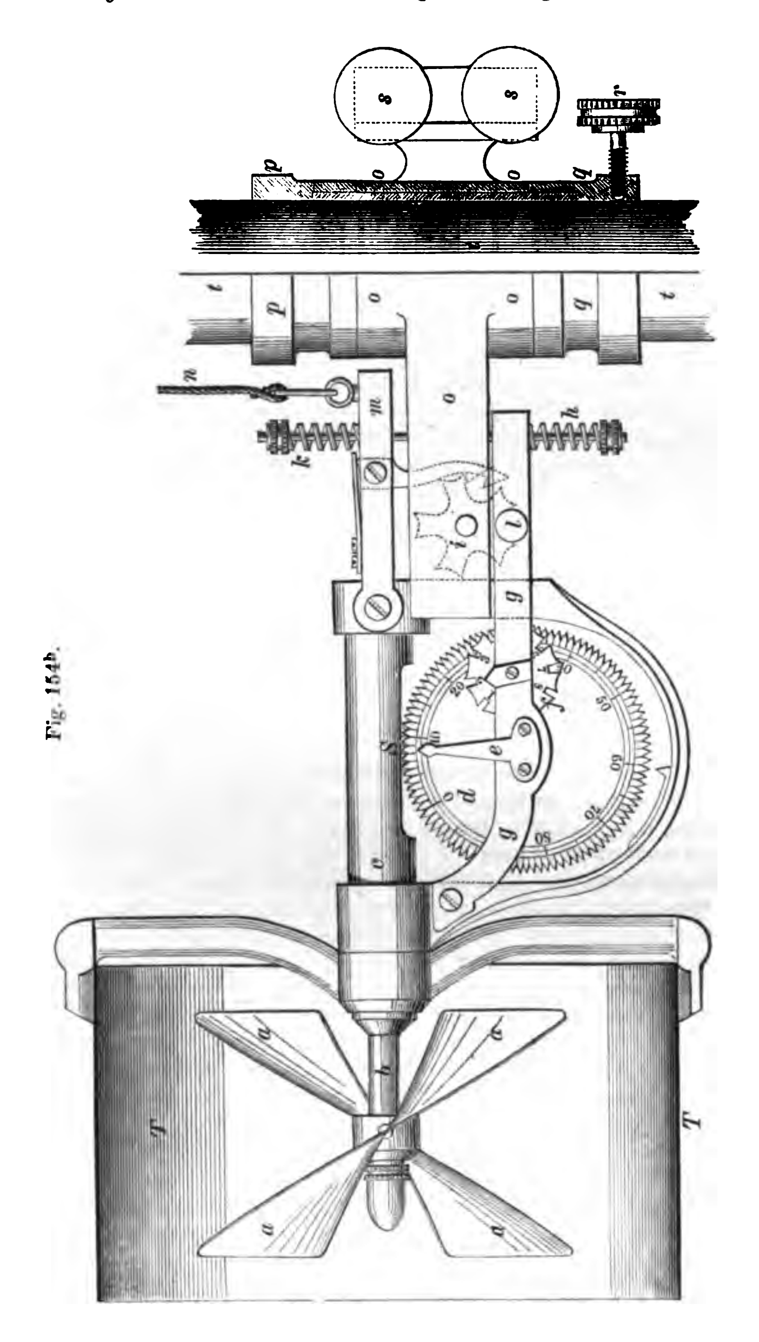


Fig. 154b.

ganzen Umlauf vollendet hat. Durch diese Anordnung ist die Mühe des Ablesens eine sehr geringe. Beispielsweise giebt in unserer Abbildung der Zeiger *e* an, daß der Flügel 208,5 Umläufe gemacht hat.

Der Mechanismus zum Ein- und Auslösen ist (nach Amsler) in folgender Weise angeordnet: Ein Zug (Ruck) an der Schnur *n* hebt einen Hebel *m* und zwei an diesem angebrachte Sperrhaken aufwärts. Diese beiden Sperrhaken sind um eine halbe Theilung gegen einander versetzt und zwar so, daß immer einer in den entsprechenden Zahn des Sternes *i* faßt und diesen um eine halbe Theilung weiter schiebt, wodurch der cylindrische Stift *l* aus der Zahnlücke herausgedrängt wird und alsbald sich auf den nächsten Zahn legt. Mit dem Stifte *l* wird aber auch der Hebel *g* und damit wieder das Zählwerk zurückgeschoben, also ausgerückt. Um letzteres wieder einzurücken, genügt abermals ein Ruck an der Schnur *m*. Der Stern *i* wird wieder um eine halbe Theilung fortgeschoben, der Stift *l* fällt in die nächste Zahnlücke ein u. s. w. Die Sicherheit der zuletzt erörterten Actionen wird durch geeignete Spiralfedern *h* und *k* unterstützt.

Getragen wird das ganze Instrument von der Hülse *o*, welche sich auf dem Rohre *pq* frei drehen kann. Letzteres ist mittelst 3 Schrauben *r* auf der Holzstange *tt* befestigt, deren unteres Ende in bekannter Weise auf dem Boden des Flusses (während der Messung) ruht. Mittelst der Schrauben *ss* wird ein sogenannter Steuerflügel befestigt, deren Ebene naturgemäß in der nach hinten verlängerten Richtung der Flügelradwelle *b* liegen muß.

Anmerkung. Um Geschwindigkeiten größerer Flüsse und Ströme möglichst bequem messen zu können, bedient man sich gewöhnlich, wie Brünings[1]), Funk[2]), Baumgarten[3]), Grebenau[4]) u. A., zweier fest mit einander verkuppelter Schiffe, die man vor Anker legt und mit dem Instrumente im freien Wasser zwischen ihnen operirt. Zu den beachtenswerthen hierher gehörigen Anordnungen gehören auch die, welche Baumgarten bei seinen Messungen in der Garonne vorgenommen, dessen Flügelaufstellung aus den Fig. 155 und Fig. 155[a] erhellt. *a* ist eins der beiden neben einander aufgestellten Schiffe, die durch starke Zangen mit einander verbunden sind, dabei aber $3^m,5$ freien Raum zwischen ihren höchsten Bordseiten lassen. Der Flügel *c* mit der Fahne *d* ist an einer 2 Centimeter starken Stahlstange *e* befestigt, die durch Seile *f* gegen den auf Biegung der Stange wirkenden Wasserstoß verstrebt ist; die Seilenden *g* dienen auch zur Handhabung der Stange. Am untern Ende der Stange ist eine Scheibe zur besseren Sicherung der Aufstellung angebracht, die ohne Buchstaben in der Figur

[1]) Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, S. 115 mit Abbildungen.

[2]) Die wichtigsten Lehren der Hydrotechnik, S. 57; ebenfalls mit Abbildungen.

[3]) Annales des Ponts et Chaussées. 1847, 3, Pag. 374, P. 127.

[4]) Rheinstrom-Messungen, S. 14 ff. mit Abbildungen auf Taf. VII.

Fig. 155.

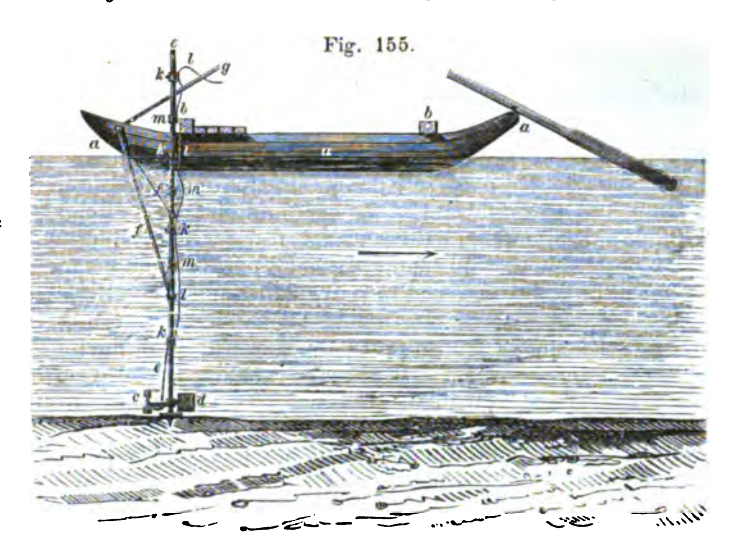
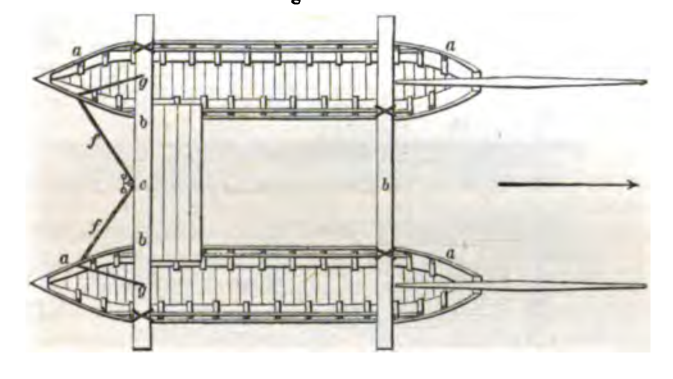


Fig. 155a.



unter dem Flügel hinlänglich zu erkennen ist. Die Stahlstange ist aus mehreren Theilen zusammengesetzt, kann länger und kürzer gemacht werden, wozu Kuppelmuffe *m* mit Keilen versehen, vorhanden sind. Endlich sind *k* Hülsen mit Oesen zur Führung des Messingdrahtes *l*, um den Zählapparat des Flügels wirksam machen zu können.

Baumgarten bediente sich dieser Aufstellungsweise bis zu 10 Meter Tiefe bei geringen Geschwindigkeiten. Bei Geschwindigkeiten über 2 Meter an der Oberfläche nur bis zu 4 Meter Tiefe. Für größere Tiefen ließ er die Stange *e* ganz weg, und befestigte den Flügel an dem Ende eines Eisendrahtes, der etwas darüber mit einem linsenförmigen Bleigewichte von 75 Kilogrammen belastet war.

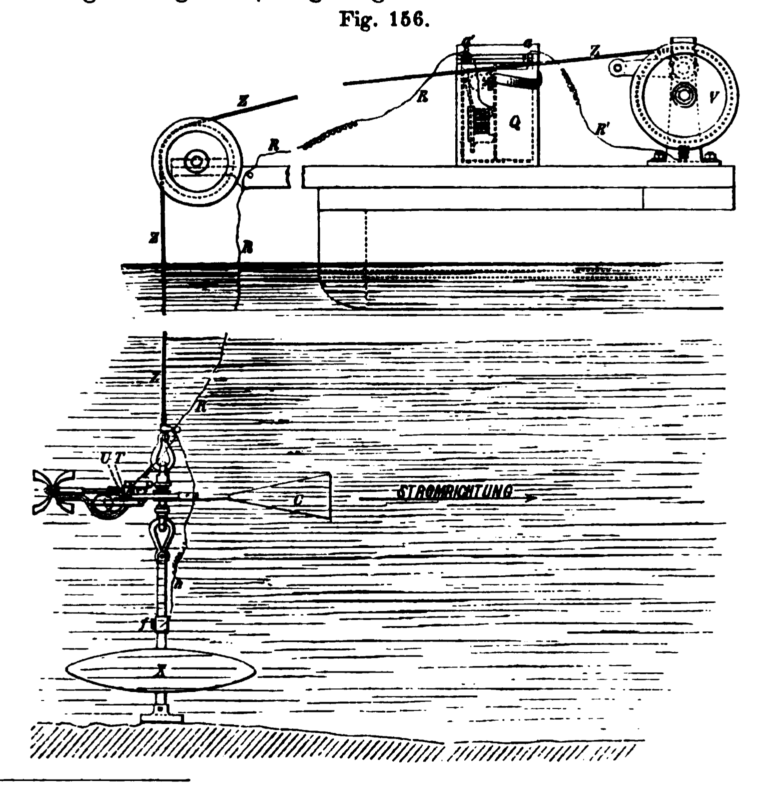
§. 127.

b. Amsler's hydrometrischer Flügel mit electrischem Signalapparat und mit Haspel zur Messung in grossen Tiefen [1]).

Der Uebelstand, daß man das vorher beschriebene Amsler-Landsberg'sche Instrument bei jeder Beobachtung aus dem Wasser heben muß, um die während einer bestimmten Zeit vollendete Zahl von Flügelumdrehungen abzulesen, ist durch die Beifügung eines electro-magnetischen Zähl- oder Signalapparates, nach eigenthümlicher Anordnung des Herrn Amsler, vollständig beseitigt worden. Eine zweite von diesem Herrn angebrachte Verbesserung besteht in einer zweckmäßigen Anordnung, um den Flügel in noch größeren Tiefen als die von 10 Metern (bei der Bornemann'schen Anordnung), also auch bei Tiefen von mehr als 30 Metern (wie beim Mississippi, S. 347, Note 3), in Anwendung bringen zu können.

Einen Amsler'schen Flügel, mit beiden hervorgehobenen Verbesserungen dargestellt, zeigt Fig. 156.

Fig. 156.



[1]) Mittheilungen des Hannov. Gewerbevereins, Jahrg. 1873, S. 11 (Amsler's neue Flügel). Ebendaselbst, Holsbeer's Flügel mit electro-magnet. Signalapparat. Ferner die selbstständige Schrift: „Der hydrometrische Flügel mit Zählwerk und electrischer Zeichengebung". Von J. Amsler-Laffon in Schaffhausen. Schaffhausen, Brodtmann'sche Buchdruckerei, 1877.

Was zunächst den electrisch-magnetischen Signalapparat betrifft, so besteht derselbe aus einem, am Flügel selbst angebrachten Contact, der nach je 100 Touren der Flügelachse geschlossen wird, und der in der folgenden (größeren) Fig. 156ª mit dem Buchstaben *P* bezeichnet ist. Ein Kästchen *Q*, auf dem an der Oberfläche schwimmenden Schiffe gehörig placirt, enthält hierzu ein sogenanntes galvanisches Element und eine damit verbundene Signalglocke. Zur bequemen Behandlung des Elementes kann man das ganze Innere des Kästchens *Q*, nach oben hin, herausziehen, sobald man vorher zwei an dem Deckel angebrachte Haken ausgehängt hat. *R* und *R'* sind zwei an die Batteriepole angeschlossene Leitungsdrähte, deren freie Enden man an Klemmen *a* und *a'* des Batteriekastens anschließt, nachdem man den erwähnten Deckel geöffnet hat.

Am unteren Ende des Leitungsdrahtes *R* (also am Flügel) befindet sich ein Neusilberring *T* (siehe specieller Fig. 156ª), den man mittelst einer Schraube *U* an den Bügel des Flügels befestigt.

Das Batterieglas räth Amsler, mit der Lösung von einigen Grammen Chromsäure in Wasser bis auf die Hälfte zu füllen. Die Klammern am Deckel des Elementes werden mit den Spiraldrähten am Kasten verbunden.

Die eine der electrischen Leitungen nach dem Contacte unweit *U* (bei *P* in der größeren Fig. 156ª), bildet ein starker Draht *Z*, während die andere Leitung der (bereits erwähnte) durch Guttapercha isolirte Draht *R* ist. Hieraus erkennt man allerdings bald, daß die Isolirung der Contactstelle (*P*, Fig. 156ª) zwar (wegen des umgebenden Wassers) keine vollständige, aber eine vollkommen genügende ist. Am Flußboden wird der Apparat durch die (circa 40 Kilogramm wiegende eiserne) Linse *X* gehalten, die durch Einschaltung eines geeigneten (eisernen) Gasrohres *f*, durch einen sogenannten Carabinerhaken mit dem Woltmann'schen Flügel verbunden ist.

Da es hierbei nicht möglich ist, die Flügelachse unabhängig von der Richtung der Wasserströmung senkrecht zum Querprofile des Flusses festzuhalten, so ist der Flügel an einen zweiten, über ihm befindlichen Carabinerhaken derartig aufgehangen, daß er sich frei in die Stromrichtung stellen kann. Ein conisch gestaltetes Steuerruder *C*, dessen Längenachse (in der Verlängerung) mit der Welle des Flügels zusammenfällt, bewirkt dann ein hinreichendes Einstellen parallel den Wasserfädenlängen des Flusses.

Von recht sinnreicher (practischer) Anordnung ist dann noch der Haspel *V*, den man auf dem Vordertheile des Schiffes (kleinen Bootes) festschraubt. Auf der Welle dieses Haspels ist der verzinkte Eisendraht *Z* aufgewickelt, an dessem freien Ende der zweite von den beiden vorhandenen Carabinerhaken, zum Aufhängen des Flügels, befestigt ist.

Endlich ist *R'* noch ein besonderer Leitungsdraht, der von der Batterie *Q* aus nach dem Haspel *V* führt und der zwischen den Klemmen *a* und *m* eingeschaltet ist.

Hinsichtlich des Haspels ist noch Folgendes zu erwähnen:

Mit der Kurbelwelle hat man ein Sperrrad fest vereinigt, dessen zugehöriger Sperrkegel am Gestelle von V angebracht ist. Will man nämlich den Flügel in einer beliebigen Tiefe festhalten, ohne daß die Linse X auf dem Fußboden aufliegen kann, so verhindert der eingeklinkte Sperrhaken ein zu weit gehendes Ablaufen des Aufhängedrahtes Z. Bemerkt zu werden verdient vielleicht noch, daß die Seiltrommel nicht auf der Kurbelwelle, sondern tiefer liegend angebracht ist, derartig, daß zwischen beiden noch ein geeignetes Zahnradvorgelege eingeschaltet werden konnte. Löst man andererseits den gedachten Sperrkegel aus und hält die Kurbel mit der Hand entsprechend zurück (bremst gleichsam), so kann man den Flügel weiter und zwar langsam hinablassen, bis endlich die Linse den Fußboden berührt.

Um die Tiefe, in welcher man den Flügel durch Abwickeln des Seiles Z von der Haspeltrommel hinabgelassen hat, sofort registriren zu können, hat man die Kurbelwelle mit einer endlosen Schraube versehen, die in ein entsprechendes Zahnrad faßt, auf dessen nach Außen verlängerter Achse ein Zeiger sitzt, welcher sich vor einer getheilten Kreisscheibe bewegt. Derselbe ist dabei so aufgeschoben, daß er sich nur durch Reibung an einer Stelle erhält, daher gedreht werden kann, während die Kurbel stehen bleibt.

Was nach vorstehenden Erörterungen die größere Abbildung des Flügels, Fig. 156ª, betrifft, so bleibt für deren Verständniß nur hinzuzufügen übrig, daß hier gleiche Theile mit denselben Buchstaben, wie dies bei der kleinern Fig. 156 der Fall war, bezeichnet wurden. Beim Gebrauche des Flügels verfährt man folgendermaßen:

Man senkt zuerst das ganze Instrument nebst der unten angehangenen Linse X so tief ins Wasser, daß die Achse des Flügels gerade mit dem Wasserspiegel zusammenfällt und stellt dabei den Zeiger am Registrirapparate des Flügels auf Null[1]). Senkt man nun durch Drehen der Kurbel den Flügel in die beabsichtigte Tiefe, so kann man diese (in Metern etc.) am Zifferblatte ablesen. Hierauf löst man die Sperrklinke aus und gestattet dem Instrumente so tief hinabzugehen, bis die Linse (mit ihrem Fuße) auf dem Fußboden auftrifft und daselbst ruht. Aus der Angabe des Zeigers am Registrirapparate, plus dem Abstande der Flügelachse vom Linsenfuße (beim Amsler'schen Instrumente 0,50 Meter), erhält man dann sofort die Wassertiefe der Beobachtungsstelle.

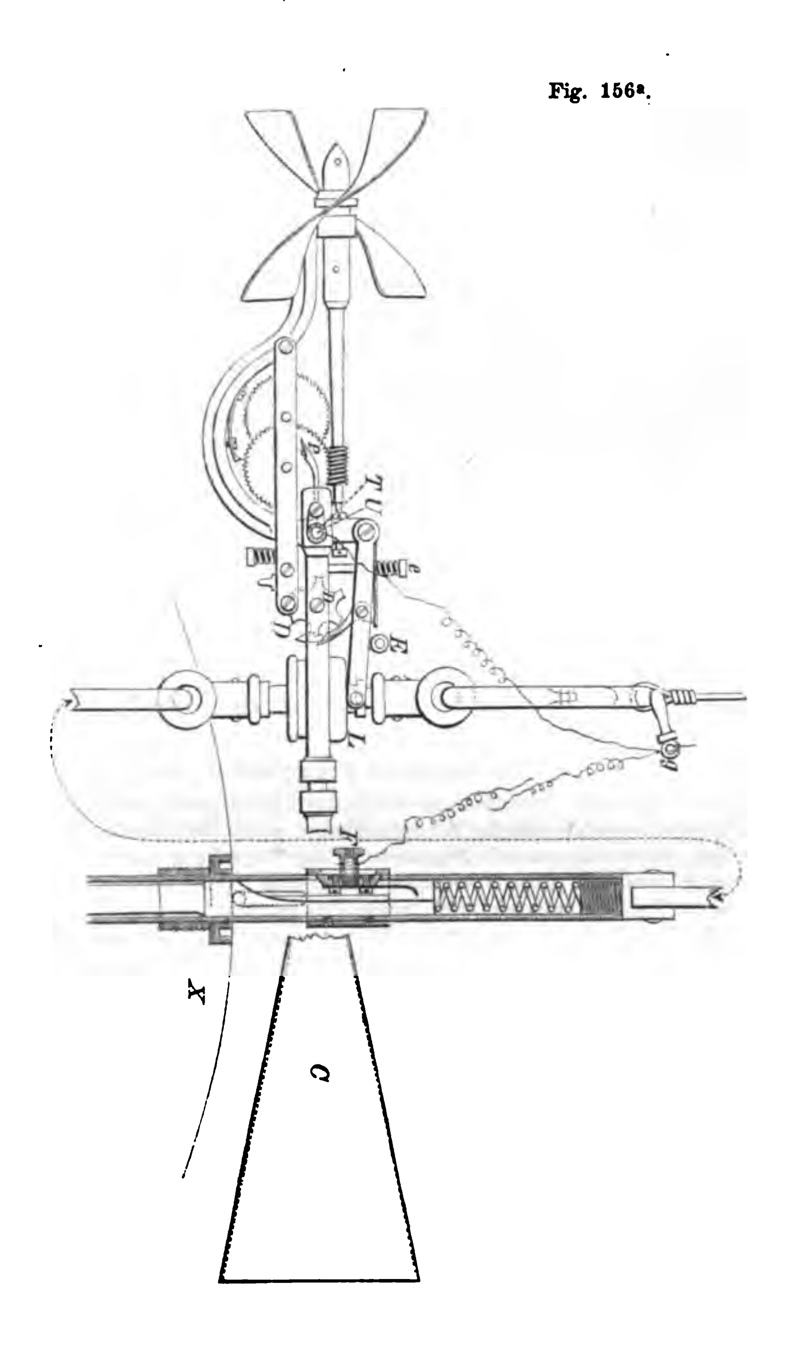
Bei dem Niedersinken des Instrumentes und der Linse läuft das Flügelrad fortwährend um, so daß, weil nach je 100 Touren der Stromschluß (Contact) eintritt, Glockensignale erfolgen, die jedoch ihrer Kürze wegen, von den lang anhaltenden Signalen recht wohl zu unterscheiden sind, welche auftreten, sobald der Linsenfuß den Flußgrund erreicht hat[2]).

---

[1]) Der Verfasser folgt von hier ab zuweilen wörtlich der Amsler'schen Beschreibung.

[2]) Sobald der Linsenfuß am Grunde auftrifft, staucht sich die über der Linse befindliche Fortsetzung der Verbindungstheile (zufolge einer Spiralfederanordnung) bei f etwas zusammen, verkürzt sich, worauf sich die betreffenden Theile berühren, wodurch der Stromschluß (Contact) erreicht wird. Der zugehörige Leitungsdraht ist in Fig. 156ª mit h bezeichnet.

Fig. 156a.



Ist man von letzterem Zustande genau überzeugt, so hebt man die gewichtige Linse mit dem Instrumente etwas in die Höhe, bis das Schellen aufhört (also bis der Taster eben nur noch aufsitzt, ohne zurückgeschoben zu werden). In dieser Stellung liest man am Zifferblatt eine entsprechende Anzahl $= e_0$ von Metern ab, so daß man für die totale Wassertiefe $= e$ erhält:

$$e = e_0 + 0^m{,}50.$$

Man hebt nun das Instrument (mit Linse) noch etwas weiter, bis der Zeiger einen ganzen Decimeter e_1 markirt und notirt die correspondirenden Zeiten t_0 und t_1 der beiden nächsten Signale. Beim zweiten Signale hebt der am Haspel stehende Gehülfe den Flügel durch Drehung der Kurbel um einen constanten Weg $= w$, z. B. um zwei Kurbelumdrehungen, die (beim Amsler'schen Flügelexemplare) $w = 0^m{,}40$ geben und läßt die Sperrklinke einfallen. Beim Eintritte des nächsten Signales wird wieder die Zeit t_1 notirt und der Flügel um w gehoben u. s. f., bis er 2—3 Centimeter unter dem Wasserspiegel anlangt. — Ohne den Flügel aus dem Wasser zu heben, rudert man das Boot auf die nächste Perpendiculare (Ordinate) des Profiles und wiederholt die Operationen.

Auf diese Weise erhält man die ganze Wassertiefe $e = e_0 + 0^m{,}5$ und die den Wassertiefen

$$e_1,\ e_2 = e_1 - w,\ e_3 = e_1 - 2w\ \ldots\ldots\ e_m = e_1 - mw,$$

je entsprechende Zeitdauer von 100 Flügelumdrehungen zu

$$T_1 = t_1 - t_0,\ T_2 = t_2 - t_1,\ T_3 = t_3 - t_2\ \ldots\ldots\ T_m = t_m - t_{m-1}.$$

Wie sich hieraus die entsprechenden Wassergeschwindigkeiten

$$v_1,\ v_2,\ v_3\ \ldots\ldots\ v_m$$

berechnen lassen, soll im folgenden Paragraphen gezeigt werden.

Anmerkung. Erwähnt zu werden verdient noch, daß Amsler, bei Flügeln ohne electrische Zeichengebung, noch die Unsicherheit entfernt hat, welche die scharfe Anspannung der Zugschnur durch die starke Strömung veranlaßt werden kann, wodurch man das Einrücken des Zählapparates (Zahnrad mit endloser Schraube) bewirkt.

Amsler hat dies mehrfach dadurch erreicht, daß er statt der Holzstange, woran man sonst gewöhnlich die Flügelhülsen befestigt, ein Gasrohr ($\frac{3}{4}$ Zoll engl. = 19 Millimeter im Lichten weit) in Anwendung bringt, welches man auf einem besonders angeordneten Fuße schraubt, der dem Flügel beigegeben wird. Die Zugschnur läuft dann innerhalb des Gasrohres, von der Brücke des Ein- und Ausrück-Mechanismus nach oben, wo auf dem Rohre eine Hülse angebracht ist, welche eine geeignete Leitrolle für die Schnur trägt etc. Abbildungen dieser Anordnungen findet man in den unten notirten Quellen[1]).

Von sonstigen verschiedenen Bemühungen zur Verbesserung des Woltmann'schen Flügels verdienen noch folgende (wenigstens) der Erwähnung.

---

[1]) Harlacher im 1. Jahrgange der (böhmischen) „Technischen Blätter", S. 91. Amsler in seiner bereits oben (S. 374) citirten Schrift „Der hydrometrische Flügel, S. 3 ff.

Boileau[1]) schließt eine lange endlose Schraube[2]) womit er die Flügelwelle ausrüstete, in eine möglichst wasserdichte Röhre, um das Zählwerk vor Schmutz, Blättern, Stroh, Fäden und anderen Unreinigkeiten, welche sich im fließenden Wasser leicht vorfinden, gehörig zu schützen.

Die Mutter dieser Schraube wird von einem Läufer (zwei Ringen) gebildet, der nur eine fortschreitende, aber keine drehende Bewegung ausführen kann. Ein Zeiger dieses Läufers markirt an einer Scala, im Innern der sie umschließenden Röhre, die Zahl der Flügelumdrehungen etc.

Lapointe[3]) ordnete den Zählapparat so an, daß dieser ganz außer Wasser zu liegen kommt etc.

§. 128.

Formeln zu Geschwindigkeitsberechnungen des Wassers aus den Umdrehzahlen der Woltmann'schen Flügel.

Bezeichnet man die Entfernung des Stoßmittelpunktes der Flügelebenen von der Drehachse mit r und nimmt an, daß die Geschwindigkeiten v und v_1 des fließenden Wassers, zweier verschiedener Stromstellen, den correspondirenden Peripheriegeschwindigkeiten der Flügel proportional sind[4]), und bezeichnet man die betreffenden Flügelumdrehungen während der Zeiten t und t_1, beziehungsweise mit n und n_1, so kann man setzen:

$$v : v_1 = \frac{2r\pi n}{t} : \frac{2r\pi n_1}{t_1},$$

woraus folgt:

$$v = \left(\frac{v_1 t_1}{n_1}\right) \cdot \frac{n}{t},$$

oder wenn man $\frac{v_1 t_1}{n_1} = \beta$ und $\frac{n}{t}$, d. i. die Umdrehzahl pro Secunde $= u$ setzt:

$$\text{I.} \quad v = \beta u.$$

Damit nicht für $u = 0$ auch $v =$ Null wird (weil in sehr langsam fließendem Wasser die Reibungen in den Lagerstellen des Flügels nicht überwunden werden können), fügt man dem Werthe I. noch ein Zahlenglied α bei, erhält also

$$\text{II.} \quad v = \alpha + \beta u.$$

Wie später in der Lehre vom Stoße (oder der Wirkung) der Flüssigkeiten gegen feste Körper gezeigt werden wird, läßt sich II. theoretisch nachweisen[5]).

---

[1]) Traité sur la mesure des eaux courantes, Pag. 272.

[2]) Die Schraube hat 325^{mm} Länge, 5^{mm} Durchmesser und 1^{mm} Steigung.

[3]) Comptes rendus. 1848, Tome XXV, Pag. 2150.

[4]) Die Flügel eine von der Geschwindigkeit des Wassers abhängige Geschwindigkeit annehmen.

[5]) Einen anderen Beweis dieser Formel, ebenfalls ohne auf die Theorie des Wasserstoßes einzugehen, giebt Eytelwein in den Abhandlungen der mathematischen Classe der Academie der Wissenschaften in Berlin, Jahrg. 1816 bis 1817, S. 23.

Auf ähnlichem Wege der Theorie, unter Voraussetzung doppelt gekrümmter und daher wirksamerer Flügelflächen (welche das Instrument empfindlicher machen), gelangt Baumgarten[1]) zu der Formel:

$$\text{III.} \quad v = Au + \sqrt{Bu^2 + C},$$

worin A, B und C durch Versuche zu bestimmende Coefficienten sind. Die Zahl der statt I. bis III. in Vorschlag gebrachten empirischen Formeln ist bereits so groß geworden, daß wir uns auf Angabe einiger derselben in der unten stehenden Note[2]) beschränken müssen.

Die Bestimmung der Coefficienten α und β in Formei II. geschieht entweder dadurch, daß man den Flügel in Stromstellen einbringt, deren Geschwindigkeiten durch anderweite Mittel oder Verfahrungsweisen bereits bekannt geworden sind, daselbst die secundlichen Umlaufszahlen u des Flügels genau beobachtet und hierauf in bekannter Weise, nach der Methode der kleinsten Quadrate rechnet; oder daß man das Instrument in völlig ruhigem Wasser mit gleichförmiger Bewegung geradlinig fortführt[3]).

Hat man beispielsweise, im ersten Falle, n Geschwindigkeitswerthe $v_1, v_2, v_3 \ldots . v_{n-1}, v_n$ durch Versuche ohne Zuziehung desselben Flügels ermittelt und bezeichnet man die correspondirenden secundlichen Umlaufszahlen des Flügels, respective mit $u_1, u_2, u_3 \ldots . u_{n-1}$, so hat man, wenn:

$$\Sigma(v) = v_1 + v_2 + v_3 \ldots . + v_{n-1} + v_n \text{ und}$$
$$\Sigma(u) = u_1 + u_2 + u_3 \ldots . u_{n-1} + u_n$$

gesetzt wird, nach bekannten Formeln[4]):

$$\text{IV.} \quad \alpha = \frac{\Sigma(u^2)\,\Sigma(v) - \Sigma(u)\,\Sigma(uv)}{n\Sigma(u^2) - [\Sigma(u)]^2};$$

$$\text{V.} \quad \beta = \frac{n\Sigma(uv) - \Sigma(v)\,\Sigma(u)}{n\Sigma(u^2) - [\Sigma(u)]^2}.$$

---

[1]) Annales des ponts et chaussées. 1847 (Tome XIV), 3, Pag. 339 und Pag. 352.

[2]) 1. Lahmeyer (Erfahrungsresultate, S. 53) setzte:

$$v = \alpha + \beta u + \frac{\varepsilon}{\delta + u^2}.$$

2. Weisbach (Ing.-Mechanik, 5. Aufl., Bd. 1, S. 1144) schlug vor:

$$v = \alpha + \beta u + \gamma u^2.$$

3. Grebenau (Rheinstrommessungen, S. 62) hielt für angemessen:

$$v = a(u - b) + \sqrt{(u - c)^2 + m}.$$

4. Sasse (Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, 1874, S. 78):

$$v = \alpha + \beta u + \gamma \sqrt{u}.$$

Daß hier sowohl α, β, γ, δ und ε, wie a, b, c und m Erfahrungscoefficienten sind, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

[3]) Obgleich zwei Coefficienten nur zwei für v beobachtete Werthe verlangen würden, so ist es doch viel sicherer, so viel als möglich recht verschiedene Werthe von v in Rechnung zu bringen.

[4]) Navier-Wittstein, Lehrbuch der Differenzial- und Integralrechnung. Bd. 2 (Vierte Auflage), S. 345 (Anhang, die Methode der kleinsten Quadrate umfassend).

Der wahrscheinlichste Werth des mittleren Fehlers $= \varepsilon$ der gegebenen Beobachtungen, ergiebt sich dann zu:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x^2)}{n-2}},$$

wenn $\Sigma\,(x^2)$ die Summe der Quadrate sämmtlicher Beobachtungsfehler und n die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet.

Führt man den Flügel in völlig ruhigem (stillstehendem) Wasser in gleichförmiger Bewegung, geradlinig auf eine gemessene Strecke L, jedoch mit verschiedenen Geschwindigkeiten $v_1, v_2, v_3 \ldots . v_{n-1}, v_n$ fort, so hat man, wenn $T_1, T_2, T_3 \ldots . T_{n-1}, T_n$, die jenen Geschwindigkeiten correspondirenden Zeiten und $U_1, U_2, U_3 \ldots . U_{n-1}, U_n$ die zugehörigen Tourenzahlen sind, wegen

$$v_1 = \frac{L}{T_1},\; v_2 = \frac{L}{T_2},\; v_3 = \frac{L}{T_3} \text{ etc.},$$

und wegen $u = \frac{U}{T}$, zuerst statt II:

$$v = \alpha + \beta\,\frac{U}{T},$$

sodann aber auch, weil $v = \frac{L}{T}$ ist,

$$\frac{L}{T} = \alpha + \beta\,\frac{U}{T}, \text{ oder}$$

$$L = \alpha T + \beta U$$

und daher, ebenfalls nach der Methode der kleinsten Quadrate:[1])

$$\text{VI.}\quad \alpha = \frac{\Sigma\,(U^2)\,\Sigma\,(T.L) - \Sigma\,(T.U)\,\Sigma\,(U.L)}{\Sigma\,(T^2)\,\Sigma\,(U^2) - [\Sigma\,(TU)]^2};$$

$$\text{VII.}\quad \beta = \frac{\Sigma\,(T^2)\,\Sigma\,(U.L) - \Sigma\,(T.U)\,\Sigma\,(T.L)}{\Sigma\,(T^2)\,\Sigma\,(U^2) - [\Sigma\,(TU)]^2}.$$

Will man sich mit der einfachsten Formel I. begnügen und soll diese, unter sonst gleichen Umständen, dieselben Resultate liefern, so kann man in I. erst k statt β, also setzen:

$$\text{VIII.}\quad v = ku,$$

woraus im Vergleiche mit II. folgt:

$$ku = \alpha + \beta u.$$

Dies giebt aber

$$k = \frac{\alpha}{u} + \beta,$$

oder da $u = \frac{U}{T}$ ist, auch

$$k = \frac{\alpha T}{U} + \beta, \text{ so wie,}$$

wegen $T = \frac{L}{v}$:

$$k = \frac{\alpha L}{vU} + \beta.$$

---

[1]) Navier-Wittstein, a. a. O., S. 345, §. 23.

Für einen Amsler'schen Flügel mit electrischer Zeichengebung also, wo $U = 100$ ist:

$$k = \frac{\alpha L}{100 v} + \beta.$$

Es nimmt sonach k ab, wie die Wassergeschwindigkeiten wachsen[1]).

Für Amsler'sche Flügel mit electrischer Zeichengebung, wo also $U = 100$ ist, erhält man aus I, wegen:

$$k = \frac{\alpha T}{100} + \beta,$$

$$v = \left(\frac{\alpha T}{100} + \beta\right)\frac{100}{T}, \text{ d. i.}$$

$$v = \alpha + \frac{100\beta}{T}\ ^{2}).$$

Anmerkung. Hinsichtlich der beiden erwähnten Methoden, nach welchen man die Erfahrungscoefficienten vorstehender Geschwindigkeitsformeln ermitteln kann, d. h. ob man den Flügel in fließendes Wasser einhält, dessen Geschwindigkeiten völlig bekannt sind, oder das Instrument in gleichförmiger Bewegung in völlig ruhigem Wasser fortführt, war man früher weniger einig als gegenwärtig[3]).

Die erste Methode, die insbesondere seiner Zeit Weisbach[4]) empfahl, setzt durchaus voraus, daß man die Geschwindigkeit des betreffenden fließenden Wassers genau kennt, was jedoch höchstens bei den Gerinnen sogenannter hydraulischer Observatorien der Fall ist, wie u. A. Weisbach ein solches zu Gebote stand. Trotzdem hat diese Bestimmungsweise den Mangel, daß die ermittelten Coefficienten in der Regel nicht für breite Bäche, Canäle oder gar Flüsse passen, weil die Wände des (wohl immer nur schmalen) Zuführgerinnes beim Observatorium jedenfalls von Einfluß auf die Bestimmungsweise sind, derartig,

[1]) Wie der Verfasser, so fand auch (bereits vorher) Grebenau bei seinen „Rheinstrommessungen" etc., S. 60, die Veränderlichkeit des Coefficienten k vollständig bestätigt. Unter Andern ergab sich für:

$v =$	$0^m,740$	$0^m,90$	$1^m,5$	$2^m,0$
$k =$	0,5404	0,5335	0,5288	0,5206

Man sehe deshalb auch einen betreffenden Aufsatz des Verfassers in den Mittheilungen des Hannov. Gewerbe-Vereins, Jahrg. 1874, S. 135.

[2]) Für einen Amsler'schen Flügel mit electrischer Zeichengebung fand der Verfasser: $v = 0{,}026 + \frac{24{,}21}{T}$.

[3]) Sollen beide Methoden (streng genommen) gleiche Werthe geben, so würde dies der Voraussetzung entsprechen, daß der Stoß bewegten Wassers gegen ruhende Flächen eben so groß ist, wie (unter sonst gleichen Umständen) der Widerstand, welchen in ruhigem Wasser bewegte Flächen erfahren. Diese Voraussetzung ist immer noch nicht völlig erwiesen.

[4]) Ing.-Mechanik. Bd. 1 (5. Auflage), S. 1145.

daß man bei Flügeln, deren Coefficienten nach dieser Methode ermittelt wurden, mindestens jede (große) Canal- oder Flußbreite in Abtheilungen zerlegen mußte, welche dem Gerinne des Beobachtungsfalles entsprechen, in der Hauptsache also so verfährt, wie bereits S. 301 beim Wassermessen mittelst Ausfluß durch Gefäßmündungen empfohlen wurde. Von diesem Allen macht die zweite Methode frei, weshalb sie auch in neuerer und neuester Zeit von allen rationell gebildeten Practikern ausgeführt und empfohlen wird.

Der Verfasser verweist deshalb namentlich auf betreffende, unten angegebene Arbeiten von Baumgarten[1]), Harlacher[2]), Volger[3]) und Grebenau[4]).

§. 129.

Die Pitot'sche Röhre der Gegenwart.

Mittelst der Pitot'schen Röhre Geschwindigkeitsmessungen vornehmen zu können, ohne zugleich Zeitbeobachtungen machen zu müssen, hat, neben den Vortheilen, mit ihr nahe dem Boden und den Wänden der Canäle und Flüsse operiren zu können, diesem Instrumente stets die Aufmerksamkeit der Betheiligten zugewendet. Dessen ungeachtet stellt man gewöhnlich die Pitot'sche Röhre, hinsichtlich zuverlässiger Brauchbarkeit, immer noch dem Woltmannschen Flügel nach.

Unter den vielfachen Verbesserungen, die man für die Pitot'sche Röhre in Vorschlag gebracht hat[5]), ist keine, die mit so viel Beifall begrüßt wurde, wie die von Darcy, bekanntlich seiner Zeit General-Inspector für Straßen- und Brückenbau in Frankreich[6]).

Wie schon andere vor Darcy, war dieser bemüht, das Instrument so zu construiren, daß die Schwankungen in den beiden Wassersäulen so weit als nur möglich vermieden werden und zweitens, daß er das oft schwierige und lästige Ablesen der Wasserstände in den verhältnißmäßig engen Röhren, durch Anordnung eines geeigneten Saugwerkes völlig umging.

Eine derartige, von Herrn Prof. Amsler in Schaffhausen für

---

[1]) Annales des ponts et chaussées, Tome IV (1847, 3), Pag. 326 und 353.

[2]) Prager Technische Blätter. III. Jahrg. (1871), S. 97.

[3]) Civil-Ing., Jahrg. 1872, S. 78 ff.

[4]) Rheinstrommessungen (1873), S. 62.

[5]) Nach Wissen des Verfassers war es in Deutschland der als Mechaniker berühmte (Münchener) Reichenbach, welcher seiner Zeit bemüht war, die Pitot'sche Röhre zu verbessern, worüber u. A. Weisbach im Polytechn. Centralblatte, Jahrg. 1847, S. 531 berichtet. — Duchemin in seinem Buche „Recherches expérim. sur les lois de la resistance des fluides", (Deutsch von Schnuse. Braunschweig 1844), empfahl (S. 36 der Uebersetzung) eine Pitot'sche Röhre mit Schwimmer. — Boileau in dem Werke „Traité de la mesure des eaux courantes", Paris 1854, verbindet eine eigenthümlich angeordnete Pitot'sche Röhre mit einem kleinen Aichgefäße, wodurch man die Geschwindigkeit fließenden Wassers durch ein Quantum des letzteren mißt, welches über den Wasserspiegel gepreßt wird.

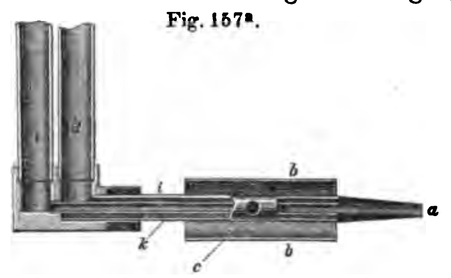
[6]) Fontaines Publiques de la Villes de Dijon. Paris 1856, Pag. 543 und Annales des ponts et chaussées. Tome XV (1858), Pag. 351.

Fig. 157.

die technische Hochschule in Hannover verfertigte Darcy'sche Röhre, mit noch einigen Verbesserungen des genannten Künstlers, zeigen nachstehende Figuren.

Unter Bezugnahme auf Fig. 151 ist hier *di* das sogenannte hydrostatische und *eh* das hydraulische Rohr, *a* die Mündung des letzteren und *c* der seitlich liegende Eingang zu

Fig. 157a.



ersterem. Das im hydrostatischen Rohre von *c* aus eintretende Wasser steigt also in *d* auf und gelangt endlich nach *g*, während das Wasser im hydraulischen Rohre den Weg von *a* aus nach *keh* nimmt. *f* und *k* sind zwei Abschlußhähne.

Ein umhüllender, vorn und hinten offener Cylinder *b* soll verhindern, daß das Wasser direct in die seitliche Oeffnung *c* des äußeren, hydrostatischen Rohres *a* eintritt.

Beide Röhren *d* und *e* münden in weite, von einer gemeinsamen Hülse theilweise umschlossene Glasröhren *g* und *h*. Um nun den Höhenunterschied in beiden Röhren bequem und sicher beobachten und sein betreffendes Maaß eben so ablesen zu können, hat Darcy die Anordnung getroffen, daß man über *k* einen geeigneten Gummischlauch stülpen kann und mittelst solchem derartig Luft bis in die Glasröhren *g* und *h* (mittelst des Mundes) zu saugen im Stande ist, daß sich die Wassersäulen in *d* und *e* um genau gleiche Größen heben, folglich die Höhendifferenz in der hydraulischen und hydrostatischen Röhre sich außerordentlich bequem ablesen läßt. Für letzteren Zweck ist ein besonderer Schieber *i* vorhanden, um das Ablesen der Menisken zu erleichtern.

Was die Berechnung der einer beobachteten Höhendifferenz $= h$ in beiden Röhren, Fig. 157, entsprechenden Geschwindigkeit $= v$ anlangt, welche einer betreffenden Stelle eines fließenden Wassers entspricht, so ist in keinem Falle (wenn $g = 9{,}81$ Meter)

$$v = \sqrt{2gh} = 4{,}43\sqrt{h},$$

sondern

$$\text{I.} \quad v = \psi \sqrt{2gh}$$

zu setzen, wo $\psi < 1$ ist, weil ein Theil der lebendigen Kraft des Stromes durch vorhandene hydraulische Widerstände verloren geht.

Bringt man dagegen die Röhre in der Fig. 157^b dargestellten Art und Weise in Anwendung, d. h. kehrt man einmal, wie bei *ef*,

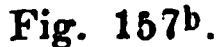
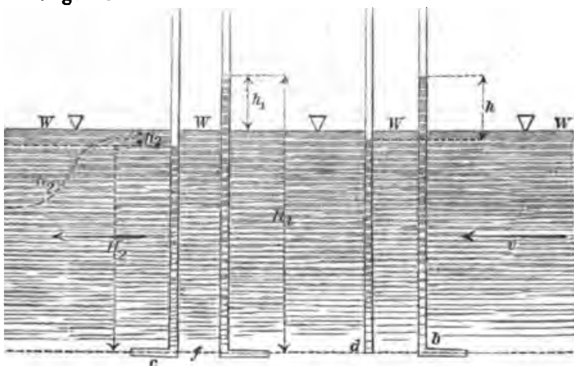


Fig. 157^b.



die zugespitzte (conisch convergente) Mündung dem Strome entgegen und beobachtet dabei in derselben den Wasserstand über dem Spiegel *ww* zu h_1; kehrt ferner die Mündung, wie in *gc* dargestellt ist, in die Richtung des Stromes und beobachtet den durch eine Art von Saugen gebildeten Wasserstand unter dem Spiegel *ww* zu h_2, so läßt sich (mit Darcy)[1]), wenn m_1 und m_2 beziehungsweise entsprechende Erfahrungscoefficienten sind, schreiben:

$$\frac{v^2}{2g} = m_1 h_1 \text{ und } \frac{v^2}{2g} = m_2 h_2 \text{ }^2).$$

Multiplicirt man die erste dieser beiden Gleichungen mit m_2, die zweite mit m_1 und addirt entsprechend, so erhält man:

$$\frac{v^2}{2g}(m_1 + m_2) = m_1 m_2 (h_1 + h_2)$$

und daher:

$$v = \sqrt{2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(h_1 + h_2)},$$

---

[1]) „Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux." Paris 1857, Pag. 224.

[2]) So fand Darcy, a. a. O., Pag. 222:

$$v^2 = 18{,}36 \,.\, h_1 \text{ und } v^2 = 45{,}17\, h_2,$$

so wie, wenn die Eintrittsöffnung rechtwinklig zur Strömung genommen wurde, sich ergab:

$$v^2 = 28{,}91\, h_3,$$

während der theoretische Werth ergiebt:

$$v^2 = 19{,}62 \,.\, h.$$

oder kürzer:

$$\text{II.} \quad v = \varphi \sqrt{2g\,(h_1 + h_2)}\,[1].$$

Benutzt man daher ein Instrument, welches aus zwei Röhren wie *ef* und *cg* besteht, wovon gleichzeitig die eine Mündung dem Strome zugekehrt ist, während die andere Mündung in der Richtung desselben liegt, so braucht man die Höhenlage des Wasserspiegels gar nicht zu berücksichtigen, was zuweilen höchst vortheilhaft ist[2]).

Zusatz. Unter Umständen lassen sich mit Schwimmern, Woltmann'schen Flügeln und Pitot'schen Röhren, auffallend übereinstimmende Geschwindigkeitsmessungen vornehmen.

So berichtet Weisbach[3]) über eine vergleichende hydrometrische

---

[1]) Der Verfasser fand 1879 in der Weser bei Hameln (am Zuflußcanale der Brückmühle), an einer sehr günstigen Stelle, die Geschwindigkeit in 0,30 Meter Tiefe unter dem Wasserspiegel mit Hülfe eines sehr guten Woltmann'schen Flügels), in einer bestimmten Verticale:

$$v = 1{,}65 \text{ Meter},$$

und erhielt an derselben Stelle mittelst der Fig. 157 dargestellten Pitot'schen Röhre (von Amsler), für h, in der Formel I. folgende Werthe:

		meter		meter		meter	
1.	$h =$	0,375	—	0,205	=	0,170	Hiernach ergiebt sich
2.	$h =$	0,376	—	0,194	=	0,182	als Mittelwerth:
3.	$h =$	0,411	—	0,251	=	0,160	$h = 0^m{,}1688$.
4.	$h =$	0,259	—	0,094	=	0,165	
5.	$h =$	6,398	—	0,231	=	0,167	

Daher:

$$\varphi = \frac{v}{\sqrt{2g}\,.\,\sqrt{h}} = \frac{1{,}65}{4{,}43\,.\,0{,}4108} = 0{,}907.$$

folglich:

$$v = 0{,}907\,\sqrt{2gh}.$$

Eben so ergaben andere Versuche, in derselben Perpendiculare und in gleicher Tiefe, zur Bestimmung des Coefficienten φ der Formel II:

	Stromaufwärts.			Stromabwärts.		
	meter	meter	meter	meter	meter	meter
1.	$h_1 = 0{,}395$	— 0,235	= 0,160;	$h_2 = 0{,}317$	— 0,297	= 0,020;
2.	$h_1 = 0{,}387$	— 0,224	= 0,163;	$h_2 = 0{,}310$	— 0,294	= 0,016;
3.	$h_1 = 0{,}384$	— 0,223	= 0,161;	$h_2 = 0{,}300$	— 0,294	= 0,012;
4.	$h_1 = 0{,}382$	— 0,219	= 0,163;	$h_2 = 0{,}305$	— 0,290	= 0,015;
5.	$h_1 = 0{,}380$	— 0,215	= 0,165.	$h_2 = 0{,}288$	— 0,268	= 0,020.
	Mittelwerth: $h_1 = 0{,}1624$,			Mittelwerth: $h_2 = 0{,}0166$,		

$$h_1 + h_2 = 0{,}1790,$$

folglich:

$$\varphi = \frac{v}{\sqrt{2g}\,\sqrt{(h_1 + h_2)}} = \frac{1{,}65}{4{,}43\,.\,0{,}4231} = 0{,}889,$$

daher:

$$v = 0{,}880\,\sqrt{2g\,(h_1 + h_2)}.$$

[2]) Weiteres über diesen Gegenstand im Nachtrage Nr. 2 am Ende dieses Buches.

[3]) Civilingenieur. Bd. XIII (1867), S. 318.

Messung, mittelst eines Woltmann'schen Flügels, einer größeren rectangulären Ausflußmündung und eines größeren über die ganze Wand weggehenden Ueberfalls, welche in einem künstlichen Canale, dem von der Mulde gespeisten sogenannten Wernergraben bei Freiberg, vorgenommen wurde.

Dem Woltmann'schen Flügel entsprach die im Freiberger hydraulischen Observatorium bestimmte Formel (II, §. 128):

$$v = 0{,}02686 + 0{,}0019405 \,.\, u \text{ Meter.}$$

Bezeichnet daher Q die secundliche Wassermenge (in Cubikmetern) und $a = \Sigma(\omega)$ der Flächeninhalt des in Querschnittsfeldern $\omega_1, \omega_2 \ldots . \omega_n$ getheilten Profiles, so war:

$$Q = 0{,}02686\, a + 0{,}0019405 \,.\, au.$$

Die secundliche Wassermenge $= Q_1$, welche die Durchlaßmündung lieferte, wurde mittelst der Formel II, §. 95 (S. 244) und die $= Q_2$ des Ueberfalles mittelst II, §. 112 (S. 300) berechnet.

Man erhielt auf diesen Wegen:

$Q = 0{,}9166$ Cubikmeter unter Benutzung des Woltmann'schen Flügels,
$Q_1 = 0{,}9298$ „ mittelst der Durchlaßmündung,
$Q_2 = 0{,}9229$ „ „ des Ueberfalles.

Beachtet man nun, daß das Mittel aus beiden letzteren Werthen

$$\frac{0{,}9298 + 0{,}9229}{2} = \frac{1{,}8527}{2} \text{ ist,}$$

so ergiebt sich eine Differenz von

$$0{,}9263 - 0{,}9166 = 0{,}0097,$$

höchstens 1 Procent, um welche die Messung mit Zuziehung des Woltmann'schen Flügels von den Messungen mittelst der beiden Ausflußmündungen abweicht.

Noch bei weitem auffallender sind die Uebereinstimmungen, zu welchen Grebenau bei seinen Baseler Rheinstrommessungen gelangte, wo Schwimmer, eine Pitot-Darcy'sche Röhre (von Salleron in Paris) und ein (von Ertel und Sohn in München gelieferter) Woltmann'scher Flügel[1]) gleichzeitig als Tachometer benutzt wurden.

Beachtet zu werden verdient dabei noch, daß die Schwimmer keine Stäbe (nach Cabeo etc.), sondern nur viereckige und cylindrische Holzklötze waren; erstere 1 Cubikfuß Inhalt, letztere 10 Centimeter Durchmesser und 30 Centimeter Höhe hatten und beide Schwimmergattungen mit Steinen beschwert, 30 Centimeter tief eintauchten.

Die unter Zeitbeobachtung von 9 Schwimmern (im Mittel 41,38 Secunden) durchlaufene Länge betrug 90 Meter, also die secundliche Geschwindigkeit $= v_1$:

$$v_1 = \frac{90}{41{,}22} = 2{,}183 \text{ Meter.}$$

Die Pitot'sche Röhre lieferte die Geschwindigkeit v_2 mittelst der Formel I, weil $h = 0{,}34115$ und $\psi = 0{,}84$ war, zu:

$$v_2 = 0{,}84 \sqrt{19{,}62 \,.\, 0{,}34115} = 2{,}1732 \text{ Meter.}$$

[1]) Abgebildet bei Grebenau, a. a. O., Tafel IX.

Der Woltmann'sche Flügel machte in 120 Secunden 494 Umläufe, weshalb nach Formel VIII, §. 128, das correspondirende v_3 war:

$$v_3 = k \frac{494}{120} = 4{,}117 \,.\, k.$$

Da sich nun nach der (Grebenau'schen) Tabelle S. 22, Note 1, $k = 0{,}5263$ ergiebt, so erhielt man:

$$v_3 = 0{,}5263 \,.\, 4{,}117 = 2{,}1668 \text{ Meter.}$$

In überraschender Uebereinstimmung erhielt man sonach die secundliche Rheinstromgeschwindigkeit:

2,1668 Meter mittelst des Woltmann'schen Flügels,
2,1732 „ „ der Pitot-Darcy'schen Röhre und
2,183 „ „ der 9 Schwimmer.

Außer anderen Schlüssen entnimmt Grebenau hieraus den besonderen Beweis für die Richtigkeit des oben (S. 382) ermittelten Satzes, daß der Coefficient k in der Formel $v = ku$ des Woltmann'schen Flügels mit den Geschwindigkeiten veränderlich ist.

So auffallend und interessant eine derartige Uebereinstimmung ist, so wird man doch gut thun, eine solche nicht für alle Fälle vorauszusetzen.

§. 130.

Empirische Geschwindigkeitsformeln, ohne Rücksicht auf relative Gefälle und Profile der Canäle und Flüsse.

Seit Dubuat bis jetzt hat man sich fortwährend bemüht, aus Versuchen, mittelst der im Vorstehenden beschriebenen und erörterten Tachometer, Formeln zu entwerfen, woraus sich die Geschwindigkeiten in einer bestimmten Perpendiculare und nicht minder die mittlere Geschwindigkeit eines ganzen Profiles berechnen läßt.

Zu den beachtenswerthesten dieser Formeln gehören folgende:

Bezeichnet v die mittlere Geschwindigkeit eines ganzen Profiles und V die größte Geschwindigkeit im Stromstriche (nahe der Oberfläche) desselben und ist ferner w die Geschwindigkeit am Boden, so sollte nach Dubuat[1]), zufolge eigener Versuche an künstlichen Canälen sein:

$$v = \frac{V + w}{2}\,{}^{2}).$$

$$v = 0{,}25 + (\sqrt{V} - 0{,}5)^2;$$

$$w = (\sqrt{V} - 1)^2.$$

Auf Grund Dubuat'scher Versuche stellte später Prony[3]) für

---

[1]) Principes d'hydraulique. Tome I, Pag. 90, §. 66.

[2]) Zulässige Werthe von w, mit Bezug auf die Beschaffenheit des Bodens, sind aus Tabellen am Ende dieses Paragraphen zu entnehmen.

[3]) Recherches physico-mathématiques sur les eaux courantes. Paris 1804. Deutsch von Langsdorf, 1812, unter dem Titel „Theoretisch-practische Abhandlung über die Leitung des Wassers" etc., Nr. 194, S. 98, so wie in Prony's „Recueil de cinq tables". Paris 1825, Pag. 59.

Metermaaß die Formel auf:

$$v = \frac{V(0,372 + V)}{3,153 + V},$$

so wie er als Näherungsausdrücke, wenn die größte Geschwindigkeit innerhalb der Grenzen 0,20 bis 1,50 Meter liegt, in Vorschlag brachte:

$$v = 0,816\,V \text{ bis auf } \tfrac{1}{25} \text{ genau, oder}$$
$$v = 0,80\,V \quad " \quad " \; \tfrac{1}{19} \text{ genau.}$$

Eytelwein[1]) setzte, gestützt auf Messungen von Ximenes und Brünings, aus den bereits S. 346 angegebenen Gründen:

$$c = (1 - 0,004 e_1)C, \text{ für rheinländische Fuße,}$$

wenn C die Oberflächengeschwindigkeit für eine bestimmte Perpendiculare und c die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte dieser Perpendiculare in der Tiefe e_1 unter der freien Wasseroberfläche bezeichnet.

Lahmeyer[2]) empfahl nach eigenen Versuchen in der Weser, für die mittlere Geschwindigkeit c einer Perpendiculare die Formel:

$$c = (0,937 - 0,0252 C)C.$$

Aus den bereits S. 347 und 348 besprochenen Messungen von Humphreys und Abbot im Mississippi[3]), wurde für die Geschwindigkeit c in irgend einer Tiefe e_1 (für englische Fuße) die Formel abgeleitet:

$$c = 3,261 - 0,7922\left(\frac{e_1}{e}\right)^2,$$

worin e die ganze Tiefe der Verticale darstellt.

Hagen[4]), welcher die Angaben der beiden Amerikaner über diesen Punkt in hohem Grade für verdächtig erklärte, entwickelte dafür, mit Zuziehung älterer Messungen von Brünings am Niederrheine, die mittlere Geschwindigkeit $= u$ einer Perpendiculare (von e Tiefe) zu:

$$u = \frac{1 + 0,2676\sqrt{e}}{1 + 0,4014\sqrt{e}} \cdot C,$$

dabei Metermaaß vorausgesetzt, so wie, daß C die correspondirende Oberflächengeschwindigkeit bezeichnet.

Später (1876) brachte Hagen[5]) dafür die einfachere Gleichung (ebenfalls für Metermaaße):

$$u = C\{1 - 0,0582\sqrt{e}\}.$$

---

[1]) Handbuch der Mechanik und Hydraulik. Zweite Auflage, §. 133.

[2]) Förster's Bauzeitung, 1852, S. 158.

[3]) Grebenau's deutsche Bearbeitung der Humphreys' und Abbot'schen Resultate, S. 65.

[4]) Abhandlung der königlichen Academie der Wissenschaften zu Berlin 1871, S. 21. Hieraus in der Zeitschrift des Hannov. Archit. und Ingenieur-Vereins, Bd. XVIII (1872), S. 476.

[5]) Untersuchungen über die gleichförmige Bewegung des Wassers. Berlin 1876, S. 101. Vorausgesetzt ist bei dieser Formel eine so große Breite des Flusses oder eine so kräftige Strömung, daß der Einfluß des Zusammenhanges der Oberfläche auf die Geschwindigkeit in derselben aufgehoben ist.

Während sämmtliche vorstehende Formeln weder auf die Rauhigkeit (Beschaffenheit) des Strombettes, noch auf die Dimensionen des betreffenden Canales oder Flusses Rücksicht nehmen, haben dies Darcy-Bazin nach den von ihnen besonders am Canale von Bourgogne angestellten Versuchen für nothwendig erachtet und diesem entsprechend für das Verhältniß:

$$\frac{v}{V} = \frac{\text{Mittlere Profilgeschwindigkeit}}{\text{Maximalgeschwindigkeit an der Oberfläche}}$$

die Gleichung aufgestellt[1]):

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{r}}},$$

worin r den sogenannten mittleren Radius (S. 351) oder, für sehr flache Canäle, die mittlere Wassertiefe bezeichnet, so wie α und β die sogenannten Rauhigkeitscoefficienten sind. Die hierfür von Darcy-Bazin ermittelten Werthe sind folgende:

1) Für sehr gut verbundene Wände aus glattem Cement ohne Sand, oder aus gehobeltem Holze mit Sorgfalt gefugt:

$$\alpha = 0{,}00015;\ \beta = 0{,}0000045.$$

2) Für Wände aus Cement mit Sand, aus behauenen Steinen (Quadern), aus Ziegeln oder aus nicht gehobelten Brettern:

$$\alpha = 0{,}00019;\ \beta = 0{,}0000133.$$

3) Für wenig verbundene Wände, Mauerwerk aus Bruchsteinen:

$$\alpha = 0{,}00024;\ \beta = 0{,}000060.$$

4) Für Wände aus Erde:

$$\alpha = 0{,}00028;\ \beta = 0{,}000350.$$

Welchen Einfluß hiernach die verschiedene Beschaffenheit der Canalwände auf das Verhältniß $\frac{v}{V}$ hat, erhellt aus folgenden Zahlenwerthen, welche der Verfasser einer größeren, von Bazin berechneten Tabelle[2]) entlehnte. Die Ziffern (1) bis mit (4) beziehen sich auf die vorher in gleicher Ordnung angegebenen vier Canalwandarten.

---

[1]) Darcy-Bazin, „Recherches Hydrauliques“. Paris 1875, Pag. 18, 21, 145, 157 etc. Eine Ableitung dieser Gleichung folgt später.

[2]) a. a. O., Pag. 328.

Werthe von r	Werthe von $\frac{v}{V}$				Werthe von r	Werthe von $\frac{v}{V}$			
	(1)	(2)	(3)	(4)		(1)	(2)	(3)	(4)
0,01	0,745				0,80	0,851	0,832	0,801	0,727
0,02	0,787	0,710			0,90	0,852	0,833	0,803	0,734
0,04	0,815	0,758			1,00	0,852	0,834	0,805	0,740
0,06	0,826	0,779	0,670		1,10	0,852	0,834	0,806	0,745
0,08	0,833	0,791	0,694		1,20	0,852	0,834	0,807	0,749
0,10	0,836	0,799	0,711	0,537	1,40	0,852	0,835	0,809	0,756
0,13	0,840	0,807	0,729	0,567	1,60	0,852	0,835	0,811	0,762
0,16	0,843	0,812	0,742	0,590	1,80	0,853	0,836	0,812	0,766
0,19	0,844	0,816	0,752	0,608	2,00	0,853	0,836	0,813	0,770
0,22	0,845	0,819	0,759	0,623	2,40	0,853	0,836	0,814	0,776
0,26	0,847	0,822	0,767	0,639	2,80	0,853	0,837	0,815	0,780
0,30	0,848	0,824	0,773	0,653	3,20	0,853	0,837	0,816	0,784
0,35	0,848	0,825	0,779	0,666	3,60	0,853	0,837	0,817	0,786
0,40	0,849	0,827	0,783	0,678	4,00	0,853	0,837	0,817	0,788
0,45	0,850	0,828	0,787	0,687	4,50	0,853	0,837	0,818	0,791
0,50	0,850	0,829	0,790	0,695	5,00	0,853	0,837	0,818	0,792
0,60	0,851	0,831	0,795	0,709	5,50	0,853	0,837	0,818	0,794
0,70	0,851	0,832	0,798	0,719	6,00	0,853	0,837	0,819	0,795

Für regelmäßige, künstliche Canäle (Gerinne für Wasserräder, Ent- und Bewässerungsgräben etc.) wird man sich am besten dieser letzteren Resultate bedienen, da solche aus Ergebnissen directer, sorgfältiger Messungen an derartigen Canälen entnommen sind. Für Flüsse, Gräben etc. mit natürlichen Betten, wird man sich (annäherungsweise) einer der vorhergehenden Formeln bedienen und zwar derjenigen, welche unter ähnlichen Verhältnissen unternommenen Versuchen entlehnt sind, oder man wird selbst geeignete Versuche anstellen müssen.

Letzteres Urtheil ist übrigens dasselbe, welches Hagen in seiner 1876 erschienenen Schrift „Untersuchungen über die gleichförmige Bewegung des Wassers", S. 86 ausspricht, woselbst §. 16, nach Prüfung von vier größeren Beobachtungsreihen (von Dubuat, Brünings, Darcy-Bazin und Humphreys-Abbot) Folgendes gesagt wird:

„Die vorstehenden Untersuchungen ergeben, daß das Wasser bei gleichförmiger Bewegung in kleinen Canälen und Gräben einem andern Gesetze folgt, als in Flüssen und Strömen".

Zusatz. Für practische Zwecke sind ferner nachstehende Notizen und Werthe nicht ohne Nutzen, welche sich darauf beziehen, in wiefern durch fließendes Wasser am Boden seines Bettes liegendes Material mit fortgenommen, oder unter Umständen die Cohäsion der Bodenmasse selbst überwunden werden kann.

Dubuat[1]) legte für ersteren Zweck betreffendes Material auf den

[1]) „Principes" etc. Tome second, Pag. 94, §. 399.

Boden eines hölzernen künstlichen Canals und gab letzterem immer größer werdende Neigungen, bis das Material vom fließenden Wasser mit fortgenommen wurde [1]). Das Ergebniß der Versuche war Nachstehendes: [2])

Material.	Geschwindigkeiten, wobei das Material aufhörte, mit fortgerissen zu werden.	
Brauner Töpferthon	3 Pariser Zoll	0,081 Meter
Sandkörner der Seine wie Anis groß	4 „ „	0,108 „
desgl. wie Erbsen groß	7 „ „	0,189 „
desgl. wie Bohnen groß	12 „ „	0,325 „
Meergeschiebe, abgerundet von 1 Zoll Durchmesser	24 „ „	
Feuersteine, kantig, von der Größe der Hühnereier	36 „ „	0,975 „

Zur Beurtheilung, bei welchen Geschwindigkeiten Böden und Wände der Fluß- und Canalbetten angegriffen werden können, mag nachstehende Tabelle dienen, welche der von Telford und Nimmo redigirten Edinburger Encyklopädie, Artikel „Bridge", entlehnt ist.

Geschwindigkeit pro Secunde		Material, welches diesen Geschwindigkeiten widersteht, den größeren aber nachgiebt
Fuß engl.	Meter	
0,25	0,076	Schlamm, aufgelöste Erde.
0,50	0,152	Fetter Thon.
1,0	0,305	Sand.
2,0	0,609	Grand.
3,0	0,914	Abgerundete Kieselsteine.
4,0	1,220	Eckige Kieselsteine.
5,0	1,520	Conglomerate, Schiefer.
6,0	1,830	Geschichtete Felsen.
10,0	3,05	Ungeschichtete, harte Felsen.

§. 131.

Bewegende Kraft fließender Wasser.

Aus den Gesetzen der Hydrostatik läßt sich ohne Weiteres der Schluß ziehen, daß Wasser, welches sich in Fluß- oder Canal-

[1]) Weiteres über diesen Gegenstand findet sich in folgenden Werken: Schubert, „Theorie der Construction steinerner Bogenbrücken". Erster Theil, S. 366. — Hagen, „Handbuch der Wasserbaukunst". Zweiter Theil, Erster Band (Dritte Auflage), S. 158 und 358.

[2]) Hagen bemerkt a. a. O., S. 161, daß er die Angaben Dubuat's durch eigene Versuche vollständig bestätigt gefunden habe.

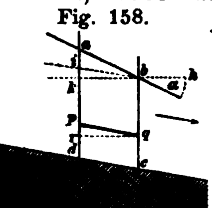
betten fortbewegt und dabei allein der Schwerkraftwirkung unterworfen ist, keine horizontale Oberfläche bilden kann. Diese Thatsache und weitere Erfahrungen waren Veranlassung, daß Dubuat[1]) an die Spitze aller Bewegungsbetrachtungen in Betten fließender Wasser den Satz stellte:

„die bewegende Kraft in Fluß- oder Canalbetten strömenden Wassers rührt nur von der Neigung seiner Oberfläche her".

Nachstehendes wird zur weiteren Aufklärung dieses Satzes dienen.

Bei der fraglichen Bewegung giebt sich die Wirkung der Schwerkraft in zweifacher Weise zu erkennen, erstens indem sie jedes Flüssigkeitselement über das darunter liegende, wie auf einer schiefen Ebene herablaufend accelerirt, zweitens aber auch eine Druckdifferenz an den Enden der betreffenden Wasserelemente erzeugt. Zur betreffenden Erläuterung werde zunächst Fig. 158 benutzt, wobei *abcd* eine Wasserschicht zwischen zwei derartig

Fig. 158.



nahe liegenden verticalen Ebenen *ad* und *bc* darstellen soll, daß sich darin Gefälle und mittlere Geschwindigkeit nicht verändern, *ab* der Oberwasserspiegel, α dessen Neigungswinkel gegen den Horizont, endlich *pq* ein beliebiges Wassermolecül ist, dessen Länge = 1 gesetzt werden mag.

Denkt man sich *pq* parallel zum Boden *dc* (dessen Neigung von α verschieden), so ist die Acceleration dieses Molecüls, wenn *rq* ∥ zum Horizonte *kh* gezogen wird, durch $g \, . \, \overline{pr}$ darzustellen[2]), die bewegende Kraft also durch $mg \, . \, \overline{pr}$, wenn *m* die Masse von *pq* bezeichnet. Außerdem wirkt aber auf den Punkt *p* noch ein resultirender Druck, dessen Größe durch $mg \, (\overline{ap} - \overline{bq}) = mg \, \overline{ia}$ auszudrücken ist, so daß also die Gesammtkraft, welche *pq* zur Bewegung antreibt, ist:

$$mg \, (\overline{pr} + \overline{ia}), \text{ oder}$$

weil $\overline{pr} = \overline{ik}$ auch $mg \, . \, (\overline{ik} + \overline{ia}) = mg \, . \, \overline{ak}$, wofür der Kleinheit der ganzen Schicht *ac* wegen gesetzt werden kann:

$$mg \, . \sin \alpha.$$

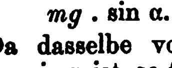


Fig. 159.

Da dasselbe von allen Molecülen wie *pq* nachzuweisen ist, so folgt für die ganze Schicht $\overline{ac}$, wenn deren Masse mit *m'* bezeichnet wird:

$$m'g \sin \alpha,$$

was genau dem Dubuat'schen Satze entspricht.

Hat der Boden *dc* die Neigung, wie Fig. 159, so ist die fragliche Erklärung nur noch auf das am Boden liegende Wasser-Molecül *dc* auszu-

[1]) „Principes". Nr. 15.

[2]) $g = 9^m,81$ = Acceleration (Beschleunigung) der Schwerkraft.

Fig. 160.

dehnen. Für die bewegende Kraft dieses Elementes ist aber zu setzen, wenn $nc \parallel kh$ ist:



$$-m \, . \, g \, (\overline{nd})$$

und für den resultirenden Druck in d:

$$mg \, (\overline{ad} - \overline{bc}) = mg \, (\overline{nd} + \overline{ak}).$$

Die gesammte bewegende Kraft ist daher:

$$mg \, (-\overline{nd} + \overline{nd} + \overline{ak}) = mg \, . \, \overline{ak} = mg \, . \sin \alpha.$$

wie vorher.

Ist der Boden, wie in Fig. 160, horizontal, so wird in Bezug auf das Wassermolecül $\overline{dc}$ die relative Schwerkraft zu Null, für den resultirenden Druck in d ergiebt sich aber:

$$mg \, (\overline{ad} - \overline{bc}) = mg \, . \, \overline{ak} = mg \, . \sin \alpha.$$

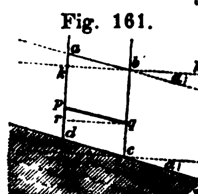


Fig. 161.

Ist endlich die Oberfläche dem Boden parallel, wie in Fig. 161, so wird ai der vorigen Figuren zu Null, d. h. es wirkt allein die relative Schwerkraft, die Bewegung von pq wird durch die Kraft $mg \, . \, \overline{pr} = mg \, . \, \overline{ak}$ veranlaßt, und daher die der ganzen Schicht ac wiederum durch:

$$mg \sin \alpha.$$

Zweites Capitel.

Allgemeine Gleichungen für die Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.

§. 132.

Nach Erörterung der Fundamente, auf welchen die gesammte Hydrodynamik beruht (insbesondere S. 191 und 192 der dritten Abtheilung dieses Buches) und nach der einfach damit übereinstimmenden Thatsache, daß, nach S. 349 ff., auch für die Begründung einer rationellen Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen, nicht einmal das Gesetz der Geschwindigkeitsänderung in einem und demselben Canal- oder Flußprofile hinlänglich bekannt ist, bleibt für den practisch ausführenden Ingenieur nur übrig, den Standpunkt kennen zu lernen, von welchem aus er, unterstützt durch geeignete Versuche, zu Formeln gelangen kann, die ihm mindestens einige Anhaltspunkte für die Lösung der wichtigsten ihm vorgelegten Aufgaben zu liefern im Stande sind.

Zu gedachtem Zwecke müssen wir vorerst wieder voraussetzen, daß der Satz vom Parallelismus der Schichten (§. 75, S. 189, §. 80, S. 215 ff.) in Anwendung gebracht werden kann, sich also die mittleren Geschwindigkeiten in verschiedenen Canal- oder Flußprofilen umgekehrt wie die correspondirenden Querschnitte verhalten,

daß ferner die betreffenden Bahnen der Wasserelemente nur schwach gekrümmt sind und sich endlich die relativen Gefälle (Röschen) nur in sanften Uebergängen (ohne Sprünge) ändern.

Sodann ist aus Versuchen ein mathematischer Ausdruck für den Widerstand zu bilden, welchen unter den gedachten Umständen das in Canälen oder Flüssen strömende Wasser fortwährend erfährt.

Hierzu wählen wir folgenden zuerst von Prony aufgestellten Werth:

$$(1) \quad \frac{\gamma}{g} p\,(\alpha v + \beta v^2)\, d\lambda,$$

worin $d\lambda$ ein Längenelement des betreffenden Canales ist, γ, g, p und v aber Größen sind, die bereits §. 122 in gleicher Weise bezeichnet wurden.

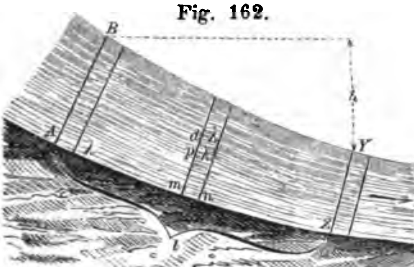


Fig. 162.

Mit Bezug auf Fig. 162 mögen ferner AB und YZ zwei normale Querschnitte des strömenden Wasserkörpers beziehungsweise vom Inhalte a_0 und a_n sein, mit den correspondirenden mittleren Geschwindigkeiten v_0, v_n und den betreffenden Wasserperimetern p_0 und p_n. Ferner befinde sich an einer Stelle mn, zwischen den gedachten Profilen, ein von diesen ebenfalls verschiedenes Profil vom Inhalte a, der mittleren Geschwindigkeit v und dem Wasserperimeter p.

Bezeichnet sodann dM die Wassermasse, welche in der unendlich kleinen Zeit dt durch die betreffenden Verticalschichten AB, mn und YZ fließt, so erhält man vorerst:

$$(2) \quad dM = \frac{\gamma a_0 v_0 dt}{g} = \frac{\gamma a v dt}{g} = \frac{\gamma a_n v_n dt}{g}.$$

Mit Bezug auf den im §. 131 bewiesenen Satz von der bewegenden Kraft fließender Wasser, wenn z die Gefällhöhe des Oberwasserspiegels zwischen den Querschnitten mn und AB ist, liefert aber sodann das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

$$\tfrac{1}{2}\, dM\,(v^2 - v^2_0) = gdMz - \int_0^\lambda \left[\frac{\gamma}{g} p\,(\alpha v + \beta v^2)\, d\lambda\right] vdt,$$

oder da, nach (2):

$$\frac{dM}{a} = \frac{\gamma}{g} vdt \text{ ist:}$$

$$\tfrac{1}{2}\, dM\,(v^2 - v^2_0) = gdMz = \int_0^\lambda dM \frac{p}{a}\,(\alpha v + \beta v^2)\, d\lambda,$$

oder wenn, wie in (2), dM als constant betrachtet und durch g dividirt wird:

$$\frac{v^2 - v^2_0}{2g} = z - \int_0^\lambda \frac{p}{a} \left(\frac{\alpha}{g} v + \frac{\beta}{g} v^2 \right) d\lambda,$$

oder endlich $\frac{\alpha}{g} = A$ und $\frac{\beta}{g} = B$ gesetzt:

$$\frac{v^2 - v^2_0}{2g} = z - \int_0^\lambda \frac{p}{a} (Av + Bv^2)\, d\lambda.$$

So wie endlich, wenn h das Oberflächengefälle zwischen den Profilen YZ und AB bezeichnet:

$$\text{I.} \quad \frac{v_n^2 - v^2_0}{2g} = h - \int_0^l \frac{p}{a} (Av + Bv^2)\, dl.$$

Diese Gleichungen wurden fast gleichzeitig von Poncelet[1]) und Belanger[2]) aufgestellt.

Unter den vorher erörterten Voraussetzungen nennt man sie die Gleichungen für die ungleichförmig-permanente Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen. Auf diese Gleichungen kommen wir später mehrfach zurück.

Für den Fall einer völlig gleichförmigen Bewegung, wird aus I, wegen $v_n = v_0 = v$:

$$\text{II.} \quad h = \frac{p}{a} (Av + Bv^2)\, l.$$

Da $\frac{h}{l}$ als Ausdruck für die bewegende Kraft des fließenden Wassers und $\frac{p}{a} (Av + Bv^2)$ als der Widerstand angesehen werden kann, welcher dieser Kraft entgegentritt, so bestätigt II. den von Dubuat[3]) aufgestellten Satz:

„daß, wenn sich Wasser gleichförmig in offenen Canälen fortbewegt, der Widerstand, welchen dasselbe erfährt, gleich der bewegenden Kraft des Wassers ist“.[4])

---

[1]) Poncelet veröffentlichte diesen Ausdruck zuerst in den lithographirten Heften, welche seinen Vorträgen in Metz über „Mécanique appliquée aux machines“ (während der Jahre 1821—1830) zu Grunde lagen.

[2]) Belanger, „Essai sur la solution numériques de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes.“ Paris 1828.

[3]) In §. 20 der „Principes d'hydrauliques“ lautet dieser Satz wörtlich also: „quand l'eau se meut uniformément, la resistance qu'elle éprouve est égale à sa force accélératrice“.

[4]) Den ersten Versuch zur Aufstellung eines Gesetzes über die Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen, scheint (früher als Dubuat) Albert Brahms in seinem Buche „Anfangsgründe der Deich- und Wasserbaukunst“ gemacht zu haben. Nach Hagen soll dies Buch zwischen 1753 und 1756 erschienen sein. Dem Verfasser ist nur die zweite Auflage bekannt, die 1767

Da für den Fall einer gleichförmigen Bewegung nach (2) auch $a_0 = a = a_n$ ist, so folgt, daß für künstliche Canäle, wo man für bestimmte Längen auch gleiche Breiten und somit gleiche Wassertiefen voraussetzen kann, auch die Oberfläche des Wassers dem Canalboden parallel sein wird, so daß die Fig. 141 (neue Auflage) und Fig. 150 (alte Auflage) eine gleichförmige Bewegung des Wassers voraussetzen.

§. 133.

Geschichtliche Notizen.

Die erste für Practiker brauchbare Formel [1]) für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen scheint 1775 der französische Ingenieur Chezy und zwar unter der Gestalt: $a \frac{h}{l} - \frac{pv^2}{k^2} = 0$ aufgestellt zu haben [2]), wobei k einen aus Versuchen zu bestimmenden Coefficienten bezeichnet, die übrigen Größen aber die bisherige Bedeutung haben. Die wenigen hierzu von Chezy unternommenen Versuche (am Abwässerungsgraben von Courpalet und in der Seine) und die Umstände, unter welchen sie angestellt sein mochten, lieferten nicht denjenigen

---

in Aurich (Ostfriesland) gedruckt wurde. Die fragliche Begründung wird hier in §. 115 erörtert und lautet folgendermaßen:

„Wenn eine vollkommen runde Kugel auf einer platten und ebenen Planum inclinatum herunter rollet, so nimmt deren Geschwindigkeit in einem jeden gleichen Zeitpunkt einen gleichen Grad über der bereits gehabten Geschwindigkeit zu: folglich sind diese Geschwindigkeiten allemal gleich denen Radices Quadratae der gefallenen perpendiculären Höhen. Mit dem Abfluß des Gewässers würde es die nämliche Beschaffenheit haben, daferne das Bette des Flusses ein solches ebenes Planum inclinatum wäre, und das Wasser, wegen seiner anhängenden Klebrigkeit, keine Friktion und Aufenthalt litte; dannen hero geschiehets, daß ein abfließendes Gewässer in der Schnelligkeit nicht immer zunimmt, sondern durch die Friktion dermaßen auf- und zurückgehalten wird, daß, sobald es zu einem gewissen Grad der Schnelligkeit gelanget, es in dieser Geschwindigkeit unveränderlich verbleibet, so lange, als das Profil oder Durchschnitt des Flusses einerlei bleibt, und weder weiter noch enger, flächer oder tiefer wird".

[1]) Hagen, in §. 12 seiner 1876 erschienenen Schrift: „Untersuchungen über die gleichförmige Bewegung des Wassers", leitet aus dem S. 397 angegebenen Brahms'schen Satze, mit Hülfe zweier von diesem (wohl ältesten deutschen Hydrotekten von Bedeutung) angestellten Versuchen (für rheinländisches Maaß) die Gleichung ab:

$$v = 97{,}6 \sqrt{\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l}}.$$

Im „Anderen Theile" des Brahm'schen Buches, wovon dem Verfasser die 1757 in Aurich gedruckte 2. Auflage zur Hand ist, wird über die genannten Brahms'schen Versuche in §. 208 berichtet, eine desfalls aufgestellte Formel findet sich aber nirgends!

[2]) Mémoire de l'académie des sciences 1813—1815. Vorrede zu einer Abhandlung Girard's über die Bewegung des Wassers in Capillarröhren, so wie auch in Girard's Werke: Rapport etc. sur le canal de l'Ourcq. Paris 1803, Pag. 33, und endlich in dessen Mémoires sur le canal de l'Ourcq. Paris 1831, Tome I, Pag. 327.

Werth, um der Formel das Vertrauen der Practiker abzugewinnen. Aus diesen und anderen Gründen stellte der französische Ingenieur Oberst Dubuat eine große Anzahl sorgfältiger Versuche an, nämlich 23 an künstlichen, trapezoidalen und rectangulären Canälen[1]), ferner 6 am Canal du Jard[2]) und 4 am Haine-Flusse[3]), denen er die Formel anpaßte:

$$v = \frac{297\left(\sqrt{\frac{a}{p}} - 0{,}1\right)}{\sqrt{\frac{l}{h}} - \text{lgnt}\sqrt{\left(\frac{l}{h} + 1{,}6\right)}} - 0{,}3\left(\sqrt{\frac{a}{p}} - 0{,}1\right),$$

worin alle Größen in französischen Zollen ausgedrückt sind und die er in seinen berühmten „Principes" etc. 1779 zum ersten Male bekannt machte[4]).

Obwohl die Uebereinstimmung der Versuche mit den aus diesen Formeln berechneten Werthen gut genannt werden konnte, so war doch die complicirte Gestalt des Ausdrucks, so wie der Mangel auch jeder wissenschaftlichen Begründung Ursache, daß man sich bemühte, andere Formeln aufzustellen, welche diesen Anforderungen besser entsprächen.

Versuche von Coulomb[5]) zur Ermittelung der Cohäsion und überhaupt der Widerstände, welche Flüssigkeiten zeigen, wenn man in ihnen feste Körper langsam bewegt, führten auf den Satz, daß ein mathematischer Ausdruck zur Darstellung dieser Erscheinung vor Allem aus zwei Gliedern bestehen müsse, wovon das eine die erste Potenz, das andere die zweite der betreffenden Geschwindigkeit in sich fasse. Girard[6]) hatte zuerst den glücklichen Gedanken, die von Coulomb aufgefundenen Gesetze auch auf alle Fälle anzuwenden, wobei sich die Flüssigkeit bewegt, der mit ihr in Berührung befindliche feste Körper aber ruht, d. h. der Analogie nach, auch auf die Bewegung des Wassers in Canälen. Die von Girard hiernach aufgestellte Gleichung hatte die Form:

$$\frac{ah}{l} - k_1(v + v^2) = 0,$$

worin k_1 einen gemeinsamen constanten Erfahrungscoefficienten bezeichnet, den Girard aus 8 Versuchen Chezy's und Dubuat's ermittelte. Zu bemerken ist überdies hierbei, daß Girard später seine Formel analytisch abzuleiten bemüht war und dabei von der Aehnlichkeit ausging, welche stattfindet zwischen dem in irgend einer Leitung fließenden Wasser und einer völlig biegsamen Kette, die in derselben Leitung herabsinkt, auch sich bei den betreffenden Entwickelungen auf L. Euler'sche Arbeiten über die Bewegung der Flüssigkeiten stützte[7]).

Gegen die von Girard gewählte Form eines gemeinsamen Coefficienten für beide Glieder der Parenthese, erhob zuerst Prony ganz

---

[1]) Principes Nr. 377. (Ausgabe von 1816.)
[2]) Ebendaselbst, Pag. 404.
[3]) Ebendaselbst.
[4]) Desgleichen. Tome Premier, Pag. 68.
[5]) Mémoire de l'Institut national. Prairal an IX (1800), Pag. 246.
[6]) Rapport etc. sur le canal de l'Ourcq. Paris, an XII (1803), Pag. 36 und 42.
[7]) Mémoire sur le canal de l'Ourcq. Tome I, Pag. 246 und Pag. 276.

richtige Bedenken[1]), indem jedes der Glieder einen anderen, verschiedenen Gesetzen folgenden Widerstand repräsentire, und daß man sich überdies, bei der Natur des ganzen Gegenstandes, alle Mittel vorbehalten müsse, um den absoluten Werth des fraglichen Widerstandes der wirklichen Erscheinung möglichst entsprechend anzupassen. Hierauf gestützt, setzte Prony:

$$\frac{h}{l} \cdot \frac{a}{p} = Av + Bv^2,$$

eine Gleichung, welche bereits aus vorigem Paragraphen bekannt ist.

Die Werthe von A und B ermittelte Prony aus 31 Dubuat'schen Versuchen, nach einer Methode von Laplace, für Metermaaß zu:

$$A = 0{,}00004445 \text{ und } B = 0{,}00030931.$$

Diesem gemäß erhält man aus vorstehender Gleichung (die nachher berühmt gewordene Prony'sche Formel), für Metermaaß:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}00004445\,v + 0{,}00030931\,v^2, \text{ oder}$$

$\frac{a}{p} = r$ (nach S. 351) und $\frac{h}{l} = s$ gesetzt:

$$r \,.\, s = 0{,}00004445\,v + 0{,}00030931\,v^2.$$

Nach Prony hielt man es zuerst für eine ganz besondere Aufgabe, den bereits gewonnenen mathematischen Ausdruck dadurch zu einem noch treueren Darsteller der betreffenden Naturerscheinung zu machen, daß man eine immer größere Zahl von Beobachtungen zur Bestimmung der Coefficienten A und B benutzte, merkwürdiger Weise aber dabei ganz davon absah, ob sie allen zu machenden Anforderungen, allermeist denen einer gleichförmigen Bewegung entsprachen oder nicht. So nahm zuerst Eytelwein[2]) sämmtliche 36 Dubuat'sche, an künstlichen Canälen angestellte Versuchsresultate (wie solche Bd. 1 der „Principes", Pag. 76, aufgeführt sind)[3]) und bestimmte daraus den Coefficienten k der Chezy'schen Formel, nach einer ähnlichen Methode wie Prony, wonach er für preußische Fuße seine in der deutschen Wasserbaupraxis berühmt gewordene Formel erhielt:

$$v = 90{,}9\sqrt{\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l}} = 90{,}9\sqrt{r\,.\,s}.$$

Für Metermaaße ergab sich:

$$v = 50{,}9\sqrt{\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l}} = 50{,}9\sqrt{r\,.\,s}.$$

---

[1]) „Recherches physico-mathématique sur la théorie du mouvement des eaux courantes." Paris 1804. Deutsch von Langsdorf unter dem Titel: „Theoretisch-practische Abhandlung über die Leitung des Wassers in Canälen und Röhrenleitungen". Gießen 1812. Später (1825) lieferte Prony noch: „Recueil de cinq tables, pour faciliter et abreger les calculs des formules relatives aux mouvements des eaux" etc.

[2]) Handbuch der Mechanik fester Körper. Zweite Auflage, S. 160.

[3]) Prony hatte von diesen Versuchen Nr. 97, 100 und 105 als wenig sicher, Nr. 116 und 117, wegen der Wasserpflanzen im Jardcanale, und Nr. 125 im Haineflusse deshalb weggelassen, weil bei diesem Versuche ein starker Wind geweht hatte.

Später, in einer Abhandlung der Königlichen Academie der Wissenschaften in Berlin, aus den Jahren 1814—1815, S. 167 der mathematischen Classe, behandelt Eytelwein den ganzen Gegenstand noch ausführlicher, kommt aber dabei auf den Prony'schen Ausdruck I, §. 132, zurück und ermittelt die Coefficienten A und B aus überhaupt 91 Versuchen (36 von Dubuat, 16 von Brünings, 4 von Woltmann und 35 von Funk), ohne freilich die Frage der Brauchbarkeit des einen oder anderen dieser Versuche, für die gleichförmige Bewegung des Wassers, streng zu erwägen. Die Prony'sche Gleichung wurde hiernach, für Metermaaß, zu:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = r \cdot s = 0{,}0000243 \cdot v + 0{,}000366 \cdot v^2.$$

Hagen war es, der zuerst, (1837) in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung[1]), die Coefficienten A und B der Prony'schen Formel, aus besonders ausgewählten Versuchen, nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmte und zugleich die einfache Chezy-Eytelwein'sche Form dadurch brauchbar zu machen sich bemühte, daß er

$$\frac{v^2}{k} = Av + Bv^2$$

setzte, daher:

$$k = \frac{1}{\sqrt{\frac{A}{v} + B}}$$

erhielt, oder nachwies, daß mindestens k mit der Geschwindigkeit veränderlich genommen werden müsse, wenn beide Formeln gleiche Werthe liefern sollten[2]).

Bedeutendes Aufsehen machten seiner Zeit, von 1845 ab, die Resultate[3]) und betreffenden Formeln, welche der Hannoversche Wasserbauinspector J. W. Lahmeyer[4]), aus vielen Hunderten eigener (meist in der Weser angestellten) Messungen, in Verbindung mit den Versuchsresultaten anderer zuverlässiger Hydrotekten, zu gewinnen bestrebt war, die nach mancherlei Controversen mit Bornemann in Freiberg[5]) und Wex[6]) in Wien schließlich dazu führten, daß Lahmeyer aus 616 Versuchen[7]) für Metermaaß folgende Formel aufstellte:

---

1) Erste Auflage 1837, S. 143. Zweite Auflage 1867, §. 35.

2) Bei Benutzung der Prony'schen Werthe für A und B ergaben sich folgende Werthe für k:

v	0m,1	0m,2	0m,3	0m,4	0m,5	0m,75	1m,0	1m,25	1m,50	2m,0	3m,0
k	36,42	43,37	46,75	48,77	50,11	52,09	53,17	53,85	54,32	54,92	55,86

3) Erfahrungsresultate über die gleichförmige Bewegung des Wassers in Flußbetten und Canälen. Braunschweig 1845.

4) Lahmeyer, geb. zu Hannover 1817, gest. 1859.

5) Der Ingenieur (Erste Reihe des Bornemann'schen Civil-Ingenieurs). Bd. 1 (1848), S. 28 und 228.

6) Förster's Bauzeitung, Jahrg. 1840. Literatur- und Anzeigeblatt, Bd. III, S. 273. Ferner Jahrg. 1851. Literaturbl., Bd. IV, S. 137.

7) Ebendaselbst, Jahrg. 1852, S. 149.

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{1}{v\sqrt{v}} = 0{,}0004021 + 0{,}0002881 \sqrt{\frac{b}{\varrho}},$$

worin, außer den bereits im Vorhergehenden festgesetzten Bezeichnungen, b die Breite des Flusses und ϱ der Krümmungshalbmesser desselben ist. Für gerade Flußstrecken erhält man sonach:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}0004021\, v \sqrt{v},$$

daher, wenn man die Chezy-Eytelwein'sche Formel

$$v = k \sqrt{\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l}} = k \sqrt{r \, . \, s}$$

in Anwendung bringen will, zu setzen ist:

$$k = \frac{\sqrt[4]{v}}{\sqrt{0{,}0004021}} = 49{,}87 \sqrt[4]{v}.$$

Ferner erhält man noch überdies:

$$v = 183{,}56 \sqrt[3]{(r \, . \, s)^2}.$$

Noch bevor Lahmeyer die letzteren Resultate veröffentlichte, schlug Bornemann vor[1]), Versuchen Weisbach's über die gleichförmige Bewegung des Wassers in langen Röhrenleitungen entsprechend, nachstehende Form zu wählen:

$$\frac{k}{v^2} = \frac{A}{v} + B = \varrho, \text{ oder}$$

$$\varrho = A + \frac{B}{\sqrt{v}} \text{ zu setzen.}$$

Aus 88 Versuchen Dubuat's, Funk's, Kragenhoff's und Woltmann's, fand dann Bornemann unter Zuziehung der Methode der kleinsten Quadrate (für Meter):

$$\varrho = 0{,}000313143 + \frac{0{,}0000414977}{\sqrt{v}}.$$

Später (1848) empfahl Bornemann, unter Zuziehung ausgewählter Lahmeyer'scher Versuche, die einfachere Form:[2])

$$\varrho = \frac{0{,}000562151}{\sqrt{v}}.$$

Bemerkenswerth dürfte noch sein, daß ungefähr um dieselbe Zeit der französische Ingenieur St. Venant[3]) aus den von Eytelwein benutzten 91 Versuchen die Formel ermittelte und empfahl:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = r \, . \, s = 0{,}00040102 \, . \, v.$$

---

[1]) Polytechnisches Centralblatt, Jahrg. 1845. (Neue Folge. Sechster Band.) S. 312.

[2]) Der Ingenieur (Erste Folge der Zeitschrift des Civilingenieur). Erster Band (1848), S. 38.

[3]) Annales des Mines, 4e Série, T. XX (1851), Pag. 183. Ferner in St. Venant's Buche: „Formules et tables nouvelles“ etc. Paris 1851.

Im Jahre 1848 veröffentlichte Dupuit (Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées) eine, besonders in theoretischer Beziehung beachtenswerthe Arbeit unter dem Titel „Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes“, worin Pag. 59 zur Ermittlung der mittleren Profilgeschwindigkeit v, von der Bodengeschwindigkeit w ausgegangen werden sollte, und zwar unter Anwendung der Formel:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = r \cdot s = 0{,}00081 \cdot w + 0{,}00036\, w^2,$$

worauf zur Bestimmung von v selbst die Gleichung benutzt werden sollte:

$$v = w + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot r \cdot s \cdot e,$$

wenn e die mittlere Tiefe des Querschnittes bezeichnet und ε ein Erfahrungscoefficient ist, den Dupuit (damals, nach Sonnet) $= \frac{1}{3200}$ setzte.

Da die hierbei gemachten Voraussetzungen den Erfahrungen nicht entsprechen, so haben diese Formeln keinen practischen Werth.

Interessant ist es übrigens, daß die amerikanischen Ingenieure (S. 347) Humphreys und Abbot, bei Herleitung von Formeln aus ihren Versuchen, von den Europäern fast ausschließlich nur die Ergebnisse von Dubuat und Dupuit benutzten (man sehe deshalb besonders S. 125 und 126 der bereits citirten Grebenau'schen Uebersetzung des Werkes der Genannten). Auch nach dem Bekanntwerden der Arbeiten Darcy's ist es Dupuit nicht gelungen, brauchbare Formeln aufzufinden, wie die zweite Ausgabe seines Werkes (Paris 1863), von S. 44, §. 36 an, erkennen läßt.

Besondere Hoffnungen knüpften die Practiker zuerst an die Mississippi-Messungen der amerikanischen Ingenieure Humphreys und Abbot.

In der That gelangten diese Ingenieure zu folgender sehr complicirten Formel (für Metermaaß):

$$v = \left\{ \sqrt{0{,}0025\, m = \sqrt{68{,}72 \cdot r \sqrt{s}}} - 0{,}05 \sqrt{m} \right\}^2,$$

wo $m = \dfrac{0{,}933}{\sqrt{r + 0{,}437}}$ ist[1]).

Allerdings bemühten sich die genannten Ingenieure dennoch, wie auch bereits S. 348 erörtert wurde, diese Formel in rationeller Weise abzuleiten, allein dem Resultate ist nur ein rein empirischer Charakter beizulegen[2]).

---

[1]) Grebenau's (bereits S. 343, Note 1) citirte Uebersetzung des Humphreys-Abbot'schen Werkes, S. 124, Anhang F, XCIII und C.

[2]) Hagen sprach schon 1867 ein sehr scharfes, nicht überall günstiges Urtheil über die neuen Formeln der amerikanischen Ingenieure aus, welches sich in einem längeren Aufsatze abgedruckt vorfindet in Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, Jahrg. XVIII (1868), S. 63 ff. Sehr zweckmäßige Uebersichten der Humphreys und Abbot'schen Arbeiten (nach Grebenau's Uebersetzung) haben nachbemerkte Ingenieure geliefert: Treuding (in Hannover) in der Zeitschrift des Hannov. Architekten- und Ingenieurvereins, Bd. XIV, Jahrg. 1868, S. 306 ff. — Klaas (in Wiesbaden) in Dünkelberg's Cultur-Ingenieur, Bd. I, S. 43 ff.

Ueber diese Messungen wurden an vorhergehenden Stellen dieses Buches, namentlich S. 348, 353 und S. 355, bereits hinreichende Mittheilungen gemacht, wozu hier noch als eine besondere Eigenthümlichkeit hinzugefügt werden mag, daß die betreffenden relativen Gefälle sehr gering waren, d. h. s von 0,00069851 bis 0,00000342 variirten, so wie die mittleren Radien (die hydraulischen Tiefen) $r = 3,66$ bis 74,37 Fuß englisch betrugen.

Grebenau[1]) bemühte sich, die letztere complicirte Formel durch folgende einfachere zu ersetzen:

$$v = 8,29 \,.\, \beta \sqrt{r \,.\, \sqrt{s}},$$

wo β zwischen 0,85 und 0,95 genommen werden soll, je nachdem man aufsteigend für kleine oder größere Bäche, für kleinere oder größere Flüsse Rechnungen zu führen hat.

Geradezu unbrauchbar muß man beide Formeln für künstliche Canäle, so wie für Wasserläufe mit starkem Gefälle bezeichnen.

Bei sämmtlichen vorstehenden Formeln hat man den Einfluß der mehr oder weniger rauhen Beschaffenheit der Canalwände völlig unberücksichtigt gelassen. Die Wichtigkeit dieses neuen Elementes wurde zuerst durch Darcy's Beobachtungen an Wasserleitungsröhren der Stadt Dijon außer Zweifel gesetzt[2]) und dazu benutzt, auch den wahrscheinlich gleichen Einfluß auf die Bewegung des Wassers in Canälen, durch ganz neue Versuche zu ermitteln.

Darcy, durch die französiche Regierung kräftig unterstützt[3]), ließ hierzu im Jahre 1856 am Canal von Bourgogne, in der Gegend von Dijon, einen besonderen Experimentencanal (Abflußcanal) von 596,5 Meter Länge, 2 Meter Breite und 1 Meter Tiefe anlegen, welcher sein Wasser aus dem Schifffahrtscanal von Bourgogne am Bief (Canalhaltung) Nr. 57 empfing und in den Fluß l'Ouche ergoß. Dieser Experimentencanal wurde nach und nach mit jenen vier Verkleidungen ausgestattet, worüber S. 390 berichtet wurde[4]). Ferner wurden dem Canale verschiedene geometrische Formeln, so wie relative Gefälle von 0,001 bis 0,009 gegeben und die betreffenden Geschwindigkeiten sowohl mittelst der von Darcy verbesserten Pitot'schen Röhre, als auch dadurch ermittelt, daß man im Voraus bestimmte Wassermengen durch die Inhalte der correspondirenden Querschnitte dividirte.

---

[1]) Uebersetzung des Humphreys und Abbot'schen Werkes, Anhang, Buchstabe F, CLX.

[2]) Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Paris 1857, Pag. 110 ff.

[3]) Recherches hydrauliques etc. Entreprises par Darcy et continuées par Bazin. Paris 1865. Avant-propos XXXII.

[4]) Besonders empfehlenswerthe Berichte über diese höchst wichtigen Versuche, haben von deutschen Ingenieuren folgende geliefert: v. Kaven in der Zeitschrift des Hannov. Archit.- und Ingen.-Vereins, Jahrg. 1866, S. 327. — Ganguillet und Kutter in der Zeitschrift des österr. Ingen.- und Archit.-Vereins, Jahrg. 1869, S. 9 ff. — Kutter in Dünkelberg's Cultur-Ingenieur, Bd. II, S. 88 ff. — Kutter in seinem Buche „Die neuen Formeln über die Bewegung des Wassers". Zweite Auflage, 1877, S. 39 ff. — Hagen in seinen „Untersuchungen über die gleichförmige Bewegung des Wassers". Berlin 1876. S. 43 ff.

Die von **Bazin** nach **Darcy's** Tode gewonnenen Resultate führten schließlich zu der Formel: [1])

$$\frac{r \cdot s}{v^2} = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{r}},$$

und speciell für Metermaaß zu den vier Categorien:

$$\frac{r \cdot s}{v^2} = 0{,}00015 \left(1 + \frac{0{,}03}{r}\right) \text{ für sehr glatte Wände;}$$

$$\frac{r \cdot s}{v^2} = 0{,}00019 \left(1 + \frac{0{,}07}{r}\right) \text{ für glatte Wände;}$$

$$\frac{r \cdot s}{v^2} = 0{,}00024 \left(1 + \frac{0{,}25}{r}\right) \text{ für rauhere Wände;}$$

$$\frac{r \cdot s}{v^2} = 0{,}00028 \left(1 + \frac{1{,}25}{r}\right) \text{ für Erdwände.}$$

Der Umstand, daß die Formel der amerikanischen Ingenieure nur für große Flüsse mit geringem Gefälle als recht brauchbar bezeichnet werden konnte, die vorstehenden Bazin'schen Formeln aber wiederum nur für künstliche Canäle mit großen Gefällen, veranlaßte 1867 den französischen Wasserbauingenieur **Gauckler** in Colmar, auf Grund der Darcy-Bazin'schen Versuche folgende zwei neuen Formeln aufzustellen: [2])

$$\sqrt{v} = \alpha_1 \sqrt[3]{r} \cdot \sqrt[4]{s} \text{ für Gefälle über 0,0007 und}$$

$$\sqrt[4]{v} = \beta_1 \sqrt[3]{r} \cdot \sqrt[4]{s} \text{ für Gefälle unter 0,0007,}$$

so daß der Coefficient k der Chezy-Eytelwein'schen Formel wurde beziehungsweise zu:

$$k = \alpha_1^2 \sqrt[6]{r} \text{ und } k = \beta_1^4 \sqrt[6]{r^5} \cdot \sqrt{s}.$$

Die Constanten α_1 und β_1 verändern sich übrigens ebenfalls nach der Beschaffenheit der Wände und Sohle des Wasserlaufes und sollten folgende Werthe erhalten:

	$s > 0{,}0007$	$s < 0{,}0007$
Für Mauerung in Werkstücken und Cement.	$\alpha_1 = 0{,}00010$ bis 0,000192	$\beta_1 = 0{,}000152$ bis 0,000192
Gewöhnl. gute Mauerung	$\alpha_1 = 0{,}000192$ „ 0,00030	$\beta_1 = 0{,}000192$ „ 0,000244
Gemauerte Seiten und natürlicher Boden . .	$\alpha_1 = 0{,}000300$ „ 0,000468	$\beta_1 = 0{,}000244$ „ 0,000284
Gräben mit natürlichen Wänden und Boden .	$\alpha_1 = 0{,}000468$ „ 0,000947	$\beta_1 = 0{,}000284$ „ 0,000416
Dergl. mit bewachsenen Wänden.	$\alpha_1 = 0{,}000947$ „ 0,00160	$\beta_1 = 0{,}000416$ „ 0,000527
Für Flüsse		$\beta_1 = 0{,}000527$ „ 0,000635

Um den Uebelstand der Gauckler'schen Resultate zu beseitigen, daß für geringere Gefälle eine andere Formel angewendet werden müßte,

[1]) **Darcy-Bazin**, Recherches hydrauliques, Pag. XVIII und XIX; ferner Pag. 130, 134, 135 und 142.

[2]) Annales des ponts et chaussées. 1868. 1e Sem., Pag. 229. Ferner im Civilingenieur (eine mit kritischen Bemerkungen versehene, überhaupt beachtenswerthe Arbeit **Bornemann's**). Bd. XV (1869), S. 13, sodann auch in der Zeitschrift des Hannoverschen Archit. und Ingen.-Vereins, Jahrg. 1870, S. 280.

als für größere Gefälle, veranlaßten Bornemann[1]), unter Benutzung einiger Freiberger (bis dahin nicht veröffentlichter) Versuche, zur Aufstellung folgender Formel:

$$\sqrt[4]{v} = \gamma \sqrt[3]{r} \cdot \sqrt[5]{s},$$

so daß der Chezy-Eytelwein'sche Coefficient wird zu:

$$k = \frac{\sqrt[6]{r^5}\,\sqrt[10]{s^3}}{\gamma}.$$

Für γ fand Bornemann folgende Werthe:

für hölzerne Gerinne im Mittel $\gamma = 0{,}000623$;
„ gemauerte Gräben „ „ $\gamma = 0{,}00109$;
„ ungemauerte „ „ „ $\gamma = 0{,}00390$;
„ Flüsse „ „ $\gamma = 0{,}00390$.

Auch gegen die Benutzung dieser Formel wurde Bedenken erhoben[2]), namentlich deshalb, weil, wie bei der Gauckler'schen Formel, der Coefficient k mit dem relativen Gefälle $\frac{h}{l} = s$, zugleich abnimmt und ferner ihre Anwendbarkeit für größere Gewässer mindestens zweifelhaft zu sein scheint[3]).

Das größte Vertrauen seitens der Practiker erwarben sich dafür die schweizerischen Ingenieure Ganguillet und Kutter im Jahre 1869 durch die Aufstellung nachstehender Formel[4]), welche für alle Arten von Gefällen passen, folglich die sämmtlichen, namentlich die amerikanischen, sowie die Bazin'schen Resultate in sich fassen sollte, und die für Metermaaß folgendermaßen lautet:

$$v = \left\{ \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{s}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{s}\right)\frac{n}{\sqrt{r}}} \right\} \sqrt{r \cdot s}.$$

Hiernach ist der in der Parenthese eingeschlossene Werth kein anderer als der Coefficient k der Chezy-Eytelwein'schen Formel:

$$v = k\sqrt{r \cdot s}.$$

Ferner ist n der sogenannte Rauhigkeitscoefficient, für welchen die genannten Ingenieure folgende sechs Werthe ermittelten:

1) $n = 0{,}010$ für Canäle von sorgfältig gehobeltem Holz und von glatter Cementverkleidung.

2) $n = 0{,}012$ für Canäle aus Brettern.

---

[1]) Civilingenieur, Bd. 15 (1869), S. 489.

[2]) Prof. Schmidt (in Darmstadt) im 3. Bande, S. 261, des Handbuches der Ingenieur-Wissenschaften von Franzius und Sonne.

[3]) Kreisbaumeister Graeve (in Breslau), „Beobachtungen über die Bewegung des Wassers in Strömen". „Civilingenieur", Jahrg. 1879, S. 188 und 189.

[4]) Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins, XXI. Jahrg. (1869), S. 6 unter der Ueberschrift: „Versuch zur Aufstellung einer neuen allgemeinen Formel für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen, gestützt auf die Resultate französischer und nordamerikanischer Messungen".

3) $n = 0,013$ für Canäle aus behauenen Quadersteinen und gut gefügten Backsteinen.

4) $n = 0,017$ für Canäle aus Bruchstein-Mauerwerk.

5) $n = 0,025$ für Canäle in Erde, so wie für Bäche und Flüsse.

6) $n = 0,030$ für Gewässer mit groben Geschieben und mit Wasserpflanzen.

Die Betrachtung der allerdings etwas complicirten Formel lehrt in Bezug auf k sofort, daß dieser Coefficient mit r in gleichem Sinne, mit s aber in entgegengesetztem Sinne sich ändert, daß er (k) ferner um so kleiner wird, je größer die Rauhigkeit der Wände ist, und daß endlich der Rauhigkeitsgrad durch den einzigen Coefficienten n und nicht, wie bei der Bazin'schen Formel, von zwei variabeln Coefficienten α und β dargestellt wird.

Offenbar ist die allerwichtigste Frage die, ob mit der Ganguillet-Kutter'schen Formel das Ziel wirklich erreicht ist, was sich die strebsamen schweizerischen Ingenieure steckten.

Seiner Zeit wurde als das competenteste Urtheil hierüber das betrachtet, welches 1871 Bazin aussprach, von dessen Formel Ganguillet und Kutter ausgingen. Bazin behauptete in der unten angegebenen Zeitschrift[1]), daß die Formel der Schweizer für künstliche Canäle aus Holz und Stein, deren Gefälle gewöhnlich beträchtlich ist, keine schärferen Resultate liefern, als seine eigene, einfachere Formel, daß für Canäle in Erde, mit relativen Gefällen $s = \frac{h}{l} < \frac{1}{1000}$, beide Formeln fast ganz gleiche Resultate liefern, so lange $r < 6$ Meter ist, daß man dagegen aus beiden Formeln für $r > 6$ Meter sehr verschiedene Werthe erhält, von denen aber die der schweizerischen Formeln mit den Messungen am Mississippi übereinstimmen. Da letzteres aber ganz besonders in der Absicht von Ganguillet und Kutter lag, so erkennt Bazin, daß diese Herren „ihr Ziel in sehr geschickter Weise erreichten“.

Obgleich nun auch deutsche Autoritäten, wie u. A. Grashof[2]), die Formel von Ganguillet und Kutter als am Meisten empfehlenswerth bezeichneten, so war es doch Kutter selbst, der schon im Jahre 1869 außer dem Zugeständnisse, daß die schweizerische Formel für die Praxis viel zu complicirt sei, einen anderen, viel größeren Uebelstand derselben zugeben mußte[3]). Es ist dies der unsichere Spielraum der Größe n, des sogenannten Rauhigkeitscoefficienten, bei dessen Verwendung schon geringe Abweichungen ausreichten, das Gesammtresultat wesentlich zu beeinflussen. Kutter suchte diesem Uebel dadurch abzuhelfen, daß er statt der ursprünglich fünf Kategorien von Wandbeschaffenheiten, deren zwölf unterschied. Um dabei dem Practiker, so weit als thunlich, die Benutzung der Chezy-Eytelwein-Formel:

---

[1]) Annales des ponts et chaussés, 5e Série, Tome I (1871), Pag. 9—48. Hieraus im Auszuge in der Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins, Jahrg. 1871, S. 553.

[2]) Theoretische Maschinenlehre. Erster Band (1875), S. 737.

[3]) Der Cultur-Ingenieur. Zweiter Band. Braunschweig 1869, S. 177 und 184.

$$v = k\sqrt{r \cdot s}.$$

(für Metermaaß) möglich zu machen, berechnete Kutter geeignete Tabellen[1]), wovon wir im folgenden Paragraphen Kenntniß nehmen und zugleich davon Gebrauch machen wollen.

Daß dennoch die Werthe dieser Tabellen nicht ohne Weiteres abgeschrieben, sondern mit großer Sorgfalt benutzt, bei wichtigen practischen Fällen allerlei Nebenumstände erwogen werden müssen, zeigte bald nachher der sächsische Wasserbauingenieur Herr v. Wagner (jetzt Professor am Colleg. Carol. in Braunschweig)[2]), so wie auch Bornemann in Freiberg noch 1877[3]) wiederum aufmerksam zu machen für erforderlich hielt, daß den von Bazin, Ganguillet und Kutter mit großem Geschick weiter ausgebildeten Formeln kein höherer Werth als der von Interpolationsformeln beizulegen sei.

Auch Hagen stellte im Jahre 1869[4]) (für Metermaaß) eine neue Formel auf, nämlich:

$$v = 2{,}425\sqrt{r} \cdot \sqrt[6]{i},$$

welche für alle relativen Gefälle gelten sollte, die kleiner als 0,0002 sind. Allein sehr wenige Jahre nachher war Hagen selbst mit dieser Formel unzufrieden, insbesondere deshalb, weil sie sich namentlich für kleine Wasserläufe unbrauchbar zeigte. Hagen bemühte sich deshalb um die Aufstellung neuer Formeln, wobei er noch einmal fast alle älteren und neueren Versuche der Kritik unterwarf und gelangte endlich 1876 dazu, zwei verschiedene Formeln (für die Geschwindigkeit gleichförmiger Wasserbewegung aufzustellen[5]), nämlich (Metermaaß vorausgesetzt):

$$v = 4{,}90 \,.\, r\sqrt[5]{s} \text{ für kleine Wasserläufe und}$$

$$v = 3{,}34\sqrt{r}\,\sqrt[5]{s} \text{ für Flüsse und Ströme,}$$

so daß der Coefficient k der Chezy-Eytelwein'schen Formel wird:

$$k = 4{,}09\sqrt{\frac{r}{\sqrt[5]{s^3}}} \text{ für kleine Wasserläufe und}$$

$$k = \frac{3{,}34}{\sqrt[10]{s^3}} \text{ für Flüsse und Ströme.}$$

In beiden Fällen sind die Wände der Betten aus Erdreich bestehend angenommen.

Wir werden nachher erfahren, welchen Werth, für practische Zwecke, diese neuesten Hagen'schen Formeln besitzen.

---

[1]) Cultur-Ingenieur, Bd. II, S. 185.

[2]) In dem 1877 in zweiter Auflage erschienenen Buche Kutter's: „Die neuen Formeln für die Bewegung des Wassers" etc., bemüht sich derselbe (S. 90 ff.), die Nothwendigkeit von zwölf statt vier Kategorien von Rauhigkeit des benetzten Umfanges besonders darzuthun, worauf hier verwiesen werden muß.

[3]) Protokolle des sächs. Ingen.- und Archit.-Vereins. Mai 1875, S. 28 ff.

[4]) Civil-Ing., Jahrg. 1877, S. 22 unter der Ueberschrift „Neueste Literatur über die Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen".

[5]) „Untersuchungen über die gleichförmige Bewegung des Wassers". Berlin 1876, S. 87.

Zu den allerjüngsten Formeln für die Geschwindigkeit gleichförmiger Bewegung des Wassers in Flußbetten, gehört noch die des Hamburger Ingenieurs P. E. Harder[1]), der eine andere Form deshalb für erforderlich erachtete, weil er die Annahme von 12 Rauhigkeits-Kategorien seitens Kutter's für nicht gerechtfertigt hielt und außerdem aus Versuchen gefunden haben wollte, daß sowohl die Kutter'sche als Bazin'sche Formel für Bäche und kleinere Flüsse zu geringe Werthe liefere.

Harder empfiehlt daher, wenn die Chezy-Eytelwein'sche Form

$$v = k\sqrt{r \cdot s}$$

beibehalten wird, zu setzen:[2])

$$k = k_1 + k_2\sqrt{r}$$

und zu nehmen (Metermaaß):

1) Für Canäle mit sehr glatten Wänden:

$$k = 70{,}5 + 7{,}254\sqrt{r}.$$

2) Für Canäle mit glatten Wänden (Brettern, Quadersteinen und Backsteinen):

$$k = 56{,}0 + 7{,}254\sqrt{r}.$$

3) Für Canäle in Erde und aus rauhem Bruchsteinwerk:

$$k = 36{,}27 + 7{,}254\sqrt{r}.$$

Nachträglich werde bemerkt, daß Harder seine Beobachtungen und Messungen in der Elbe bei Hamburg und in einem kleinen Bache (Collau mit Namen), 5 Kilometer von Hamburg entfernt, anstellte. Ueber die betreffenden Geschwindigkeitsmessungen (mittelst Stabschwimmern S. 362), so wie über die correspondirenden Nivellements und Profilmessungen wird ausführlich in unserer Quelle berichtet. Eine nachher (S. 410) folgende Tabelle zeigt allerdings, daß die nach Harder's Formel berechneten Geschwindigkeiten merkwürdig gut mit den Messungsresultaten bewährter Hydrotekten übereinstimmen.

Der Verfasser schließt (vorerst) hiermit die geschichtlichen Notizen, die Gesetze der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen betreffend, dabei bemerkend, daß aus Allem nur noch mehr der wahrhaft klägliche Zustand unseres Wissens in diesem Gebiete hervorgeht, auf den bereits früher wiederholt (S. 192 und 394) aufmerksam gemacht wurde. Vollkommen wird man sich mit einem Ausspruche des Herrn Kunstmeisters Bornemann einverstanden erklären müssen, dessen erfahrenen Rath sich der Verfasser auch in gegenwärtigem Abschnitte der technischen Hydromechanik erbat, der u. A. (in einem Briefe vom Anfange dieses Jahres) folgendermaßen lautet:

„Wir wissen gegenwärtig noch zu wenig von der Beschaffenheit und der Einwirkung des Bettwiderstandes der Canäle und Flüsse, um Theorien aufstellen zu können, weshalb es mir fast komisch erscheint, wenn für große Ströme und seichte Bäche eine und dieselbe Formel empfohlen wird, die man dann mit unzähligen Correctionscoef-

[1]) Die Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen. Hamburg 1878.

[2]) Harder a. a. O., S. 93 und 94.

ficienten versieht. Wahrscheinlich wird es noch lange dauern, ehe dieser Zustand der Hydraulik sich bessert".

Wichtig scheint mir noch eine andere Bemerkung Herrn Bornemann's, die sich am Ende eines Aufsatzes des Civil-Ingen., Jahrg. 1877 (Bd. XXIII), vorfindet, welcher die Ueberschrift trägt: „Neuere Literatur über die Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen". Dieselbe lautet (a. a. O., S. 58) folgendermaßen:

„Wenn man bedenkt, daß im Allgemeinen in größeren Flüssen eine gleichförmige Bewegung des Wassers kaum zu erwarten ist, so scheint es richtiger, nach Weisbach's Vorgange die Widerstandscoefficienten aus der ungleichförmig permanenten Bewegung des Wassers, d. h. unter Verwendung der Formel I, S. 396 zu ermitteln, was zwar Mühe und Arbeit verursacht, durch die größere Brauchbarkeit der erzielten Resultate aber jedenfalls aufgewogen werden wird".

Als einen passenden Anhang zu Vorstehendem mögen hier noch zwei Tabellen Platz finden, aus welchen man einigermaßen die Uebereinstimmungen beurtheilen kann, welche sich bei der Verwendung derjenigen Formeln finden, die man zur Zeit mehr oder weniger, für practische Zwecke, als brauchbar bezeichnet.

Der Kern der ersten Tabelle ist dem Dingler'schen Polytechn. Journale, Bd. 192, S. 13 ff., entlehnt. Neu hinzugefügt wurden die Werthe der mit Lahmeyer, Hagen und Harder überschriebenen Columnen. Zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeiten nach Hagen wurde dessen jüngste, für Flüsse und Ströme bestimmte Formel $v = 3{,}34 \sqrt{r} . \sqrt[6]{s}$ (S. 407) in Anwendung gebracht.

Die für r und s, so wie für die gemessenen Geschwindigkeiten angegebenen Werthe, scheint der (nicht genannte) Verfasser des betreffenden Artikels im Dingler'schen Journale der schönen, sehr vollständigen „Zusammenstellung der Resultate zuverlässiger Messungen" etc. entnommen zu haben, welche sich (von S. 94 ab) in dem vorher angegebenen Kutter'schen Buche: „Die neuen Formeln für die Bewegung des Wassers" etc., vorfinden.

Die in Klammern eingeschlossenen Ziffern bezeichnen die Anzahl der Versuche einer Reihe, von welchen man jedoch gewöhnlich den letzten der betreffenden Versuche als Beispiel gewählt hat. Harder hat dagegen (richtiger) mit den Mittelwerthen gerechnet.

Tabelle I.

zur Vergleichung gemessener und berechneter Werthe verschiedener mittlerer Profilgeschwindigkeiten.

Gewässer, worin die directen Messungen angestellt wurden, nebst Namennennung der betreffenden Ingenieure	r	s	Resultate directer Messung	Mittlere Profilgeschwindigkeiten. Resultate der Rechnung nach den Formeln von						
				Lahmeyer	Humphreys und Abbot	Bazin	Gauckler	Hagen	Ganguillet und Kutter	Harder
Mississippi b. Columbus, Doppelschwimmer, Mississippi-Comm. 1858	19,666	0,00004365	2,080	1,659	2,102	1,700	3,892	1,988	2,066	2,005
„ „ Carrollton, „ „ 1851	22,413	0,00000342	1,229	0,331	1,308	0,508	0,363	1,275	1,214	.
Newka. . Destrem.	5,309	0,00001487	0,624	0,338	0,466	0,477	0,330	0,833	0,624	.
Newa „	10,796	0,00001389	0,984	0,518	0,832	0,690	0,795	0,984	1,026	.
Rhein zu Speier, Woltmann'scher Flügel. Strauß.	2,964	0,00011200	0,887	0,880	0,872	0,913	0,906	0,932	0,882	0,888
Rigole de Grosbois, Sér. Nr. 49 (4) Canal in Erde. Bazin.	0,543	0,00027500	0,447	2,378	0,473	0,402	0,429	0,477	0,464	0,509
Seine à Paris (9), Schwimmer. Poirée. 1851. 1852	4,855	0,00017200	1,427	1,628	1,404	1,540	2,375	1,035	1,274	1,510
Seine à Poissy etc. (5), Woltmann'scher Flügel. Emmery. 1852	4,146	0,00005000	0,723	0,642	0,952	0,752	0,671	0,937	0,784	0,714
Saône à Raconnay (10), „ „ Leveillé.	4,825	0,00004000	0,725	0,613	0,970	0,739	0,783	0,968	0,757	0,725
Canal du Jard (1), Schwimmer. Dubuat. 1782	0,512	0,00003620	0,137	0,128	0,283	0,139	0,052	0,137	0,138	0,178
Rivière de Haine (4) „ „ „	1,776	0,00002790	0,333	0,247	0,510	0,322	0,144	0,546	0,324	0,324
Plessur bei Chur (5) „ La-Nicca. 1835	1,095	0,00965000	4,251	8,839	1,748	4,205	3,392	1,380	4,348	.
Eschercanal (2) „ Legler.	1,347	0,00300000	2,550	4,657	1,436	2,733	2,148	1,213	2,574	.
Rhein bei Germersheim, Woltmann'scher Flügel. Grebenau. 1866	3,308	0,00024700	1,540	1,604	1,267	1,458	2,046	1,155	1,650	.
Simmencanal in Lenk, Kant. Bern, Schwimmer (1). Wampfler. 1867	0,403	0,01700000	1,827	6,621	1,168	2,435	1,921	0,939	1,855	.
Rhein zu Basel, Woltmann'scher Flügel. Grebenau. „	2,100	0,00092600	1,945	2,859	1,407	2,081	1,623	1,945	1,932	.
Experimentircanal, Cement, Sér. Nr. 24 (12). Bazin. 1857	0,315	0,00142430	1,862	1,076	0,543	1,653	1,748	0,505	1,833	.
„ „ „ „ 2 (12). „ 1856	0,212	0,00506000	2,460	1,923	0,613	2,504	2,530	0,534	2,687	1,980
„ „ „ „ 25 (12). „ 1857	0,316	0,00138020	1,726	1,056	0,539	1,632	1,691	0,503	1,632	.
„ Backsteine „ „ 3 (12). „ 1857	0,237	0,00502500	2,047	0,957	0,646	2,200	1,958	0,564	2,128	1,680
„ Bretter „ „ 8 (12). „ „	0,192	0,00816290	2,612	1,149	0,657	2,458	2,644	0,559	2,561	.
„ „ „ „ 26 (13). „ 1856	0,351	0,00152270	1,689	1,209	0,583	1,530	1,651	0,541	1,667	.
Ablaufcan. v. Reservoir de Grosbois, Bruchst., Sér. Nr. 32 (4) Bazin. „	0,202	0,10076000	6,429	13,683	1,261	6,126	6,303	0,951	6,274	5,635
„ „ „ „ „ „ „ „ 33 (4) „ „	0,260	0,03685600	4,595	8,281	1,115	4,510	4,500	0,880	4,530	.
„ „ Bief Nr. 52 „ „ „ 35 (5) „ „	0,454	0,01422100	3,433	6,365	1,158	4,172	3,256	0,962	3,111	3,309
Rigole de Chazilly, behauene Quadersteine, „ „ 39 (4) „ 1859	0,234	0,00810000	2,666	2,811	0,722	2,767	2,697	0,617	2,684	2,287
Canal de Marseille, Bruchsteine, Sér. Nr. 1 (4). Baumgarten.	0,188	0,06000000	4,246	9,232	1,061	4,488	4,255	0,825	4,244	4,181
Grünnbachschale a. Thunersee, Bruchst., Schwimmer (6) Kutter. 1867	0,197	0,10677500	5,844	13,987	1,262	6,210	5,862	0,473	5,744	5,729
Gontenbachschale am Thunersee, „ „ (4) „ „	0,112	0,04642500	3,345	5,509	0,773	2,602	3,267	0,605	3,180	2,797
Alpbachschale zu Meiringen, „ „ (4) „ „	0,229	0,02292000	2,430	5,544	0,927	3,230	2,267	0,751	2,290	2,878

Tabelle II.

Vergleichung von Geschwindigkeitsmessungen in der Oder und Warthe, mit den Resultaten der nachbenannten sieben Formeln: [1])

Bezeichnung der Geschwindigkeits-Formel	Warthe-Profil: $\frac{h}{l} = s = \frac{1}{4572} = 0{,}000218$; $\frac{a}{p} = r = 2{,}21$; $v = 0{,}9170$ Meter (gemessen mit Woltmann's Flügel)	Oder-Profil: $\frac{h}{l} = s = \frac{1}{6234} = 0{,}000160$; $\frac{a}{p} = r = 2{,}393$; $v = 0{,}7113$ Meter (gemessen mit Woltmann's Flügel)
Die von:	v berechnet	v berechnet
Humphreys u. Abbot	0,983 Meter	0,945 Meter
Grebenau	0,975 „	0,962 „
Bazin.	0,847 „	0,763 „
Gauckler	0,306 „	1,051 „
Hagen (neuere F.) .	0,920 „	0,899 „
Ganguillet u. Kutter	0,727 „	0,629 „
Harder	1,031 „	1,043 „

Da sich hiernach ein mit den Messungen übereinstimmendes Resultat für das Wartheprofil ergiebt, so behauptet Herr Graeve, daß die (neueste) Hagen'sche Formel in der Anwendung auf Ströme bei Gefällen zwischen $\frac{1}{5000} = 0{,}00020$ und $\frac{1}{4000} = 0{,}00025$, allen übrigen vorzuziehen sei. Es dürfte Sachverständigen zu überlassen sein, dem Urtheile des Herrn Graeve beizustimmen oder nicht.

Tabelle III. Vergleichung von Geschwindigkeitsmessungen des Herrn Prof. Harlacher in Prag[2]), welche im April 1871 mittelst eines vorzüglichen, von Amsler in Schaffhausen bezogenen Woltmann'schen Flügels, mit größter Sorgfalt, Aufmerksamkeit und Sachkenntniß, in der böhmischen Elbe unweit Herrnskretschen (in der böhmisch-sächsischen Schweiz) angestellt wurden[3]).

[1]) Graeve, Kreisbaumeister in Breslau, „Beobachtungen über die Bewegung des Wassers in Strömen". Civiling. 1879, S. 174.

[2]) Bestimmung der Wassermenge von Flüssen und Wassermessung im Elbstrome an der böhmisch-sächsischen Grenze. Technische Blätter, III. Jahrg. (1871), S. 81 ff.

[3]) Der Verfasser hält es für nicht überflüssig, noch auf nachbemerkte Quellen aufmerksam zu machen, worin sich Vergleiche directer Geschwindigkeitsmessungen mit den vorzüglichsten der erörterten Formeln vorfinden: Bornemann im Civiling., Jahrg. 1869 (Bd. XV), S. 45. — Ganguillet und Kutter in der Zeitschrift des österr. Ingen.- und Archit.-Vereins, Jahrg. 1869, S. 53 ff. — Sasse in der (Berliner) Deutschen Bauzeitung, Jahrg. 1871, S. 250. — Bukovský in den Mittheilungen des Böhmischen Archit.- und Ingen.-Vereins, Jahrg. 1873, S. 6. — Wagner in dem Protokolle des Sächs. Ingen.- und Archit.-Verein. 85. Hauptversammlung (9. Mai 1875), S. 29. — Kutter, die neuen Formeln für die Bewegung des Wassers in Canälen und regelmäßigen Flußstrecken. Zweite Auflage. Wien 1877, S. 95 unter dem Titel: „Zusammenstellung der Resultate von 418 Messungen mit den Resultaten von Eytelwein, Humphreys und Abbot, Bazin, Gauckler, so wie Ganguillet und Kutter".

Die Messungen ergaben die Querschnittsfläche $a = 252^{\square m},40$, einen Wasserperimeter $p = 121^m,0$, daher $\frac{a}{p} = r = 2,086$. Ferner ergab das Nivellement $\frac{h}{l} = s = 0,000315$. Die secundliche Wassermenge ($= Q$) wurde in der S. 358 und S. 359 erörterten Weise zu $Q = 281$ Cubikmeter, so daß sich die mittlere Profilgeschwindigkeit $= v$ ergab zu:

$$v = \frac{Q}{a} = \frac{281,0}{252,4} = 1,11 \text{ Meter.}$$

Dafür lieferten die Formeln nachbemerkter Autoren die untergeschriebenen Werthe:

Eytelwein	Humphreys und Abbot	Bazin	Gauckler	Hagen	Bornemann	Ganguillet und Kutter	Harder
$1^m,30$	$1^m,03$	1,21	1,69	0,962	1,08	1,19	1,198

Der Hagen'sche Werth wurde mittelst der neuesten Formel dieses Herrn, d. h. mit $v = 3,34 \sqrt{r} . \sqrt[5]{s}$, und der Harder'sche Werth aus dessen Formel $v = (36,27 + 7,254 \sqrt{r}) \sqrt{r . s} = 46,75 \sqrt{r . s}$ berechnet. Nach der Tabelle hat die Bornemann'sche Formel das genaueste Resultat geliefert. Bei Graeve's Messungen in der Oder und Warthe soll dennoch die Bornemann'sche Formel unbrauchbare Resultate geliefert haben. Liegt dies an letzterer Formel, oder an Herrn Graeve's Messungen?!

§. 134.

Gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen und regelmäßigen Flußstrecken. Verschiedene Aufgaben aus diesem Gebiete.

Nach den Erörterungen der vorigen Paragraphen handelt es sich jetzt vorzugsweise um die Beantwortung der Fragen: Erstens, welche von den verschiedenen in Vorschlag gebrachten Formeln zur Lösung practischer Aufgaben für specielle Fälle räthlich erscheint, und Zweitens, wie man sich das Rechnen mittelst derselben, so weit als möglich, vereinfacht.

Nach den in der geschichtlichen Einleitung ausgesprochenen Urtheilen und übereinstimmend mit den Ansichten rationell gebildeter und erfahrener Practiker, hält es der Verfasser für angemessen, bis auf Weiteres, je nach dem vorliegenden Falle, sich der Formeln Bazin's, so wie Ganguillet und Kutter's zu bedienen, und dabei die Hülfstabellen zu benutzen, welche diese Ingenieure für practische Rechner entworfen haben.

Tabelle I.

der Coefficienten k in der Formel $v = k\sqrt{r \cdot s}$ nach Darcy und Bazin [1]).

Werthe des mittleren Radius oder der hydraulischen Tiefe $\frac{a}{p} = r$	Für sehr gut verbundene Wände aus glattem Cement oder gehobeltem gut gefügten Holze	Für Wände aus Cement mit Sand aus behauenen Steinen, aus Ziegeln oder aus gewöhnl. Brettern	Für nicht sehr glatte Wände oder für Mauerwerk aus Bruchsteinen	Für Wände aus Erde
0,01	40,8	.	.	.
0,02	51,6	34,2	.	.
0,03	57,7	39,7	.	.
0,04	61,7	43,8	.	.
0,05	64,6	46,8	26,4	.
0,06	66,7	49,3	28,4	.
0,07	68,3	51,3	30,2	.
0,08	69,6	53,0	31,8	.
0,09	70,7	54,4	33,2	.
0,10	71,6	55,6	34,5	16,3
0,11	72,4	57,7	35,7	17,0
0,12	73,0	57,7	36,8	17,7
0,13	73,6	58,5	37,8	18,3
0,14	74,1	59,2	38,7	19,0
0,15	74,5	59,9	39,5	19,6
0,16	74,9	60,5	40,3	20,1
0,17	75,3	61,1	41,1	20,7
0,18	75,6	61,6	41,8	21,2
0,19	75,9	62,0	42,4	21,7
0,20	76,1	62,4	43,0	22,2
0,21	76,4	62,8	43,6	22,7
0,25	77,2	64,1	45,6	24,4
0,30	77,9	65,3	47,7	26,3
0,35	78,4	66,2	49,3	28,0
0,40	78,8	66,9	50,6	29,4
0,45	79,1	67,5	51,8	30,7
0,50	79,3	67,9	52,7	31,9
0,60	79,7	68,7	54,2	34,0
0,70	80,0	69,2	55,4	35,8
0,80	80,2	69,6	56,3	37,3
0,90	80,3	69,9	57,1	38,7
1,00	80,4	70,1	57,7	39,8
1,10	80,6	70,3	58,3	40,9
1,20	80,6	70,5	58,7	41,8
1,30	80,7	70,7	59,1	42,7
1,40	80,8	70,8	59,5	43,4
1,50	80,8	70,9	59,8	44,1
1,60	80,9	71,0	60,0	44,8
1,70	80,9	71,1	60,3	45,4
1,80	81,0	71,2	60,5	45,9
1,90	81,0	71,2	60,7	46,4
2,00	81,0	71,3	60,9	46,9
2,50	81,2	71,6	61,5	48,8
3,00	81,2	71,7	62,0	50,2
3,50	81,3	71,8	62,3	51,3
4,00	81,3	71,9	62,6	52,2
5,00	81,4	72,0	63,0	53,5
6,00	81,4	72,1	63,2	54,4

[1]) Auszug aus der großen Tabelle des Darcy-Bazin'schen Werkes (Recherches hydrauliques. Paris 1865, Pag. 323). Hier ist nach S. 404: $k = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{r}}}$.

Tabelle II.

der Coefficienten $k = \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{\sqrt{r}}}$ in der Formel $v = k\sqrt{r \cdot s}$ für verschiedene Rauhigkeitswerthe $= n$ (S. 405) nach Ganguillet und Kutter[1]).

Relatives Gefälle $\frac{h}{l} = s$	I. Cement, sorgfältig gehobeltes Holz ($n = 0{,}0100$) α	β	II. Bretter, verschiedene Formen ($n = 0{,}0120$) α	β	III. Behauene Quader- und gut gefügte Backsteine ($n = 0{,}0130$) α	β	IV. Bruchstein-Mauerwerk ($n = 0{,}0170$) α	β
0,0000	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,0001	138,5	0,385	121,8	0,462	115,4	0,500	97,3	0,654
2	130,7	0,307	114,1	0,369	107,7	0,400	89,6	0,523
3	128,2	0,282	111,5	0,338	105,1	0,366	87,0	0,479
4	126,9	0,269	110,2	0,320	103,8	0,349	85,7	0,457
5	126,1	0,261	109,4	0,313	103,0	0,339	84,9	0,444
6	125,6	0,256	108,9	0,307	102,5	0,332	84,4	0,435
7	125,2	0,252	108,5	0,302	102,1	0,328	84,0	0,428
8	124,9	0,249	108,3	0,299	101,8	0,324	83,8	0,424
9	124,7	0,247	108,0	0,297	101,6	0,321	83,5	0,420
0,0010	124,5	0,245	107,9	0,295	101,5	0,319	83,4	0,417
20	123,8	0,238	107,1	0,285	100,7	0,309	82,6	0,404
30	123,5	0,235	106,8	0,282	100,4	0,306	82,3	0,400
40	123,4	0,234	106,7	0,281	100,3	0,304	82,2	0,398
50	123,3	0,233	106,6	0,280	100,2	0,303	82,1	0,396
60	123,3	0,233	106,6	0,279	100,2	0,302	82,1	0,395
70	123,2	0,232	106,5	0,279	100,1	0,301	82,0	0,395
80	123,2	0,232	106,5	0,278	100,1	0,301	82,0	0,394
90	123,2	0,232	106,5	0,278	100,1	0,301	82,0	0,394
0,0100	123,15	0,231	106,48	0,278	100,06	0,301	81,97	0,393
200	123,08	0,230	106,41	0,277	99,99	0,300	81,90	0,392
300	123,05	0,230	106,38	0,277	99,96	0,299	81,87	0,392
400	123,04	0,230	106,37	0,276	99,95	0,299	81,86	0,392
500	123,03	0,230	106,36	0,276	99,94	0,299	81,85	0,391
600	123,03	0,230	106,36	0,276	99,94	0,299	81,85	0,391
700	123,02	0,230	106,35	0,276	99,93	0,299	81,84	0,391
800	123,02	0,230	106,35	0,276	99,93	0,299	81,84	0,391
900	123,02	0,230	106,35	0,276	99,93	0,299	81,84	0,391
0,1000	123,01	0,230	106,34	0,276	99,92	0,299	81,83	0,391
∞	123,00	0,230	106,33	0,276	99,91	0,299	81,82	0,391

[1]) Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. Jahrg. 1869, S. 59. Erinnert werde (in Bezug auf S. 405), daß

$$k = \frac{\frac{1}{n} + 23 + \frac{0{,}00155}{s}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{s}\right)\frac{n}{\sqrt{r}}}. \text{ Hier gesetzt: } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{n} + 23 + \frac{0{,}00155}{s} \\ \beta = \left(23 + \frac{0{,}00155}{s}\right) n, \end{cases}$$

folgt $k = \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{\sqrt{r}}}$.

Tabelle II. Fortsetzung.

Relatives Gefälle $\frac{h}{l} = s$	V. Canäle in Erde, so wie für Bäche und Flüsse ($n = 0,0250$)		VI. Gewässer mit groben Geschieben und mit Wasserpflanzen ($n = 0,0300$)		Relatives Gefälle $\frac{h}{l} = s$	V. Canäle in Erde, so wie für Bäche und Flüsse ($n = 0,0250$)		VI. Gewässer mit groben Geschieben und mit Wasserpflanzen ($n = 0,0300$)	
	α	β	α	β		α	β	α	β
0,000000	∞	∞	∞	∞	0,00015	73,3	0,833	66,7	1,000
0,000001	1613,0	39,325	1606,3	47,190	16	72,7	0,817	66,0	0,981
3	579,7	13,492	573,0	16,190	17	72,1	0,803	65,4	0,963
5	373,0	8,325	366,3	9,990	18	71,6	0,790	64,9	0,948
7	284,4	6,111	277,8	7,333	19	71,2	0,779	64,5	0,935
0,000010	218,0	4,450	211,3	5,340	20	70,7	0,769	64,1	0,922
15	166,3	3,157	159,7	3,790	30	68,2	0,704	61,5	0,845
20	140,5	2,512	133,8	3,015	40	66,9	0,672	60,2	0,806
25	125,0	2,125	118,3	2,550	50	66,1	0,652	59,4	0,783
30	114,7	1,867	108,0	2,240	60	65,6	0,640	58,9	0,767
35	107,3	1,682	100,6	2,019	70	65,2	0,630	58,5	0,756
40	101,7	1,544	95,1	1,852	80	64,9	0,623	58,3	0,748
45	97,4	1,436	90,8	1,723	90	64,7	0,618	58,0	9,741
50	94,0	1,350	87,3	1,620	0,00100	64,55	0,614	57,88	0,736
55	91,2	1,280	84,5	1,535	200	63,77	0,594	57,10	0,713
60	88,8	1,221	82,2	1,465	300	63,52	0,588	56,85	0,705
65	86,8	1,171	80,2	1,405	400	63,39	0,585	56,72	0,702
70	85,1	1,128	78,5	1,354	500	63,31	0,583	56,64	0,699
75	83,7	1,092	77,0	1,310	600	63,26	0,581	56,59	0,698
80	82,4	1,059	75,7	1,271	700	63,22	0,580	56,55	0,696
85	81,2	1,031	74,6	1,237	800	63,19	0,580	56,52	0,696
90	80,2	1,005	73,6	1,206	900	63,17	0,579	56,50	0,695
95	79,3	0,983	72,6	1,180	0,001000	63,15	0,579	56,48	0,694
0,000100	78,5	0,962	71,8	1,155	2000	63,08	0,577	56,41	0,692
11	77,1	0,927	70,4	1,113	3000	63,05	0,576	56,38	0,691
12	75,9	0,898	69,3	1,078	4000	63,04	0,576	56,37	0,691
13	74,9	0,873	68,2	1,047	5000	63,03	0,576	56,36	0,691
14	74,1	0,852	67,4	1,022	∞	63,00	0,575	56,33	0,690

Tabelle III. [1])

der Coefficienten k in der Formel $v = k\sqrt{r \,.\, s}$ nach Kutter und Grebenau, für 10 Kategorien nach Wandrauhigkeiten und Querprofilformen [2]).

Werthe des mittleren Radius oder der hydraul. Tiefe $\frac{a}{p} = r$	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
0,01	45,5	40,0	33,3	27,0	23,2	18,2	15,2	12,2	9,7	7,6
0,03	59,0	53,6	46,4	39,0	33,1	27,8	23,6	19,4	15,7	12,4
0,05	65,1	59,9	52,9	45,3	39,0	33,2	28,6	23,7	19,4	15,5
0,07	68,6	63,9	57,0	49,5	43,1	37,1	32,1	26,9	22,2	17,8
0,10	72,5	67,8	61,2	53,9	47,5	41,3	36,1	30,5	25,4	20,6
0,11	73,2	68,6	62,1	54,9	48,5	42,3	37,1	31,4	26,2	21,3
0,12	74,0	69,5	63,1	55,9	49,5	43,3	38,0	32,3	27,0	22,0
0,13	74,7	70,3	64,0	56,9	50,5	44,3	39,0	33,2	27,8	22,7
0,14	75,5	71,2	65,0	57,9	51,5	45,2	39,9	34,1	28,6	23,4

[1]) Cultur-Ingenieur, Bd. II, S. 15 und Grebenau, Taschenbuch für Bautechniker. Theil I, 6. Aufl. (1877), S. 500.

[2]) Die mit I.—X. bezeichneten Kategorien sind folgende:

Kateg. I. Glatt gehobelte Bretter, rechtwinkliges Profil, reiner Cement, halbkreisförmiges Profil.

„ II. Reiner Cement, rechtwinklig. Cement mit $\frac{1}{3}$ feinem Sand, halbkreisförmiges Profil.

„ III. Bretter, halbkreisförmiges Profil.

„ IV. Desgl., rechtwinkliges (trapezförmiges, dreieckiges etc.) Profil.

„ V. Kleine Canäle von behauenen Quadern und Backsteinen, rechtwinklige Profile.

„ VI. Bretter mit grober Leinwand bedeckt, mit aufgenagelten kleinen Latten, rechtwinklige Profile. Festgemachter Kies oder gutes Trockenmauerwerk, halbkreisförmiges Profil.

„ VII. Festgemachter Kies von 1 bis 2 Centimeter Dicke, Mauerwerk mit Cement bestochen, die Sohle schadhaft mit Schlamm bedeckt, Profil rechtwinklig. Trockenmauerwerk von abgerichteten Steinen, schadhaft, halbkreisförmig.

„ VIII. Festgemachter grober Kies, 3 bis $4\frac{1}{2}$ Centimeter groß, Profil rechtwinklig. Trockenmauerwerk von Bruchsteinen, schlecht unterhalten, Trapezprofil. Beschädigtes Mauerwerk, die Sohle mit Steinen und Schlamm bedeckt, rechtwinkliges Profil.

„ IX. Kleine Canäle in Erde, steiniger Boden und wenig Pflanzen, theils schlammig mit Gras. Mauerwerk schlecht unterhalten, mit Moos und Kräutern bedeckt.

„ X. Kleine Canäle in Erde, mit Pflanzen und Gras, auch felsig mit Steinwürfen.

Noch zwei andere von Kutter beigefügte Kategorien „geschiebführende Bäche und Flüsse", hält Grebenau für so unsicher, daß es auch dem Verfasser für angemessener erschien, diese (für jetzt) noch wegzulassen!

Tabelle III. Fortsetzung.

Werthe des mittleren Radius oder der hydraul. Tiefe $\frac{a}{p} = r$	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
0,15	76,3	72,0	65,9	58,9	52,5	46,2	40,9	35,0	29,4	24,1
0,16	76,8	72,5	66,5	59,6	53,2	46,9	41,6	35,6	30,0	24,6
0,17	77,3	73,2	67,1	60,3	53,9	47,6	42,3	36,3	30,6	25,2
0.18	77,8	73,7	67,8	60,9	54,7	48,3	43,0	36,9	31,2	25,7
0,19	78,3	73,3	68,4	61,6	55,3	49,1	43,7	37,6	31,8	26,3
0,20	78,8	74,9	69,0	62,3	56,1	49,8	44,4	38,3	32,4	26,8
0,25	80,4	76,7	71,1	64,7	58,6	52,3	47,0	40,8	34,8	28,9
0,30	82,0	78,5	73,2	67,0	61,0	54,9	49,5	43,2	37,1	31,0
0,35	83,0	79,7	74,6	68,6	62,7	56,7	51,3	45,0	38,8	32,6
0,40	84,0	80,8	76,0	70,1	64,4	58,4	53,0	46,7	40,4	34,1
0,45	84,8	81,7	77,0	71,3	65,8	59,8	54,4	48,1	41,8	35,4
0,50	85,5	82,5	77,9	72,4	66,9	61,1	55,8	49,5	43,2	36,7
0,55	86,0	83,2	78,7	73,3	67,9	62,2	57,0	50,7	44,4	37,8
0,60	87,6	83,8	79,5	74,2	68,9	63,3	58,1	51,8	45,5	38,9
0,65	87,0	84,3	80,1	74,9	69,7	64,2	59,0	52,8	46,4	39,8
0,70	87,5	84,8	80,7	75,6	70,5	65,1	59,9	53,8	47,4	40,7
0,75	87,9	85,2	81,2	76,2	71,2	65,8	60,7	54,6	48,2	41,5
0,80	88,2	85,6	81,7	76,8	71,9	66,5	61,5	55,4	49,0	42,3
0,85	88,5	86,0	82,2	77,4	72,5	67,2	62,2	56,2	49,8	43,1
0,90	88,8	86,4	82,6	77,9	73,0	67,8	62,9	56,9	50,5	43,8
0,95	89,0	86,7	83,0	78,3	73,5	68,4	63,5	57,6	51,2	44,4
1,00	89,3	87,0	83,3	78,7	74,0	69,0	64,1	58,2	51,8	45,0
1,50	.	.	.	.	.	.	.	.	56,1	49,4
2,00	.	.	.	.	.	.	.	.	60,3	53,7
2,50	.	.	.	.	.	.	.	.	62,7	56,2
3,00	.	.	.	.	.	.	.	.	65,0	58,7
3,50	.	.	.	.	.	.	.	.	66,7	60,4
4,00	.	.	.	.	.	.	.	.	68,3	62,1
4,50	.	.	.	.	.	.	.	.	69,5	63,4
5,00	.	.	.	.	.	.	.	.	70,6	64,8
5,50	.	.	.	.	.	.	.	.	71,6	65,8
6,00	.	.	.	.	.	.	.	.	72,5	66,8

Beispiel 1. Welche Wassermenge liefert ein Fluß von 12 Meter Breite, $1\frac{1}{2}$ Meter mittlerer Tiefe und von 15 Meter benetztem Umfange, wenn derselbe auf 250 Meter Länge ein Gefälle von 0,25 Meter hat?

Auflösung. Hier ist $a = 1,5 . 12 = 18^{\square m}$; $p = 12 + 2 . 1,5 = 15^m$, folglich $\frac{a}{p} = r = \frac{18}{15} = 1,20$. Ferner ist $\frac{h}{l} = s = \frac{0,25}{250} = 0,001$. Des verhältnißmäßig starken Gefälles wegen machen wir von der Bazinschen Formel Gebrauch, entnehmen aber $\frac{1}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{r}}}$ aus Tabelle I,

woselbst für Wände aus Erde, das Argument $r = 1,20$ ohne Weiteres $k = 41,8$ liefert, demnach sich ergiebt:

$$v = 41,8 \sqrt{1,2 \,.\, 0,001} = 41,8 \,.\, 0,0364 = 1^m,45, \text{ daher}$$

$$Q = 18 \,.\, 1,45 = 26,10 \text{ Cubikmeter.}$$

In der 5. Auflage (1875), S. 119 der Weisbach'schen Ingenieur-Mechanik, wird unter Benutzung der älteren Coefficientenwerthe, welche nicht Rücksicht auf die Rauhigkeit der Canalwände nehmen (ein zu großer Werth), nämlich

$$Q = 31,57 \text{ Cubikmeter}$$

gefunden.

Beispiel 2. Wie groß ist das Gefälle, welches ein in der Sohle 1,884 Meter breiter, 0,942 Meter tiefer und auf beiden Seiten mit einer Böschung von 45 Grad versehener Abzugsgraben auf 376,8 Meter Länge haben muß, damit sich das Wasser in demselben mit einer mittleren Geschwindigkeit von 0,314 Meter bewegt?

Auflösung. Zunächst berechnet sich:

$$a = 2 \square^m,66; \quad p = 4^m,55, \text{ daher}$$

$$\frac{a}{p} = r = \frac{266}{455} = 0,584.$$

Aus der Kutter-Grebenau'schen Tabelle (III, S. 416) (die hier den Bazin'schen Werthen deshalb vorzuziehen ist, weil ein sehr geringes Gefälle zu erwarten ist), läßt sich für die hier in Anwendung zu bringenden Kategorien IX. und X, als ein Mittelwerth für k der Chezy-Eytelwein'schen Formel $v = k \sqrt{r \,.\, s}$ entnehmen:

$$k = 41,65.$$

Daher sich ergiebt:

$$0,314 = 41,65 \sqrt{0,584 \,.\, s},$$

woraus folgt:

$$s = \frac{h}{l} = 0,00009732 \text{ Meter,}$$

demnach:

$$h = 0,00009732 \,.\, l = 0,00009732 \,.\, 376,8, \text{ d. i.}$$

$$h = 0,03667 \text{ Meter.}$$

Eytelwein findet statt dessen in seiner Hydraulik (2. Auflage, S. 162):

$$h = 0,02446 \text{ Meter.}$$

Berechnet man dieselbe Größe nach der Prony'schen Formel (S. 399)

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = r \,.\, s = 0,00004445 \,.\, v + 0,00030931 \,.\, v^2,$$

so erhält man

$$h = 0,0283 \text{ Meter.}$$

Da Eytelwein und Prony den Rauhigkeitszustand der Grabenwände unbeachtet lassen, so mußten die mittelst der betreffenden Formeln berechneten Gefälle zu klein und demnach für die practische Ausführung zu gering ausfallen.

Beispiel 3. Es ist die Wassermenge zu berechnen, welche pro

Secunde durch das Profil, Fig. 163, fließt, wobei $\frac{h}{l} = 0{,}0005$ bekannt ist und die in der Figur eingeschriebenen Maaße gegeben sind.

Fig. 163.

Auflösung. Offenbar ist hier die Gesammtaufgabe in zwei Fälle zu zerlegen, da sich zwei verschiedene Stromstriche, einer für das Trapez, der andere für das Dreieck, bilden.

Für das Trapezprofil von $1^m{,}6$ Tiefe ist:

$$a_1 = \frac{1{,}6}{2}(14 + 10) = 0{,}8 \cdot 24 = 19\square^m{,}2,$$

$$p_1 = 2{,}56 + 10{,}00 + 2{,}56 = 15^m{,}12.$$

Um nun den Unterschied zwischen den Resultaten der alten und neuen Formeln auch für diesen Fall kennen zu lernen, werde zuerst mit der Prony'schen Formel S. 399 gerechnet, d. h. mit

$$\frac{a_1}{p_1} \cdot \frac{h}{l} = r \cdot s = 0{,}00004445 \cdot v_1 + 0{,}00030931 \cdot v_1^2.$$

Aus dieser folgt zuerst:

$$v_1 = -0{,}07185 + \sqrt{0{,}005163 + 3233{,}43 \cdot r_1 s},$$

d. i. für das Trapezprofil, wo $r_1 = \frac{a_1}{p_1} = \frac{1920}{1512} = 1{,}269$ ist,

$$v_1 = -0{,}07185 + \sqrt{1{,}43122} = 1^m{,}36,$$

daher, wenn mit Q_1 die betreffende secundliche Wassermenge bezeichnet wird: $Q_1 = a_1 v_1 = 19{,}2 \cdot 1{,}36 = 26{,}112$ Cubikmeter.

Für das Dreieckprofil ist:

$$a_2 = 15 \cdot 0{,}35 = 5\square^m{,}25 \text{ und } p_2 = 15^m{,}003 \; \frac{a_2}{p_2} = \frac{5250}{15003} = r_2,$$

daher v_2, weil wieder $\frac{h}{l} = s = 0{,}0005$ angenommen werden kann, aus Prony's Formel:

$$v_2 = 0^m{,}5136 \text{ und folglich:}$$

$$Q_2 = a_2 v_2 = 5{,}25 \cdot 0{,}5136 = 2{,}696 \text{ Cubikmeter.}$$

Für die Wassermenge $= Q$ beider Profile erhält man daher:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 26{,}112 + 2{,}696 = 28{,}808 \text{ Cubikmeter.}$$

Die neuen Formeln anlangend, wird es, für gegenwärtigen Fall, angemessen sein, die Kutter-Grebenau'sche Tabelle (S. 416) zu benutzen und aus dieser Mittelwerthe für k der Chezy-Eytelwein'schen Formel $v = k\sqrt{r \cdot s}$ zu entlehnen, welche gleichzeitig den Kategorien IX. und X. entsprechen.

Für das Trapezprofil ist aber $\frac{a_1}{p_1} = r_1 = 1{,}269$, daher für das betreffende k_1 als genau genug angenommen werden kann: $k_1 = 50$

so daß erhalten wird:

$$v_1 = 50 \sqrt{1{,}269 \,.\, 0{,}0005} = 1^m{,}259,$$

folglich:

$$Q_1 = a_1 v_1 = 19{,}2 \,.\, 1{,}259 = 24{,}173 \text{ Cubikmeter.}$$

Für das Dreieckprofil ist:

$$\frac{a_2}{p_2} = r_2 = \frac{5{,}25}{30{,}006} = 0{,}1749.$$

Für letzteren Werth ist aber aus der bereits benutzten Tabelle (S. 416) der Coefficient k_2, als hinreichend genau zu entnehmen:

$$k_2 = 28,$$

so daß erhalten wird:

$$Q_2 = a_2 v_2 = k_2 a_2 \sqrt{r_2 \,.\, s}, \text{ d. i.}$$

$$Q_2 = 28 \,.\, 5{,}25 \sqrt{0{,}1749 \,.\, 0{,}0005}, \text{ folglich:}$$

$$Q_2 = 1{,}375 \text{ Cubikmeter.}$$

Die gleichzeitig durch beide Profile strömende Wassermasse ist nach den neuen Formeln sonach:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 24{,}173 + 1{,}375 = 25{,}548 \text{ Cubikmeter.}$$

Also 3,26 Cubikmeter weniger als nach Prony.

Beispiel 4.[1]) Es sollen die Dimensionen eines Entwässerungsgrabens bestimmt werden, der bei einem Trapezprofile mit einer Böschung (Dossirung) von 3 Basis auf 2 Höhe seiner Seitenwände, bei einem relativen Gefälle $\frac{h}{l} = s = \frac{1}{23333} = 0{,}0000428$, ferner bei einer mittleren Wassertiefe von $e = 1{,}884$ Meter, pro Secunde die constante Wassermenge von $Q = 9{,}27$ Cubikmeter abführt.

Auflösung. Unter Benutzung der Chezy-Eytelwein'schen Gleichung

$$Q = ak \sqrt{\frac{a}{p} \cdot s},$$

erhält man zur Lösung dieser Aufgabe:

$$(1) \quad \frac{Q^2}{k^2 \,.\, s} = \frac{a^3}{p}.$$

Bezeichnet dann e die Wassertiefe und d die Sohlbreite des Canales, so ist, mit Rücksicht auf die angegebene ($1\frac{1}{2}$füßige) Dossirung:

$$a = \frac{e}{2}(2x + 3e) \text{ und } p = x + e\sqrt{13},$$

folglich, wenn man die gegebenen Werthe substituirt:

$$(2) \quad a = 1{,}884x + 2{,}826 \text{ und } p = x + 3{,}605,$$

und nach (1):

$$(3) \quad \frac{(9{,}27)^2}{k^2} \cdot 23333 = \frac{(1{,}884x + 2{,}826)^3}{x + 3{,}605}.$$

Nimmt man hier k mit Eytelwein constant zu 50,90 (für Metermaaß)

---

[1]) Lahmeyer's Beispiel in Förster's Bauzeitung, Jahrg. 1852, S. 152, von diesem Ingenieur gewählt, um die Vorzüge seiner Formel (S. 401) vor der Prony's und Eytelwein's nachzuweisen.

an, so erhält man, nach Auflösung der betreffenden cubischen Gleichung:

$$x = 9{,}55 \text{ Meter.}$$

Lahmeyer berechnet dagegen, mit Hülfe der S. 401 mitgetheilten Gleichung:

$$x = 13{,}75 \text{ Meter.}$$

Diese Abweichung ist offenbar groß genug, um ein gerechtes Bedenken gegen die Richtigkeit beider Werthe zu erwecken.

Unter Benutzung der Ganguillet-Kutter'schen Formel für k, nämlich (S. 414):

$$k = \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{\sqrt{r}}}$$

wird allerdings die Lösung der Aufgabe noch umständlicher, jedoch dürfte es, für den vorliegenden practischen Zweck, nicht unangemessen sein, folgenden Weg einzuschlagen.

Man betrachtet den Lahmeyer'schen Werth $x = 13{,}75$ als eine Annäherung, berechnet damit a, p, r, k und v und untersucht schließlich, ob sich mit den erlangten Resultaten das verlangte secundlich abzuführende Wasserquantum $Q = 9{,}27$ Cubikmeter ergiebt[1]).

Zuerst erhält man hiernach:

$$a = 28^{\square m}{,}731 \text{ und } p = 17^{m}{,}355, \text{ daher}$$

$$r = 1{,}655.$$

Für in Erde ausgehobene Canäle und mit Berücksichtigung des angegebenen relativen Gefälles $\frac{h}{l} = s = 0{,}0000427$ findet sich dann:

$$k = \frac{100}{1 + \frac{1{,}5}{\sqrt{r}}} = 46{,}16,$$

ferner $v = 0^{m}{,}4997$ und folglich:

$$Q = av = 28{,}731 \,.\, 0{,}4997 = 14{,}36 \text{ Cubikmeter.}$$

Da dieser Werth viel zu groß ist, so schreiten wir zu einer neuen Rechnung, unter der Annahme von

$$x = 11{,}0 \text{ Meter.}$$

Dann ergeben sich folgende Werthe:

$$a = 23^{\square m}{,}55; \quad p = 14^{m}{,}605.$$

Ferner $r = \frac{a}{p} = 1{,}612$ und $k = 45{,}80$, folglich $v = 0^{m}{,}3805$ und daher:

$$Q = 8{,}961 \text{ Cubikmeter.}$$

welcher Werth wieder zu klein ist.

Bei Fortsetzung dieses Verfahrens läßt sich überhaupt nachstehende Tabelle entwerfen:

[1]) Ein noch anderer Weg wäre der, aus der gegebenen Wassertiefe $e = 1{,}884$ Meter, einen ersten Mittelwerth für r zu entnehmen, hiernach die Rechnung zu führen und nach und nach, durch Wiederholung dieses Verfahrens, dem wahren Werthe von r möglichst nahe zu kommen.

$x =$	13,75	12,00	11,50	11,25	11,00
$a =$	28□^{m},730	25,434	24,492	24,021	23,550
$p =$	17^m,355	15,605	15,105	14,855	14,605
$r =$	1,655	1,630	1,620	1,617	1,612
$k =$	46,16	46,00	45,90	45,87	45,80
v	0^m,4997	0,3840	0,3822	0,3814	0,3805
Q	Cubikmeter 14,360	9,770	9,368	9,161	8,961

Unter der Voraussetzung, daß die Lahmeyer'sche Formel weniger empfehlenswerth ist, als die von Ganguillet und Kutter, wäre es rathsam, die gesuchte Sohlbreite zwischen 11,25 und 11,50 Meter zu nehmen und hiernach die übrigen Profildimensionen zu berechnen.

§. 135.

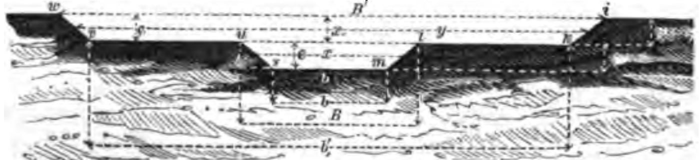
Prony's Entwässerungsaufgabe.

Prony hat seiner Zeit bei Gelegenheit seiner Arbeit über die berüchtigten Pontini'schen Sümpfe [1]), ein Entwässerungsprofil in Vorschlag gebracht, welches damals zu vielfachen Erörterungen Veranlassung gegeben hat und noch gegenwärtig ein beachtenswerthes Beispiel der practischen Hydrodynamik abgiebt.

Das betreffende Prony'sche Profil zeigt Fig. 164 [2]). Dasselbe soll in seinem mittleren Theile *usml* ein bestimmtes (normales) ver-



Fig. 164.



hältnißmäßig kleines Wasserquantum, sodann aber in dem erweiterten Profile *svwiklm* die Wassermassen der bekannten höchsten Anschwellungen abführen.

Hierzu hielt Prony folgende Verhältnisse für angemessen [1]): x die mittlere Breite $= \frac{B+b}{2}$ des unteren (normalen) Profiles gesetzt, sollte $e = \frac{1}{6}x$ sein, so daß:

---

[1]) Im früheren Kirchenstaate, südlich von Rom, ein Landstrich, der sich von Nettuno bis Terracina erstreckt.

[2]) Prony, „Description hydrographique et historique des Marais Pontins". Paris 1822. In dieser heute noch beachtenswerthen Schrift wird der genannte Gegenstand im X. Capitel der Einleitung behandelt.

$$a = e\left(\frac{B+b}{2}\right) = ex = \frac{x^2}{6},$$

folglich die Sohlbreite $\overline{sm} = b = 0{,}75x$ und $\overline{ul} = B = 1{,}25x$ wurde.

Für die mittlere Breite $= y$ des erweiterten Profiles setzte Prony $y = \frac{B_1 + b_1}{2} = 3{,}5 \,.\, x$, so daß für beide Profile gleiche Tiefe $= e$ vorausgesetzt, der Flächeninhalt des angeschwellten Profiles $= a_1$ ist:

$$a_1 = e \,.\, y = \frac{x}{6} \cdot \frac{7}{2} x = \frac{7}{12} x^2.$$

Der gesammte Wasserquerschnitt betrug hiernach:

$$a + a_1 = \frac{x^2}{6} + \frac{7}{12} x^2 = \frac{3}{4} x^2 = 0{,}75 \,.\, x^2.$$

Unter Voraussetzung, daß für beide Profile die Dossirung oder Böschung beträgt: 2 Basis bei 3 Höhe, ergiebt sich der gesammte Wasserperimeter zu:

$$p + p_1 = 3{,}9516 \,.\, x.$$

Substituirt man diese Werthe in die Prony'sche Formel S. 399, so erhält man:

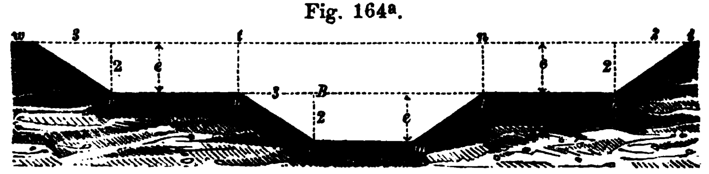
$$\text{I.} \quad \frac{0{,}75x^2}{3{,}9516x} \cdot s = 0{,}00004445 \frac{Q}{0{,}75\,x^2} + 0{,}0003091 \left(\frac{Q}{0{,}75\,x^2}\right)^2.$$

Ein Annäherungswerth x_1 berechnet sich demnach mittelst der Gleichung:

$$\text{II.} \quad x_1 = 0{,}310744 \sqrt[5]{\frac{Q^2}{s}}.$$

Behandelt man den Profilquerschnitt der Anschwellung nicht (wie Prony) als ein Ganzes, sondern in drei gesonderten Theilen, wovon der mittlere Theil durch die senkrechten Linien ln und ut Fig. 164[a], begrenzt wird[2]), so ergiebt sich, wenn man außerdem

Fig. 164[a].



$\overline{kl} = \overline{uv} = b_1 = 6e$ setzt, zunächst für das Profil *tusmln* der Flächeninhalt:

$$a = e\left(\frac{B+b}{2}\right) + Be,$$

d. i., weil vorher auch $\frac{B+b}{2} = x = 6e$ gesetzt wurde und eben so $B = 7{,}5 \,.\, e$, also $B \,.\, e = 7{,}5e^2$ ist:

$$a = 6e^2 + 7{,}5e^2 = 13{,}5 \,.\, e^2 = a_1 = a_2.$$

Eben so groß ist aber die Summe der beiden noch übrigen Anschwellungsprofile *tuvw* und *ikln*. Auf ähnlichem Wege erhält

---

[1]) a. a. O., Pag. 53 und 54.

[2]) Grashof, Theoretische Maschinenlehre. Bd. 1, S. 738 und 742.

man für die Wasserperimeter $p_1 = lmsu$ und $p_2 = ikl + uvw$, die Werthe:

$$p_1 = 8{,}10 \,.\, e \text{ und } p_2 = 15{,}6 e.$$

Aus vorstehenden Werthen ergiebt sich nun:

$$r_1 = \frac{a_1}{p_1} = \frac{13{,}5}{8{,}1} e = 1{,}666 e \text{ und}$$

$$r_2 = \frac{a_2}{p_2} = \frac{13{,}5}{15{,}6} e = 0{,}865 e.$$

Weiter ergiebt sich dann, aus der Ganguillet-Kutter'schen Tabelle (S. 414), $n = 0{,}025$ als Rauhigkeitscoefficienten angenommen und beachtet, daß $\frac{h}{l} = s = 0{,}0005187$ ist:

$$k_1 = \frac{66{,}1}{1 + \frac{0{,}652}{\sqrt{r_1}}} = \frac{66{,}1\sqrt{r_1}}{0{,}652 + \sqrt{r_1}} \text{ und}$$

$$k_2 = \frac{66{,}1}{1 + \frac{0{,}652}{\sqrt{r_2}}} = \frac{66{,}1\sqrt{r_2}}{0{,}652 + \sqrt{r_2}}.$$

Daher wird aus:

$$Q = a_1 v_1 + a_2 v_2 = a\,(v_1 + v_2) = a\sqrt{s}\,[k_1\sqrt{r_1} + k_2\sqrt{r_2}], \text{ d. i.:}$$

$$Q = 13{,}5 \,.\, e^2 \sqrt{s}\left[\frac{66{,}1\, r_1}{0{,}652 + \sqrt{r_1}} + \frac{66{,}1\, r_2}{0{,}652 + \sqrt{r_2}}\right],$$

demnach, wenn man die obigen Werthe von r_1 und r_2 substituirt:

$$\text{III.} \quad Q = 13{,}5 \,.\, e^3 \left\{\frac{66{,}1 \,.\, 1{,}666\sqrt{s}}{0{,}625 + 1{,}291\sqrt{e}} + \frac{66{,}1 \,.\, 0{,}865\sqrt{s}}{0{,}652 + 0{,}93\sqrt{e}}\right\}.$$

Da außer Q auch s als gegeben anzunehmen ist, so hat man hieraus e als einzige unbekannte Größe zu reduciren.

Beispiel. Welche Dimensionen hat man einem Abwässerungscanale zu geben, der bei 0,0005187 relativem Gefälle regelmäßig pro Secunde 4,6 Cubikmeter Wasser abzuführen hat, zugleich aber auch der bekannten höchsten Anschwellung aus dem betreffenden Flußgebiete von 1 Quadratmeile [1]) Größe, Genüge leisten muß. Beobachtet wurde als Maximum ein Niederschlag (Regenguß) von 6 Centimeter Höhe in 30 Stunden, eine Zeit, die noch hinreichen soll, sämmtliches Wasser zu entfernen.

Auflösung. Nimmt man an, daß $\frac{1}{3}$ des plötzlich niedergefallenen Wassers in den Erdboden zieht (was begreiflicher Weise nach Boden- und klimatischen Verhältnissen in jedem Falle verschieden sein wird), rechnet eine Quadratmeile gleich 55044634,8 Quadratmeter und beachtet, daß 30 Stunden = 108000 Secunden sind, so ist pro Secunde eine zufällige Wassermenge abzuführen von:

---

[1]) 1 preußischer Morgen = 180 Quadratruthen = 2553,224 Quadratmeter. 1 Hektare = 10000 Quadratmeter = 2,47114 engl. Acre = 1,73739 Wiener Joch.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{55044634,8}{108000} \cdot 0,06 = 20,4 \text{ Cubikmeter.}$$

Die überhaupt in Rechnung zu bringende Wassermenge ist demnach:

$$Q = 4,6 + 20,4 = 25,0 \text{ Cubikmeter.}$$

Hiernach liefert die Prony'sche Annäherungsformel, da $Q^2 = 25^2 = 625$ ist:

$$x_1 = 0,310744 \sqrt[5]{\frac{625}{0,0005187}} = 5^m,111,$$

so wie aus der genauen Formel:

$$x^5 - 15,05 \cdot x^2 - 3491,24 = 0, \text{ folgt:}$$

$$x = 5^m,227,$$

so wie, weil $e = \frac{x}{6}$ ist:

$$e = 0^m,871 \text{ Meter.}$$

Ferner berechnet sich sodann:

$$\begin{aligned} \text{die Sohlbreite } b &= 3^m,92, \\ B &= 6^m,531, \\ b_1 &= 16^m,987, \\ B_1 &= 19^m,601, \\ A = a + a_1 &= 20\square^m,4907, \\ v &= \frac{Q}{A} = 1^m,22. \end{aligned}$$

Nach der zweiten, jedenfalls allein richtigen Auffassung, wonach angenommen ist, daß das Wasser auf den Seitencanaltheilen *kl* und *uv* langsamer, als im mittleren Theile *nlmsut* fließt[1]), gestaltet sich die Berechnung von e folgendermaßen:

Es ist $Q = 25$, $s = 0,0005187$, daher aus Gleichung III. folgt:

$$25 = 13,5 \cdot e^3 \left\{\frac{2,507}{0,652 + 1,291\sqrt{e}} + \frac{1,301}{0,652 + 0,930\sqrt{e}}\right\}, \text{ oder}$$

$$25 = 13,5 \cdot e^3 \left\{\frac{1,941}{0,505 + \sqrt{e}} + \frac{1,40}{0,70 + \sqrt{e}}\right\}.$$

Hieraus ergibt sich $e = 0^m,952$, so wie die Prony'sche mittlere Breite $x = 5^m,712$, während sich die übrigen Dimensionen folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} b &= 0,75 \cdot x = 4^m,28; \\ B &= 1,25 \cdot x = 7^m,14; \\ b_1 &= x = 6 \cdot e = 5^m,712; \\ B_1 &= 3,75 \cdot x = 3,75 \cdot 5,712 = 21^m,42. \end{aligned}$$

Auch hier ergeben sich nach den neuen Formeln größere Dimensionen.

---

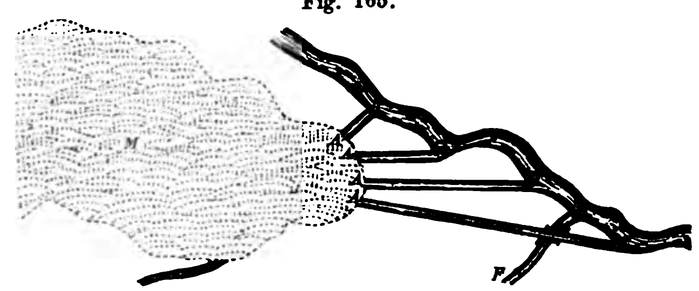
[1]) Die überdies gemachte Voraussetzung, die Rauhigkeit der Hochwasserfläche gleich der des Abwässerungscanales *lmsu* anzunehmen, ist in den meisten Fällen unzulässig, beispielsweise, wenn die Flächen *lk* und *uv* mit hohem Grase bewachsen oder andere Dinge vorhanden sind, wodurch die Rauhigkeit vergrößert wird.

§. 136.

Dubuat's Entwässerungsaufgabe.

Es sei AM, Fig. 165, ein trocken zu legendes Terrain, welches in seinem gegenwärtigen Zustande sein Wasser durch einen kurzen

Fig. 165.



Canal AB einem Flusse $BCDE$ zuführt und wobei eine gehörig frühe und vollständige Entwässerung der Fläche M durch Selbstabfluß niemals möglich ist, weil zu keiner Zeit das Wasser im Flusse BE niedrig genug steht.

Um nun sowohl die Bodenfläche AM für landwirthschaftliche Zwecke nutzbar machen zu können, als auch schädliche Ausdünstungen zu vermeiden, beabsichtigt man, einen anderen Canal AC oder AD, oder selbst AE auszuheben. Ein solcher Canal soll **erstens** das fragliche Terrain völlig trocken legen, was geschehen wird, sobald sich der Canal so weit längs des Flusses erstreckt, bis ein Punkt erreicht ist, woselbst die Oberfläche des höchsten Wasserstandes im Flusse noch unter dem Terrainboden liegt; **zweitens** soll aber auch das dabei auszuhebende Erdquantum das kleinstmöglichste, die Herstellung also die wohlfeilste sein, natürlich in letzterem Falle vorausgesetzt, daß nicht zu erbauende Brücken, wie wenn z. B. FG überschritten werden muß, oder andere Terrain- oder Besitzverhältnisse (theuere Ländereien) dazwischen treten.

Zur Auflösung der betreffenden Aufgabe werde vorausgesetzt, daß, ziemlich genau, die Canallänge AC gleich der Flußlänge BC, eben so AD gleich BD u. s. w. ist. Ferner bezeichne x die mittlere Breite und y die Länge des Canales, e den Wasserstand in letzterem über dem Boden des trocken zu legenden Terrains AM gemessen, ϱ die Tiefe dieses Bodens unter der Oberfläche des Flusses BE.

Bezeichnet man ferner mit η das absolute und mit $\frac{1}{\varepsilon}$ das relative Gefälle des Flusses, so ist $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\eta}{y}$, oder $\eta = \frac{y}{\varepsilon}$. Das absolute Gefälle des Canales muß also werden $\frac{y}{\varepsilon} - \varrho$, so wie endlich das relative desselben:

$$(1)\quad \frac{\frac{y}{\varepsilon} - \varrho}{y} = \frac{y - \varepsilon\varrho}{\varepsilon y}.$$

Außerdem erhält man nach den vorstehenden Bezeichnungen:

$$\frac{\text{Profilfläche}}{\text{Wasserperimeter}} = \frac{a}{p} = \frac{x \cdot e}{x + 2e},$$

so wie, wenn Q die pro Secunde abzuführende Wassermenge bezeichnet, wegen:

$$v = \frac{Q}{a} = k \sqrt{\frac{a}{p} \frac{h}{l}}$$

$$(2) \quad \frac{Q}{xe} = k \sqrt{\frac{x \cdot e}{x + 2e} \cdot \frac{y - \varepsilon\varrho}{\varepsilon y}}.$$

Zu dieser Gleichung kommt noch die Bedingung, daß man die geringstmögliche Erdmasse auszuheben wünscht, also:

$$(3) \quad \frac{xye = \text{Minimum, oder}}{xdy + ydx = 0.}$$

Aus (2) erhält man:

$$y = \frac{\varrho\varepsilon k^2 e^3 \cdot x^3}{k^2 e^3 x^3 - \varepsilon Q^2 (2e + x)},$$

oder wenn man $r\varepsilon e^3 k^3 = \alpha$, $k^2 e^3 = \beta$ und $\varepsilon Q^2 = \gamma$ setzt:

$$y = \frac{\alpha x^3}{\beta x^3 - \gamma (2e + x)},$$

so wie hieraus durch Differenziation:

$$(4) \quad dy = \frac{3\alpha x^2 dx \, [\beta x^3 - \gamma (2e + x)] - \alpha x^3 \, [3\beta x^2 dx - \gamma dx]}{[\beta x^3 - \gamma (2e + x)]^2}.$$

Jetzt (3) und (4) in (1) substituirt, reducirt und für α, β, γ wieder die ursprünglichen Werthe eingeführt, giebt:

$$0 = \frac{e^3}{\varepsilon} \left(\frac{k}{Q}\right)^2 x^3 - 3x - 8e,$$ [1]), oder

$$\text{I.} \quad 0 = x^3 - \frac{3\varepsilon Q^2}{k^2 e^3} x - \frac{8\varepsilon Q^2}{k^2 e^2}.$$

Beispiel. Die zu entwässernde Fläche AM habe eine Ausdehnung von 9284,075 hannov. Morgen = 2432,42765 Hectaren [2]) = 24324276,5 Quadratmeter. Regen und Zufluß der Quellen erzeugen darauf eine Wasserdecke von 36,6 Millimeter = 0,0366 Meter Dicke. Das relative Gefälle des Flusses BE sei $\frac{1}{3600}$ und der Boden AM liege $\varrho = 0{,}974$ Meter tiefer als die höchste Anschwellung des Flusses, endlich werde eine Tiefe des Abwässerungscanales von $e = 1{,}948$ Meter und von 5076 Meter Länge vorausgesetzt.

Wie hat man die Dimensionen des Canales zu wählen, damit die vorhandene Wassermasse in einem Tage = 86,400 Secunden abgeführt und der Canal so wohlfeil wie möglich wird?

Auflösung. Der gegebenen Fläche von 24324276□m,5 entspricht bei 0m,0366 Wasserhöhe ein Wasserquantum von 890268,52 Cubikmeter pro Tag, so daß die pro Secunde zu entfernende Wassermenge = Q beträgt:

$$Q = \frac{890268{,}52}{86400} = 10{,}30 \text{ Cubikmeter.}$$

---

[1]) Principes, Tome I, Pag. 282.

[2]) Ein Hannov. Morgen = 0,2621 Hektaren.

Nimmt man sodann mit d'Aubuisson[1]) für stark mit Gras und Wasserpflanzen besetzte Canalwände den Coefficienten k der Chezy-Eytelwein'schen Formel zu:

$$k = 36\,^{2})$$

an, so folgt für vorstehende Zahlenwerthe aus I:

$$0 = x^3 - \frac{3 \,.\, 3600\,(10{,}3)^2}{36^2 \,.\, (1{,}948)^3} \cdot x - \frac{8 \,.\, 3600\,(10{,}3)^2}{36^2 \,.\, (1{,}948)^2}, \text{ d. i.}$$

$$0 = x^3 - 119{,}59x - 621{,}27$$

und hieraus, für die gestellte Aufgabe genau genug:

$$x = 13 \text{ Meter.}$$

Ferner folgt:

$$v = \frac{Q}{x \,.\, e} = \frac{10{,}3}{13 \,.\, 1{,}948} = \frac{10{,}3}{25{,}324} = 0{,}406 \text{ Meter.}$$

Daher, wenn $p = 17{,}0$ Meter angenommen wird:

$$\frac{h}{l} = \frac{v^2}{k^2}\frac{p}{a} = \frac{(0{,}406)^2}{36^2} \cdot \frac{17}{25{,}324} = 0{,}0000855,$$

folglich, wenn $l = 5076$ Meter ist:

$$h = 0{,}0000855 \,.\, 5076 = 0{,}434 \text{ Meter.}$$

Zur Probe kann man auch das relative Gefälle des Canales aus (1) (S. 427) berechnen, wodurch man erhält:

$$\frac{h}{l} = \frac{\frac{y}{\varepsilon} - \varrho}{y} = \frac{\frac{5076}{3600} - 0{,}974}{5076} = 0{,}0000858,$$

eine Uebereinstimmung, die (für practische Zwecke) als hinreichend bezeichnet werden muß.

Zusatz 1. Um ein Urtheil über die Geschwindigkeitsveränderungen bei Anschwellungen, oder verschiedenen Wasserständen e und e_1 in demselben Canale abzugeben, setzt man sehr oft $e = \frac{a}{p}$, $e_1 = \frac{a_1}{p_1}$ und findet mittelst der Chezy-Eytelwein'schen Formel beziehungsweise:

$$v = k\sqrt{e\frac{h}{l}} \text{ und } v_1 = k_1\sqrt{e_1\frac{h_1}{l}},$$

nimmt ohne Weiteres $h = h_1$ an, d. h. setzt voraus, daß sich bei verschiedenen Wasserständen die Gefälle nicht ändern, und schreibt:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{k_1}{k}\sqrt{\frac{e}{e_1}},$$

oder auch genau genug ($k_1 = k$):

$$(1) \quad \frac{v}{v_1} = \sqrt{\frac{e}{e_1}}.$$

Eben so setzt man beziehungsweise $Q = av = kbe\sqrt{e\frac{h}{l}}$ und

[1]) Annales des Ponts et Chaussées (1841, 2), Pag. 255.

[2]) Prof. Wagner in Braunschweig nahm für eine aus Wiesenboden bestehende Thalsohle, die mit Pflanzen bewachsen ist, (nach Kutter'schen Theorien) $k = 35{,}6$. Man sehe hierüber das Protokoll der 85. Hauptversammlung des Sächs. Ingen.- und Archit.-Vereins, vom 9. Mai 1875, S. 32.

$Q_1 = a_1 v_1 = k_1 bte \sqrt{e_1 \frac{h}{l}}$ und findet:

$$(2) \quad \frac{Q}{Q_1} = \frac{e\sqrt{e}}{e_1\sqrt{e_1}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{e}{e_1}.$$

Lahmeyer (Förster's Bauzeitung, Jahrg. 1852, S. 153) empfiehlt statt (1):

$$(3) \quad \frac{v}{v_1} = \sqrt[3]{\frac{e^2}{e_1^2}}.$$

Noch andere derartige Schlüsse lassen sich nach den Formeln von Bazin, Hagen, Kutter u. A. bilden. Welchen geringen Werth alle solche Formeln, selbst für die gewöhnlichste Praxis, haben, bedarf wohl keiner Erörterung. Durchaus unerwiesen ist vor Allem die Annahme $h = h_1$.[1])

Zusatz 2. Bei der Angabe von Canaldimensionen, wobei das abzuführende Quantum aus der Menge atmosphärischer Niederschläge (Regen, Schnee, Hagel) annähernd berechnet werden muß, hat man vor Allem das Stromgebiet eines Flusses mit Hülfe guter Karten zu ermitteln und sodann aus entsprechenden Beobachtungsresultaten über Niederschläge und Verdunstung in dem betreffenden Terrain, die übrig gebliebene, also abzuführende Wassermenge zu berechnen. In den meisten Fällen kann man letztere zu $\frac{1}{3}$ des gesammten Niederschlages in Anschlag bringen[2]). In Marschgegenden und eingedeichten Niederungen ist überdies auf das zuweilen über die Deiche laufende Wasserquantum, so wie besonders auf das aus dem Boden und den Bedeichungen hervordringende Qualm- und Kuverwasser Rücksicht zu nehmen.

So rechnete Blohm[3]), beispielsweise für die Elbmarschen, im Mittel die ganze Niederschlagshöhe vom 1. Januar bis zum letzten April 10,2 Pariser Zoll oder 276 Millimeter. Hiervon ab, für gleichen Zeitraum und für dieselbe Gegend 127 Millimeter für Verdunstung des Wassers. Dazu wieder an Kuverwasser 143 Millimeter, so daß sich die zu entfernende Wasserdecke berechnet zu:

+ 276	Millimeter	Niederschlag.
— 127	„	Verdunstung.
+ 149	„	
+ 143	„	Kuverwasser.
292	Millimeter.	

---

[1]) Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst. Erster Band. Zweiter Theil (Dritte Auflage, 1871), S. 199.

[2]) Nach van Bebber (Die Regenverhältnisse Deutschlands. München 1877, S. 27) kann man für ganz Deutschland eine mittlere Regenmenge von 709,3 Millimeter annehmen: für das norddeutsche Tiefland 612,8 Millimeter, für die mitteldeutschen Gebirgslandschaften 690,2 Millimeter und für das süddeutsche Tiefland 824,8 Millimeter. Für die Stadt Hannover beobachtete Prof. Begemann, während der Jahre 1875, 1876 und 1877, die Regenhöhen beziehungsweise zu 677,8, 628,8 und 678,6 Millimeter. Der Mittelwerth ist folglich 661,73 Millimeter.

[3]) Ueber die Abwässerung der Marschen durch Dampfkraft etc. Hamburg 1846, S. 34 ff.

Um wenigstens über die Vertheilung der Regenmenge in zeitlicher Beziehung, in Bezug auf die Provinz Hannover und Oldenburg, Auskunft geben zu können, entnehmen wir dem unten notirten van Bebber'schen Buche (S. 40 und 41) nachstehende Tabelle (Millimeter vorausgesetzt):

Anzahl der Beobachtungs-stationen	Dec.	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Jahressumme.
5	8,49	7,06	5,71	6,14	5,67	7,06	8,46	9,67	12,11	11,07	9,39	9,14	718,4
7	8,38	6,75	5,91	6,92	6,46	8,20	10,55	11,93	11,19	8,43	7,57	7,72	662,1

Die umfänglichsten Beobachtungen über Niederschlag und Verdunstung sind wohl die auf Zwanenburg in den Jahren 1743 bis 1841 angestellten, welche man vollständig für jeden Monat in den Nieuwe Verhandelingen van het Bataafsch Genootschap IX, 1. Stuck, findet und wovon hier die Mittelwerthe der fast hundertjährigen Beobachtungen folgen.

Die Maaße sind Millimeter													
	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.	Summa im Jahre
Niederschlag in Millimetern	37,82	37,10	36,21	37,71	39,61	53,04	68,36	75,41	71,68	78,63	70,17	51,47	657,21
Verdunstung in Millimetern	8,28	14,49	34,79	60,60	82,91	94,92	94,89	82,47	54,89	51,59	17,92	13,32	591,07
Niederschlag weniger Verdunst.	+29,54	+22,61	+ 1,42	−22,89	−43,30	−41,88	−26,53	− 7,06	+16,79	+47,04	+52,25	+38,15	+ 66,14

Vorstehende Notizen mögen durch folgende Literaturangaben gleichsam eine Vervollständigung erfahren:

Lahmeyer, Ueber die Consumtionsverhältnisse der Weser, Elbe und Ems und deren Nebenflüsse bei den niedrigsten und höchsten Wasserständen. Zeitschrift des Hannov. Archit.- und Ingen.-Vereins, Jahrg. 1859, S. 229. — Möllendorf, Regenverhältnisse Deutschlands und die Anwendbarkeit der Regenbeobachtungen bei Ent- und Bewässerungen und gewerblichen Anlagen. Görlitz 1862. Insbesondere S. 168 und 174. — Prestel, Die Aenderung des Wasserstandes der Flüsse und Ströme in der jährlichen Periode etc. Zeitschrift des Hannov. Archit.- und Ingen.-Vereins, Jahrg. 1864, S. 412. — Treuding, Ueber Ent- und Bewässerung der Ländereien. Ebendaselbst, Jahrg. 1864, S. 473 und Jahrg. 1865, S. 25, 174 und 412. — Hess, Die Entwässerung des Wietzenbruchs (in der Provinz Hannover) und die Bewässerung durch Leinewasser. Im Cultur-Ingenieur, Bd. 2 (1869), S. 1 bis mit 71. — v. Kaven, Ueber einige empirische Verfahrungsarten, die Durchflußweite von kleineren Brücken aus der Größe des Niederschlagsgebietes zu bestimmen. (Eine fleißige, mit vielen Zahlenbeispielen, unter Benutzung der neuen Darcy-Bazin'schen Formeln, begleitete Arbeit.) In dem Werke „Der Wegbau“. Hannover 1870, S. 420 ff. — van Bebber, Die Regenverhältnisse Deutschlands. München 1877.

§. 137.

Vortheilhafteste Canalprofile.

Aus der einfachen Betrachtung irgend einer der bis jetzt für die Bewegung des Wassers in Canälen aufgestellten Formeln, ergiebt sich sofort, daß der Widerstand des Bettes, unter sonst gleichen Umständen, zu einem Minimum wird, sobald man Profile wählt, welche beim größten Flächeninhalte den kleinsten Wasserperimeter besitzen. Fänden sich daher nicht practische Hindernisse in der Ausführung, so müßten das vielseitige Polygon und der Halbkreis die vor Allem zu empfehlenden Profile abgeben. Da dies jedoch überall da nicht der Fall sein kann, wo der Canal im Erdboden unter Voraussetzung einer bestimmten Anlage auszuheben ist, so hat man die ganze Frage (vom mathematischen Standpunkte aus) nach der Lehre von den Eminenzien der Functionen zu beantworten.

Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen und Einführung eines Böschungswinkels $= \varphi$, ist:

$$a = \frac{e}{2}(B + b);\ (1)\ p = b + \frac{2e}{\sin\varphi},$$

oder, weil $B = b + 2e \cdot \operatorname{cogt}\varphi$ ist, ergiebt sich auch:

$$a = e\,(b + e \operatorname{cogt}\varphi), \text{ so wie}$$

$$(2)\quad \frac{a}{e} = b + e \operatorname{cogt}\varphi \text{ und}$$

$$(3)\quad \frac{a}{e^2} = \frac{b}{e} + \operatorname{cotg}\varphi.$$

Ferner erhält man aus der Verbindung von (1) und (2):

$$p = \frac{a}{e} - e \operatorname{cotg} \varphi + \frac{2e}{\sin \varphi}.$$

In Bezug auf e, als unabhängige Variable, wird dieser Ausdruck ein Minimum für:

$$(4) \quad \frac{a}{e^2} = \frac{2}{\sin \varphi} - \operatorname{cotg} \varphi = \frac{2}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi},$$

d. i. für:

$$\text{I.} \quad e = \sqrt{\frac{a \sin \varphi}{2 - \cos \varphi}}.$$

Aus der Verbindung von (3) mit (4) folgt noch:

$$\frac{b}{e} + \operatorname{cotg} \varphi = \frac{2}{\sin \varphi} - \operatorname{cotg} \varphi, \text{ das giebt:}$$

$$\text{II.} \quad \frac{b}{e} = 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi.$$

Endlich giebt noch (3):

$$\text{III.} \quad e = \sqrt{\frac{a}{\frac{b}{e} + \operatorname{cotg} \varphi}}.$$

Für $\varphi = 90°$, d. h., wenn die Canalwände senkrecht auf dem Boden stehend angeordnet werden können, ist endlich nach II:

$$\text{IV.} \quad b = 2e.$$

Zusatz. In vielen practischen Fällen kann man ein Canalprofil nicht nach vorstehenden mathematischen Regeln abmessen. Zuweilen ist, wegen der Terrainverhältnisse, die Anlage eines breiteren Canales wohlfeiler als die eines engeren[1]), oft folgt man auch dem Satze, daß je größer die fortzuleitende Wassermasse ist, um so breiter müsse der Canal im Verhältniß zur Tiefe werden. Aus letzterem Grunde nimmt z. B. Redtenbacher[2]) für Fabrikcanäle, welche große Aufschlagwassermengen zuführen, das Verhältniß $\frac{b}{e}$ nicht constant, sondern läßt es mit der Größe des Querschnittes wachsen. Für Metermaaß setzt derselbe:

$$\frac{b}{e} = 2{,}7 + 0{,}9 \,.\, a.$$

und führt die betreffenden Dimensionsberechnungen mit dieser Gleichung und der vorher unter III. entwickelten aus.

Oft ist aber auch eine Vergrößerung der Canalbreite von großem Nachtheil, z. B. wenn die Aushebung desselben in gutem, culturfähigen Boden geschehen muß. In einem solchen Falle wäre es vortheilhafter, die Tiefe zu vergrößern, weil damit zugleich der Vortheil des geringeren Pflanzenwuchses gewonnen würde. Canäle mit großer Wassertiefe empfehlen sich in kalten Gegenden auch zur Fortleitung des Aufschlag-

---

1) Hagen, Wasserbaukunst. II. Theil, 3. Bd., S. 522.
2) Resultate für den Maschinenbau. 3. Aufl., S. 125.

wassers für Wasserräder, weil sodann die Eisbildungen von geringerem Nachtheile sind.

Bei in Erde ausgehobenen Canälen für letztgenannte Zwecke (Fabrikcanäle), nimmt man in der Regel eine Wassergeschwindigkeit $v = 0^m,4$ bis $0^m,8$ an, sorgt jedoch dabei, daß die Querschnitte nicht zu groß werden, was die Wahl innerhalb der bemerkten Grenzen bestimmt, zuweilen aber auch Veranlassung werden kann, daß man sie überschreitet, d. h. die Geschwindigkeit größer nimmt.

Beispiel 1. Es ist nach den mathematischen Regeln das vortheilhafteste Profil eines Canales unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß derselbe pro Secunde eine Wassermenge von 2 Cubikmeter fortleitet, ein relatives Gefälle 0,0012 besitzt und den Ufern eine $1\frac{3}{4}$fache Anlage gegeben werden soll?

Auflösung. Die Forderung einer $1\frac{3}{4}$fachen Anlage liefert sofort: $\operatorname{cotg} \varphi = 1{,}75$, d.i. $\varphi = 29°45'$, also $\frac{1}{2}\varphi = 14°52'30''$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = 0{,}2656$, daher nach II:

$$\frac{b}{e} = 2 \,.\, 0{,}2656 \text{ und}$$

$$b = 0{,}5312 \,.\, e,$$

so wie ferner folgt:

$$B = 4{,}0312 \,.\, e,$$

$$a = 2{,}2812 \,.\, e^2 \text{ und}$$

$$\frac{a}{p} = 0{,}5 \,.\, e^2.\,^{1})$$

Nimmt man schätzungsweise $e = 1{,}0$ Meter an, so erhält man:

$$\frac{a}{p} = r = 0^m{,}50,$$

welchem Werthe, nach der Bazin'schen Tabelle S. 413 (die hier des starken relativen Gefälles wegen zu empfehlen ist), der Coefficient $k = 32$ (für Erdwände) entspricht, so daß man für die Geschwindigkeit $= v$ erhält:

$$v = k \sqrt{r \,.\, s} = 32 \sqrt{0{,}5 \,.\, 0{,}0012} = 0^m{,}784.$$

Da sich ferner a berechnet zu

$$a = 2{,}281 \text{ Quadratmeter},$$

---

[1]) Es läßt sich nämlich leicht nachweisen, daß:

$$p = 2e \left[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1}{\sin\varphi}\right] \text{ ist.}$$

Da nun a gefunden wurde zu:

$$a = e^2 \left(\frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi}\right), \text{ so folgt}$$

$$\frac{a}{p} = r = \frac{e}{2}\left[\frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi + 1}\right] = \frac{e}{2}\left[\frac{2 - \cos\varphi}{1 + 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\right], \text{ d. i.}$$

$$\frac{a}{p} = r = \frac{e}{2}.$$

so gäbe die Schätzung

$$Q = av = 2,281 \,.\, 0,784 = 1^{cm},788.$$

Da dieser Werth zu klein ist, so rechnen wir ein zweites Mal für die Annahme $e = 1,1$ Meter, so daß $\frac{a}{p} = \frac{e}{3} = 0,51$ und daher (wieder nach Bazin's Tabelle) $k = 32,3$, somit

$$v = 32,3 \sqrt{0,51 \,.\, 0,0012} = 0^{m},795$$

folgt, so daß sich, wegen $a = 2,2812 \,.\, (1,05)^2 = 2^{\square m},515$ berechnet:

$$Q = 2,515 \,.\, 0,795 = 2^{cm},090.$$

Man wird also für die practische Ausführung nehmen:

$$e = 1^{m},10,$$
$$b = 0^{m},584,$$
$$B = 4^{m},434.$$

d'Aubuisson berechnet für dasselbe Beispiel[1]), aus einer Gleichung vom 5ten Grade, $e = 0^{m},8689$, räth jedoch, für die practische Ausführung $e = 1^{m},20$ zu nehmen, so wie $b = 0^{m},462$ und $B = 4^{m},662$.

Mit Zuziehung der Redtenbacher'schen Erfahrungsformel, hätte man, unter Annahme einer mittleren Geschwindigkeit von $v = 0^{m},6$, erhalten:

$$Q = \frac{2}{0,6} = 3,33 \;\square\text{Meter},$$

folglich:

$$\frac{b}{e} = 2,7 + 0,9 \,.\, \frac{10}{3} = 5,70,$$

und aus III:

$$e = \sqrt{\frac{3,33}{5,70 + 1,75}} = \sqrt{\frac{333}{745}} = 0^{m},668,$$

daher:

$$b = 5,7 \,.\, 0,668 = 3^{m},81.$$

Beispiel 2. Welche Dimensionen würde der bereits §. 134, S. 420, Beispiel 4, berechnete Abwässerungscanal mit Zuziehung der Redtenbacher'schen Erfahrungsformel $\frac{b}{e} = 2,7 + 0,9 \,.\, a$ erhalten?

Auflösung. Es ist $Q = 9,27$ Cubikmeter. Nimmt man die mittlere Geschwindigkeit zu $v = 0^{m},5$, an so folgt zunächst:

$$a = \frac{Q}{v} = \frac{9,27}{0,5} = 18^{\square m},54,$$

sodann $\frac{b}{e} = 2,7 + 0,9 \,.\, 18,54 = 19,386$ und, wegen $\cot\varphi = \frac{3}{2}$, ferner:

$$e = \sqrt{\frac{18,54}{19,386 + \frac{3}{2}}} = 0^{m},9421.$$

Hiernach berechnet sich $b = 19,386 \,.\, e = 18^{m},26$.

Die vorgeschriebene Wassertiefe von $e = 1^{m},884$ ist dann naturgemäß nicht vorhanden.

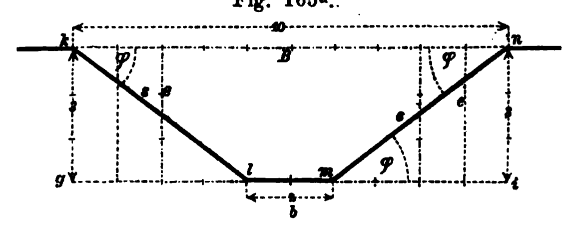
---

[1]) Traité d'Hydraulique. Seconde Édition, Pag. 138.

Beispiel 8. Einem kleinen, in Erde auszuführenden Bewässerungscanale beabsichtigt man das von Eytelwein vorgeschlagene, in Fig. 165ª, skizzirte Profil zu geben, (welches nach ihm hinlängliche Dossirung und dabei den möglichst kleinsten Umfang haben soll). Hierzu soll sich die Sohlbreite b, zur größten Breite B und zur Tiefe e wie 2 : 10 : 3 verhalten. Pro Secunde sind $Q = 0{,}40$ Cubikmeter Wasser abzuführen, während ein relatives Gefälle $\frac{h}{l} = s = 0{,}0010$ gefordert wird. Welche Dimensionen muß das Profil erhalten?

Auflösung. Bezeichnet man die Höhe des rechtwinkligen Profiles,

Fig. 165ª.



d. i. $k\bar{g} = \overline{ni}$ mit e, so erhält man:

Die obere Breite . . $B = \frac{10}{3} e$,
" untere " . . $b = \frac{2}{3} e$,
den Wasserperimeter $p = 4 e$ und
" Flächeninhalt . . $a = 2 e^2$,

daher aus der Chezy-Eytelwein'schen Formel:

$$Q = ak \sqrt{\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l}},$$

durch Einsetzung vorstehender allgemeiner Werthe und Reduction der Gleichung auf e:

$$e = \sqrt[5]{\frac{Q^2}{2 \cdot sk^2}}.$$

Entlehnt man für die Grenze $r = 0{,}25$ und $0{,}30$ der Bazin'schen und Kutter-Grebenau'schen Tabelle, S. 416, approximativ den Werth $k = 31$, so erhält man mittelst letzterer Formel:

$$e = \sqrt[5]{\frac{(0{,}4)^2}{2 \cdot 0{,}001 \cdot 961}} = 0{,}6082 \text{ Meter.}$$

Da der gewählte Coefficient $k = 31$ der Kategorie X. der Kutter-Grebenau'schen Tabelle einem mittleren Radius $r = 0{,}30$ entspricht, so ergiebt sich auch die mittlere Geschwindigkeit v zu:

$$v = 31 \sqrt{s \cdot r} = 31 \sqrt{0{,}001 \cdot 0{,}3} = 0^m{,}536.$$

Da sich ferner $a = 2e^2 = 0^{\square m}{,}37$ berechnet, so erhält man (als Proberechnung):

$$Q = av = 0{,}37 \cdot 0{,}536 = 0{,}39664 \text{ Cubikmeter,}$$

eine für die Praxis hinreichende Uebereinstimmung mit $Q = 0{,}4$ Cubikmeter.

---

[1]) Mechanik und Hydraulik. Zweite Auflage, S. 166.

Für die verlangten Canaldimensionen findet man schließlich:

$$B = \frac{10}{3} e = \frac{6,082}{3} = 2^m,027;$$

$$b = \frac{2}{3} e = \frac{2}{3} \, . \, 0,6082 = 0^m,405;$$

$$p = 4 \, . \, 0,6082 = 2^m,4328.$$

Bei größeren Wassermengen fällt die Tiefe des Profiles nach Eytelwein und daher auch die mittlere Geschwindigkeit zu groß aus, weshalb dann die Verfahrungsweisen der vorhergehenden zwei Beispiele in Betracht zu ziehen sind[1]).

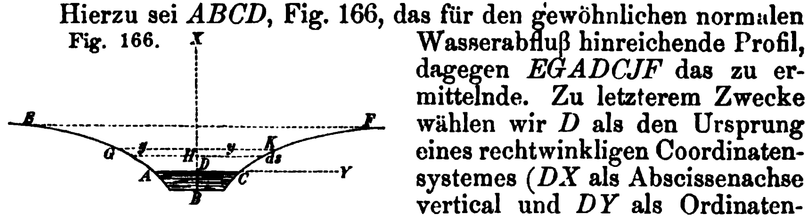
§. 138.

Anschwellungsprofil mit gleichbleibender mittlerer Geschwindigkeit.

Als ein mindestens nicht uninteressanter Gegenstand mag hier noch die Aufgabe Platz finden, wie man das Querprofil eines Canales einzurichten haben würde, wenn bei vorkommenden Anschwellungen, also zunehmenden Wassertiefen (Peilhöhen), die mittleren Geschwindigkeiten stets dieselben blieben und damit Nachtheile für Schiffahrt und Haltbarkeit der Ufer vermieden werden sollten.

Hierzu sei $ABCD$, Fig. 166, das für den gewöhnlichen normalen Wasserabfluß hinreichende Profil, dagegen $EGADCJF$ das zu ermittelnde. Zu letzterem Zwecke wählen wir D als den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes (DX als Abscissenachse vertical und DY als Ordinatenachse horizontal) und setzen für einen Punkt K der Begrenzungscurve x, $DH = x$ und $HK = y$, das betreffende Längenelement des Bogens $CF = ds$, so wie endlich $DC = DA = b$.

Fig. 166.



Die Hauptbedingung der Auflösung folgt ohne Weiteres aus der Formel $v = k \sqrt{\frac{h}{l} \cdot \frac{a}{p}}$, indem man setzt:

$$\frac{h}{l} \cdot \frac{a}{p} = \text{Const.},$$

oder unter der Annahme, daß $\frac{h}{l}$ auch constant ist (?) und mit Beachtung der gewählten Bezeichnungen:

$$\frac{a}{p} = \frac{2ydx}{2ds} = r,$$

wobei r stets aus dem normalen Profile $ABCD$ zu ermitteln ist.

Aus letzterer Gleichung findet sich, indem man

---

[1]) Für betreffende Zahlenbeispiele sehe man auch Grebenaus's Taschenbuch für Bautechniker. Erster (theoretischer) Theil. Sechste Auflage (1877), S. 508.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

setzt:

$$dx = \frac{c \cdot dy}{\sqrt{y^2 - c^2}},$$

so wie hieraus:

$$x = c \operatorname{Lgnt}(y + \sqrt{y^2 - c^2}) + A.$$

Zur Bestimmung der Constante A beachte man, daß $y = b$ wird, wenn man $x =$ Null setzt, daher das bestimmte Integral giebt:

$$x = c \{\operatorname{Lgnt}(y + \sqrt{y^2 - c^2}) - \operatorname{Lgnt}(b + \sqrt{b^2 - c^2})\}.$$

Woltmann[1]), der nach unserem Wissen gegenwärtige Aufgabe zuerst löste, bezweifelt selbst unter allen Umständen die Vortheile derartiger Profile, wenn sie auch sonst streng practisch ausführbar wären, weil der seichten Ufer wegen der Schiffahrt eher Nachtheile wie Vortheile gebracht werden könnten, auch eine größere mittlere Geschwindigkeit die für die Schiffahrt verlorene Anschwellungszeit möglichst verkürzt, der dabei nothwendigen großen Terrainfläche zu beiden Seiten des Hauptstromstriches noch gar nicht zu gedenken. Ganz anders gestaltet sich indeß die Frage in Fällen, wo leicht angreifbare (sandige) Ufer von großen Geschwindigkeiten weggerissen werden können oder es der Schiffahrt bei trockenen Jahreszeiten an Wasser mangelt. Unter solchen Umständen beklagt Woltmann nun, daß die Curven des Ueberschwemmungsprofiles schwer auszuführen wären, und glaubt schließlich, daß polygonale Profile (wie das von Prony, Fig. 164, vorgeschlagene) beinahe dieselben Dienste thun würden.

§. 139.

Durchstiche.

Canäle oder Gräben, deren Achsen in Krümmungen liegen, sind oft in völlig geradlinige Strombetten umzuändern, d. h. es sind Durchstiche zu bilden. Hierdurch wird das Angreifen der Ufer vermindert und nachtheiligen Ablagerungen vorgebeugt, besonders aber das relative Gefälle vergrößert und eine Senkung des Wasserspiegels erzeugt, welche namentlich für Entwässerungen von bedeutendem Nutzen sein kann.

Zur Beurtheilung des Erfolges eines derartigen Durchstiches und Berechnung der vorbemerkten Größen läßt sich, unter Voraussetzung, daß der ursprüngliche Canal oder Graben nur Krümmungen von großen Halbmessern und dabei sanfte Uebergänge besitzt, bei abermaligem Mangel eines besseren, die Chezy-Eytelwein'sche Formel benutzen[2]).

[1]) Beiträge zur Schiffbarmachung der Canäle. S. 60 etc.

[2]) Wir nehmen Gelegenheit, folgendes Werk zum Nachlesen zu empfehlen, dem auch das Zahlenbeispiel dieses Paragraphen entlehnt ist: Blohm (Wasserbaudirector), „Versuch einer näheren Erörterung der Mittel, durch welche der Handelsverkehr in den Elbgegenden erhalten und gehoben werden kann". Göttingen 1841, S. 70.

Da die Wassermengen der gekrümmten und geraden Strecke gleichbleibend anzunehmen sind, so erhält man ohne Weiteres:

$$ka \sqrt{\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l}} = k_1 a_1 \sqrt{\frac{a_1}{p_1} \cdot \frac{h}{l_1}},$$

wo sich die mit dem Index versehenen Buchstaben auf den Durchstich beziehen.

Annäherungsweise, $k = k_1$ gesetzt, und für Canäle und Gräben, wobei die (als gleichbleibend anzunehmenden) Breiten b, die mittleren Tiefen e und e_1 sehr bedeutend übertreffen, ergiebt sich aus dieser Gleichung (da selbstverständlich $h = h_1$ ist):

$$be \sqrt{\frac{be}{b + 2e} \cdot \frac{1}{l}} = be_1 \sqrt{\frac{be_1}{b + 2e_1} \cdot \frac{1}{l_1}}, \text{ und}$$

$$\text{I.} \quad e_1 = e \sqrt[3]{\frac{b + 2e_1}{b + 2e} \cdot \frac{l_1}{l}}.$$

Als einen Annäherungsausdruck, indem nahe genug $b + 2e_1 = b + 2e$ vorausgesetzt wird, kann man hierbei benutzen:

$$\text{II.} \quad e_1 = e \sqrt[3]{\frac{l_1}{l}}.$$

Beispiel. Bei dem (Hannoverschen) Flusse Ilmenau und zwar für die Abtheilung von Lüneburg bis zur Netze, beträgt die Normalbreite 61 Fuß Hannov. ($17^m,812$), die Länge im Fahrstriche gemessen 55340 Hannov. Fuß ($16159^m,28$), das absolute Gefälle auf diese Länge 12,427 Fuß ($3^m,628$), die geringste mittlere Wassertiefe 28 Zoll = 2,83 Fuß ($0^m,680$), es fragt sich, welche Senkung der Wasserspiegel erfährt, wenn man die bemerkte Längenstrecke mittelst eines geradlinigen Durchstiches auf 44200 Fuß ($12906^m,4$) herabbringt?

Auflösung. Zuerst liefert II:

$$e_1 = 28 \sqrt[3]{\frac{44200}{55400}} = 25{,}969 \text{ Zoll} = 2{,}164 \text{ Fuß } (0^m{,}631), \text{ sodann aus I:}$$

$$e_1 = 28 \sqrt[3]{\left(\frac{61 + 2 \,.\, 2{,}164}{61 + 2 \,.\, 2{,}33} \cdot \frac{44200}{55400}\right)} = 25{,}94 \text{ Zoll } (0^m{,}630).$$

Hiernach beträgt die Senkung höchstens 2,1 Zoll ($0^m,051$), das relative Gefälle ist aber gewachsen von $\frac{1}{4453}$ auf $\frac{1}{3556}$.

Zusatz. Der Einfluß, welchen die Krümmungen, der sonst regelmäßigen Betten, auf die Bewegung des Wassers ausüben, ist im Vorstehenden deshalb vernachlässigt worden, weil er unter den gemachten Voraussetzungen in der That äußerst gering ist[1]).

Dubuat[2]) räth, den Widerstand der Stromkrümmungen genau wie bei Wasserleitungsröhren zu berechnen, d. h. er setzt den Gefällverlust $= \eta$ (auf Metermaaß reducirt):

$$\eta = 0{,}0123 \,.\, v^2 \,.\, \Sigma (\sin \delta)^2,$$

---

[1]) Man beachte den Ausspruch Galilei's (S. 339) über den Widerstand der Flußkrümmungen.

[2]) Principes, Nr. 103.

wobei Σ (sin δ) die Summe der Sinus aller vorhandenen Einfall- oder Anprallwinkel darstellt, aber auch vorauszusetzen ist, daß $\delta < 36$ Grad.

Lahmeyer[1]) bestimmt den Einfluß der Krümmungen dadurch, daß er dem Weisbach-Bornemann'schen Ausdrucke für die Bewegung des Wassers in Canälen[2]), nämlich:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{1}{v^2} = \frac{A'}{\sqrt{v}} \text{ oder: } \frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{1}{v\sqrt{v}} = A'$$

ein besonderes Glied, nämlich $B' \sqrt{\frac{b}{\varrho}}$ beifügt, also überhaupt setzt:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} \frac{1}{v\sqrt{v}} = A' + B' \sqrt{\frac{b}{\varrho}},$$

wobei A' und B' Erfahrungscoefficienten sind, b die Canalbreite (Flußbreite) und ϱ den Halbmesser der betreffenden Krümmung bezeichnet.

Schließlich gelangt Lahmeyer zu der bereits S. 401 mitgetheilten Formel:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{1}{v\sqrt{v}} = 0{,}0004021 + 0{,}0002881 \sqrt{\frac{b}{\varrho}} \text{ für Meter.}$$

§. 140.

Eintritt und Austritt des Wassers bei Canälen.

Die meisten Canäle, in welchen sich Wasser mit merkbarer Geschwindigkeit bewegt, namentlich die zur Leitung des Aufschlagwassers für Motoren bestimmten, werden entweder direct durch Flüsse gespeist, oder sie empfangen ihr Wasser aus Sammelbehältern (Teichen, Anspannungen etc.), die mit ersteren in Verbindung stehen oder durch selbständige Zuflüsse aus Bächen oder Quellen versorgt werden.

Die Eintrittsstelle des Wassers in den Canal, die sogenannte Spitze desselben, ist dabei entweder frei, wie Fig. 167 zeigt, oder sie ist mit Schützvorrichtungen (Fig. 97 und Fig. 107) versehen. Beide Fälle lassen verschiedene Erscheinungen erkennen und sind daher bei gegenwärtiger Betrachtung zu trennen.



Fig. 167.



Befindet sich an der Spitze AC des Canales keine Schütz-

[1]) Förster's Bauzeitung 1852, S. 153.

[2]) Hülse's polytechn. Centralblatt 1845, S. 308, und besonders Bornemann etc. „Der Ingenieur“, Bd. 1, S. 38.

anordnung, so senkt sich der Wasserspiegel nahe der Eintrittsstelle recht merklich, erhebt sich aber bald wieder und gelangt endlich nach einigen ferneren Schwankungen in denjenigen Zustand der Gleichförmigkeit, wobei der Wasserspiegel glatt und eben und dem Canalboden parallel ist[1]).

Vom wissenschaftlichen Standpunkte betrachtet, entbehren die hier auftretenden Erscheinungen noch jeder mathematischen Darstellung, während man sich für practische Zwecke mit einigen von Dubuat gewonnenen Beobachtungsresultaten begnügen muß[2]).

Hinsichtlich des Ausführlichen hierüber auf unsere Quelle verweisend, machen wir zunächst von folgendem Satze Gebrauch:[3]) „in einem Canale von constanter Breite und durchaus gleichem Gefälle stellen sich Querschnitte und mittlere Geschwindigkeit in der Weise her, daß die der Geschwindigkeit entsprechende Höhe gleich der Differenz ist, zwischen dem Wasserstande im Speisebehälter und im Canale, erstere über der Einlaßschwelle A, letztere stromabwärts an einer Stelle gemessen, woselbst die gleichförmige Bewegung vollständig eingetreten ist“.

Bezeichnet man hiernach die Tiefe AC mit e, die ED mit e_1, mit m aber einen Erfahrungs- (Contractions-) Coefficienten, und drückt endlich durch V die Geschwindigkeit aus, womit sich das Wasser an der Canalspitze ersetzt, so ergiebt sich die Gleichung:

$$e - e_1 = \frac{1}{2g}\frac{v^2}{m^2} - \frac{V^2}{2g},$$

oder wenn V klein genug:

$$\text{I.} \quad e - e_1 = \frac{1}{2g}\frac{v^2}{m^2}, \text{ d. i.}$$

$$e - e_1 = 0{,}0510\,\frac{v^2}{m^2} \text{ für Meter.}$$

Dubuat fand bei seinen Versuchen[4]) die Größe m wechseln von 0,91 bis 0,73, ist dabei jedoch der Ansicht, daß in großen Canälen, mit verhältnißmäßig geringen Geschwindigkeiten, die Contraction unbedeutender ist und $m = 0{,}97$ gesetzt werden kann. Eytelwein[5]) nimmt für breite Canäle $m = 0{,}95$ und für schmale $m = 0{,}86$.

Ueberdies glaubt Dubuat, daß man durch gehörige Abrundungen und schickliche Erweiterungen (S. 288) den betreffenden Verlust beim Eingange fast ganz zu Null machen könne, was abgesehen von practischen Schwierigkeiten in der Ausführung nicht so ganz der Fall ist, weil der Verlust einfach schon wegen des

---

[1]) Fälle, wobei der Oberwasserspiegel auch im Beharrungszustande dem Canalboden nicht parallel ist, gehören in das nächstfolgende Capitel.

[2]) Principes, Nr. 170.

[3]) Ebendaselbst, Nr. 178.

[4]) Desgleichen, Nr. 366.

[5]) Handbuch der Mechanik und Hydraulik, 2. Auflage, S. 115.

nothwendigen Ueberganges von einer kleinen Geschwindigkeit (V) in eine größere (v) völlig unvermeidlich ist. Der Nutzen der gedachten Abrundungen und Erweiterungen, wenn sie sich überhaupt ausführen lassen, soll dabei durchaus nicht in Zweifel gezogen werden.

In Bezug auf die Gleichung I. ist noch zu bemerken, daß sie eigentlich voraussetzt, daß beim Eintritte die Ablenkungsrichtung nur einen spitzen Winkel bildet, weil bei größeren und namentlich rechten Winkeln der Wassereinfluß in derartigen krummen Linien geschieht, daß das Querprofil des Wasserkörpers kleiner als das des Canales wird, Stöße, wirbelnde Bewegungen u. s. w. erzeugt werden, über welche Erscheinungen es noch gänzlich an Betrachtungen fehlt.

Zur Lösung betreffender practischer Aufgaben sind noch einige Formeln erforderlich, die hier abgeleitet werden sollen.

Es sei CF die verlängerte Horizontale der Wasserfläche bei C, η die Höhendifferenz DF zwischen dem Spiegel im Behälter und dem bei E, dessen Entfernung $\overline{AE} = l$ sein mag, so wie h_n das absolute Gefälle des Spiegels KD der Canalwasseroberfläche ausdrücken soll, wobei in Bezug auf die Figur $\overline{AB} = h_n$ sein wird, sobald BE eine Horizontale ist.

Es sei deshalb CF die verlängerte Horizontale des Oberwasserspiegels im Behälter, $\overline{FD} = \eta$ die Höhendifferenz zwischen gedachtem Spiegel und der Wasseroberfläche im Canale bei D, während die Canallänge $\overline{EA} = l$ und das absolute Gefälle der Wasseroberfläche DK, d. i. $AB = h_n$ gesetzt werden mag, wobei $BE \parallel CF$ angenommen ist.

Sodann folgt ohne Weiteres, wegen $\overline{CB} = \overline{EF}$:

$$e + h_n = e_1 + \eta$$

$$h_n = \eta - (e - e_1)$$

und das relative Canalgefälle:

$$\text{II.} \quad \frac{h_n}{l} = \frac{\eta - (e - e_1)}{l}.$$

Verbindet man endlich letzteren Werth mit den Gleichungen S. 399, so findet sich überdies:

$$\frac{\eta - (e - e_1)}{l} = \frac{p}{a}(Av + Bv^2),$$

und wenn man hierin den Werth für $e - e_1$ aus I. substituirt:

$$\eta = \frac{v^2}{m^2 \,.\, 2g} + \frac{p}{a}(Av + Bv^2)l,$$

oder, weil $Av + Bv^2 = \frac{v^2}{k^2}$ zu setzen ist:

$$\text{III.} \quad \eta = \frac{v^2}{2gm^2} + \frac{p}{a} l \,.\, \frac{v^2}{k^2}.$$

In welcher Weise mit Hülfe der Ausdrücke I, II. und III. vorkommende practische Aufgaben gelöst werden, erhellt aus nachfolgendem Beispiele, welches der Verfasser d'Aubuisson[1]) entlehnte.

[1]) Traité d'Hydraulique, Pag. 150.

Beispiel. Aus einem Flußbassin (einer Anspannung) wird ein Quantum Wasser unter der Bedingung gekauft, daß dasselbe durch einen rechtwinkligen, 4 Meter breiten Ausschnitt in der Dammkappe, dessen Schwelle 2 Meter unter dem tiefsten Wasserstande des Flusses angeordnet ist, abgeleitet werde. Das gekaufte Wasser soll nach einer 265 Meter entfernten Stelle zum Wasserradbetriebe und zwar in der Weise fortgeführt werden, daß der Wasserspiegel nahe der Aufschlagstelle nicht mehr als $0^m,44$ unter dem Niveau des Sammelbehälters beim kleinsten Wasser desselben liegt.

Welche Wassermenge wird hiernach ein mit dem Ausschnitte verbundener rechtwinkliger Canal fortzuführen haben, welches Gefälle wird derselbe besitzen müssen und wie groß wird die Wassertiefe am Ende des Canales sein?

Auflösung. Nach den gegebenen Zahlenwerthen ist annäherungsweise $a = 4 \,.\, 2 = 8\square^m$ und eben so $p = 4 + 2 \,.\, 2 = 8^m$ zu nehmen. Wählt man überdies (mit d'Aubuisson) $m = 0{,}905$ und nimmt $k = 45$ (der Kutter-Grebenau'schen Tabelle, S. 417, Kategorie X.) entsprechend:

$$r = \frac{a}{p} = 1{,}0,$$

so erhält man nach III:

$$0{,}44 = \frac{0{,}051\, v^2}{(0{,}905)^2} + \frac{v^2}{(45)^2}\, 265.$$

Hieraus aber, als ersten Annäherungswerth für v:

$$v = 1^m{,}508.$$

Demnach aus I, da $v^2 = 2{,}274$ und $m^2 = 0{,}819$ ist:

$$e_1 = 2 - 0{,}051\, \frac{2{,}274}{0{,}819} = 1^m{,}86.$$

Mit dieser Tiefe ergiebt sich aber:

$$a = 4 \,.\, 1{,}86 = 7\square^m{,}44 \text{ und}$$
$$p = 4 + 2 \,.\, 1{,}86 = 7{,}72.$$

Folglich, für die nochmalige Berechnung von v mit Hülfe der Gleichung III:

$$0{,}44 = \frac{0{,}051\, v^2}{0{,}819} + \frac{7{,}72}{7{,}44} \cdot \frac{265}{2025}\, v^2, \text{ woraus}$$
$$v = 1^m{,}493, \text{ daher}$$
$$v^2 = 2{,}229 \text{ und demnach sich}$$
$$e_1 = 2 - 0{,}051\, \frac{2{,}229}{0{,}819} = 1^m{,}863 \text{ ergiebt},$$

ein Rechnungsgang, der in gleicher Weise fortgesetzt werden könnte.

Wir betrachten indeß letzteren Werth, für gegenwärtigen Zweck, als hinreichend genau und finden daher das dem Canale zu gebende relative Gefälle $\frac{h_n}{l}$ nach II:

$$\frac{h_n}{l} = \frac{\eta - (e - e_1)}{l} = \frac{0{,}44 - (2 - 1{,}863)}{265}, \text{ d. i.:}$$

$$\frac{h_n}{l} = 0^m{,}00114.$$

Endlich ergiebt sich auch die pro Secunde zugeführte Wassermenge Q, wegen $a = 1,863 \,.\, 4 = 7^{\square m},452$, zu:

$$Q = av = 7,452 \,.\, 1,493 = 11,126 \text{ Cubikmeter.}$$

d'Aubuisson fand $\frac{h_n}{l} = 0,001041$ und

$$Q = 11,83 \text{ Cubikmeter.}$$

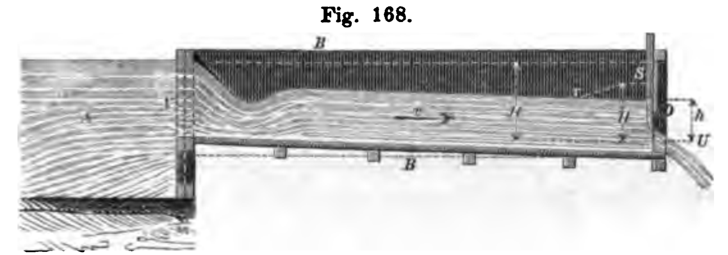
§. 141.

Was sich in den Fällen ereignet, wenn die Spitze des Canales mit einer Schützenöffnung versehen ist, durch welche der Eintritt des Wassers erfolgt, erhellt ohne Weiteres aus den Versuchen Lesbros über diesen Gegenstand, §. 103, so wie aus den betreffenden Rechnungen etc. des §. 104, wenn man wiederum die Gleichung für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen entsprechend damit in Verbindung bringt. Welches Rechnungsverfahren endlich beobachtet werden muß, wenn am unteren Ende des Canales eine Schützenvorrichtung angebracht ist, wird aus nachstehender, von Poncelet[1]) gelösten Aufgabe klar.

Es sei $H - h$ die Differenz der Wasserstände H im Sammelbehälter und h unmittelbar vor dem Schützen der Ausflußöffnung, Fig. 168, beide vom Schwerpunkte der letzteren aus gemessen.

Man soll den Verlust an Druckhöhe und die Geschwindigkeit, womit das Wasser aus der Schützenöffnung bei D tritt, berechnen, wenn hierzu alle sonst erforderlichen Werthe gegeben sind.

Fig. 168.



Zur betreffenden Auflösung sei M die pro Secunde in den Canal B aus dem Sammelbehälter A mit der Geschwindigkeit V tretende Wassermasse, v die mittlere Geschwindigkeit der als gleichförmig vorauszusetzenden Bewegung des Wassers im Canale, U die Geschwindigkeit in der Ausflußöffnung $= \omega$ bei D, ferner sei μ der Ausflußcoefficient an letzterer Stelle, so wie α der Coefficient für die Zusammenziehung des Strahles am oberen Ende des Canales bei A.

Das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte in Verbindung mit dem Principe Carnot's liefert hier, mit Bezug auf den Widerstandsausdruck S. 395, ohne Weiteres die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}M(U^2 - V^2) + \tfrac{1}{2}Mv^2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = gMH - \frac{\gamma}{g}pl\,(\alpha v + \beta v^2)\,v,$$

[1]) Cours de Mécanique appliquée aux Machines, Sect. VI, Nr. 78.

oder wegen $M = \frac{\gamma a v}{g}$, d. i. $\frac{\gamma}{g} v = \frac{M}{a}$:

$$\tfrac{1}{2} M (U^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} M v^2 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = gMH - M \frac{pl}{a} (Av + Bv^2),$$

oder auch $\frac{U^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} + \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = H - \frac{pl}{a}(Av + Bv^2)$.

Beachtet man, daß hier noch $U^2 = v^2 + 2gh$ ist, so folgt:

$$\frac{v^2}{2g}\left\{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right\} - \frac{V^2}{2g} + \frac{pl}{a}(Av + Bv^2) = H - h,$$

oder endlich, wenn man $\frac{V^2}{2g}$ als klein genug vernachlässigt und $H - h = h_1$ setzt:

$$\text{I.} \quad h_1 = H - h = \frac{v^2}{2g}\left\{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right\} + \frac{pl}{a}(Av + Bv^2).$$

Führt man wieder $\frac{v^2}{k^2}$ statt $Av + Bv^2$ ein und beachtet, daß auch $av = \mu\omega U = Q$ ist, wo Q die pro Secunde durch die Schützenmündung fließende Wassermenge bezeichnet, so findet sich:

$$h_1 = \left(\frac{\mu\omega}{a}\right)^2 \frac{U^2}{2g}\left\{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 2g \frac{pl}{ak^2}\right\}.$$

Ueber den Schwerpunkt der Schützenöffnung D verbleibt sonach als Druckhöhe $= h$:

$$h = H - h_1, \text{ d. i.:}$$

$$h = H - \frac{U^2}{2g} \cdot \left(\frac{\mu\omega}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 2g \frac{pl}{ak^2}\right],$$

oder weil $h = \frac{U^2}{2g}$ ist, auch:

$$\text{II.} \quad H = \frac{U^2}{2g}\left\{1 + \left(\frac{\mu\omega}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 2g \frac{pl}{ak^2}\right]\right\} \text{ und}$$

$$\text{III.} \quad U = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \left(\frac{\mu\omega}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 2g \frac{pl}{ak^2}\right]}},$$

so wie endlich:

$$\text{IV.} \quad Q = \mu\omega \sqrt{\frac{2gH}{1 + \left(\frac{\mu\omega}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 2g \frac{pl}{ak^2}\right]}},$$

wo μ, je nach der betreffenden Anordnung der Mündung, aus §. 101, 102 oder 103 zu entnehmen ist.

Erhebt sich vor dem Ausflusse bei D der Wasserspiegel wieder, d. h. bildet sich ein Stau an der Schützenstelle, (wie die punktirte Linie *rs*, Fig. 168, erkennen läßt), so kann man die Formel I. des §. 77 in Anwendung bringen, wie die Versuche von **Lesbros** ohne Zweifel lehren[1]). Bezeichnet hierzu H' die im Canale an einer Stelle gemessene Druckhöhe, woselbst die Stauoberfläche sich im

---

[1]) Expériences, Pag. 195, mit zugehörigen Abbildungen auf Taf. 7.

Beharrungszustande befindet (bei Lesbros etwa 1 Meter aufwärts), so wie Ω den Profilquerschnitt daselbst, so erhält man:

$$U = \sqrt{\frac{2gH'}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}}} \text{ und } Q = \mu_1 \omega U.$$

Die betreffenden Ausflußcoefficienten μ_1 variiren dabei nach Lesbros, wie folgende kleine Tabelle zeigt:

H'	μ_1
Meter	
1,4195	0,658
1,0437	0,662
0,7651	0,658
0,4410	0,660
0,2244	0,643
0,1696	0,625
0,1200	0,604

Ausführliches hierüber enthält das später folgende Staucapitel.

Beispiel. Für den Zweck eines Wasserradbetriebes verlangt man, daß der Ausfluß aus der Schützenöffnung D, Fig. 168, mit einer Geschwindigkeit von 3,3 Meter erfolgt, während die Aufschlagwassermenge pro Secunde 0,72 Cubikmeter beträgt und der Canal (das Gerinne) eine Länge von 100 Metern hat. Die Ausflußöffnung bei D soll 3,0 Meter lichte Weite und 0,10 Meter Höhe erhalten, das Wasser im Gerinne, bei 3,29 Meter Breite eine Tiefe von 0,546 Meter besitzen, während $\mu = 0,72$ und $\alpha = \frac{1}{3}$ angenommen wurde. Es ist die erforderliche Druckhöhe H, Fig. 168, im Sammelbehälter und die Differenz zwischen dieser Druckhöhe und der h vor der Schützenöffnung D zu berechnen.

Auflösung. Hier ist:

$$\omega = 3 \,.\, 0,1 = 0\square^m,3;\ \mu\omega = 0,72 \,.\, 0,03 = 0,216;$$

$a = 0,546 \,.\, 3,29 = 1,80\square^m$; $v = \frac{Q}{a} = \frac{0,72}{1,80} = 0^m,4$. Demnach, wenn man $k^2 = 2500$ setzt, $\frac{2g}{k^2} = \frac{19,62}{2500} = 0,00784$. Ferner:

$$p = 3.290 + 1,092 = 4,382;\ \frac{pl}{a} = \frac{4,382 \,.\, 100}{1,80} = 243,4.$$

Sonach zufolge II:

$$H = 0,555\ \{1 + 0,0144\ [1,25 + 1,9082]\},\ \text{d. i.}$$
$$H = 0^m,580.$$

Ferner berechnet sich: $h = \frac{(3,3)^2 - (0,4)^2}{2 \,.\, 9,81} = 0^m,546$, daher endlich:

$$H - h = 0,580 - 0,546 = 0^m,034.$$

Hieraus erhellt, daß der Einfluß der hier in Rechnung gebrachten Widerstände höchst gering ist.

Drittes Capitel.

Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen.

§. 142.

Aus den §. 132 aufgestellten Bedingungen, unter welchen allein eine gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen stattfindet, folgt ohne Weiteres, daß eine ungleichförmige Bewegung allemal vorhanden ist, sobald die Querprofile des strömenden Wassers eines und desselben Canales verschieden sind, das Bodengefälle veränderlich, null oder die Neigung des Bodens gar der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Eben so tritt noch Ungleichförmigkeit der Bewegung ein, wenn in einem Canale von sonst gleichem Profile und Längengefälle, Einbaue (Wehre, Buhnen, Brücken etc.) vorkommen, wodurch, von der Stelle des bemerkten Hindernisses ab, der Wasserspiegel auf eine mehr oder weniger lange Strecke stromaufwärts erhoben (gestaut) wird.

Um hierbei überhaupt Rechnungen möglich zu machen, setzen wir abermals voraus, daß für die Zeitintervalle der betreffenden Rechnungen und Beobachtungen, gleiche Wassermengen Q pro Secunde durch die verschiedenen Querschnitte $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_{n-1}$ und a_n gehen, so daß, wenn man beziehungsweise die zugehörigen mittleren Geschwindigkeiten mit $v_0, v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots v_n$ bezeichnet, die Gleichung statt hat:

$$Q = a_0 v_0 = a_1 v_1 = a_2 v_2 = a_3 v_3 \ldots a_n v_n.$$

Unter dieser letzten Voraussetzung nennt man die ungleichförmige Bewegung, wie bereits S. 396 erwähnt, eine permanente.

Ferner werde noch vorausgesetzt, daß die fließende Wassermasse aus ziemlich parallelen Fäden besteht und daß Wirbel und Gegenströme gar nicht vorhanden sind, auch die bemerkten Querschnitte ihre Gestalt und Größe nur in sanften Uebergängen verändern und demnach aus diesen und anderen Ursachen plötzliche Geschwindigkeitsänderungen nicht vorkommen.

Von den in folgenden Paragraphen zu entwickelnden Formeln ist natürlich noch weniger, als von den für die gleichförmige Bewegung gewonnenen, für die Praxis zu erwarten, daher bei ihrem Gebrauche auch noch mehr Vorsicht zu empfehlen ist.

Zwei Fälle sind es besonders, in welchem die Praxis gezwungen ist (um mindestens einige Haltpunkte zu gewinnen), von der Theorie dieser Wasserbewegung Gebrauch zu machen. Entweder hat man die secundliche Wassermenge zu bestimmen, wenn die auf einander folgenden Querschnitte des Canales oder Flusses und ferner die Gefälle bekannt sind; oder man soll bei gegebener Wassermenge die Wassertiefen stromauf- oder stromabwärts, überhaupt die Erhebung oder Senkung der Wasseroberfläche ermitteln.

§. 143.

Sieht man zunächst davon ab, ob es überhaupt zulässig ist, mit der lebendigen Kraft zu rechnen, welche der mittleren Profil-

geschwindigkeit entspricht, oder statt dieser mit der Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Wasserfäden, und ob man überdies die Widerstandscoefficienten für alle Punkte desselben Querschnittes constant voraussetzen darf, so liefert für den ersten Fall, d. h. für die Bestimmung der secundlichen Wassermenge, die Gleichung I, S. 396, wegen $v_n = \frac{Q}{a_n}$ und $v_0 = \frac{Q}{a_0}$, sofort den Ausdruck:

$$\frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_0^2}\right] = h - \int_0^l \frac{p}{a}\frac{v^2}{k^2}\,dl,$$

wenn man zugleich den Prony'schen Widerstandswerth $Av + Bv^2$ durch den von Chezy und Eytelwein ersetzt. Oder da auch $v = \frac{Q}{a}$ ist:

$$\frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_0^2}\right] = h - Q^2\int_0^l \frac{p\,dl}{a^3k^2}.$$

Hieraus folgt aber:

$$\text{I.}\quad Q^2 = \frac{h}{\frac{1}{2g}\left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_0^2}\right) + \int_0^l \frac{p\,dl}{a^3k^2}}.$$

Für practische Zwecke bestimmt man den zweiten Theil des Nenners dieses Ausdruckes am Besten dadurch, daß man eine geeignete, möglichst regelmäßige Canal- oder Flußstrecke $= l$ in eine entsprechende Anzahl gleicher oder ungleicher Theile ($=\lambda$) theilt und für jedes darauf fallende Profil die Flächeninhalte $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ und eben so die Wasserperimeter $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ ermittelt und dann schreibt:

$$Q^2 = \frac{h}{\frac{1}{2g}\left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_0^2}\right) + \Sigma_0^l\left(\frac{p\lambda}{a^3k^2}\right)}.$$

Sodann ergiebt sich aber:

$$\text{II.}\quad \frac{1}{2g}\left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_0^2}\right) = E \text{ und } \Sigma_0^l\left(\frac{p\lambda}{a^3k^2}\right) = G \text{ gesetzt:}$$

$$\text{III.}\quad Q = \sqrt{\frac{h}{E+G}}.$$

Beispiel. **Es ist die Wassermenge eines Flusses zu bestimmen, bei welchem man auf die Länge von 414,9 Meter 6 Profile abgesteckt und ferner die entsprechenden Gefälle, Wasserperimeter und Flächeninhalte ermittelt hat. Geeignete mechanische Instrumente zum directen Messen der mittleren Profilgeschwindigkeiten sind nicht vorhanden [1]).**

[1]) Der Verfasser entlehnte dies Beispiel absichtlich der d'Aubuisson'schen Hydraulik, Pag. 188, woselbst für die Widerstände die Eytelwein'schen Coefficienten (S. 400) benutzt wurden.

Auflösung. Unter Benutzung der Kutter-Grebenau'schen Tabelle III, S. 416, die Wandbeschaffenheit des Flusses der Kategorie IX. entsprechend angenommen, ergiebt sich überhaupt folgende kleine Tafel:

Nr. des Profiles	Längen der einzelnen Distanz in Metern $= \lambda$	Gefälle von Profil zu Profil, in Metern	Wasser-perimeter $= p$ in Metern	Flächen-inhalt der Profile $= a$ in Quadrat-metern	Werthe von $\frac{p\lambda}{a^3}$	Werthe von $\frac{a}{p} = r$	Werthe von k	Werthe von k^2	Werthe von $\frac{p\lambda}{a^3 k^2}$
0	0,0	0,0	99,0	76,68	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	159,4	0,1720	110,8	73,84	0,04385	0,67	47,0	2209	0,0000198
2	65,6	0,0709	99,1	45,51	0,06896	0,46	42,7	1823	0,0000378
3	71,0	0,0659	94,1	64,05	0,02182	0,68	48,5	2352	0,0000038
4	79,7	0,0852	94,4	45,51	0,07980	0,48	41,5	1722	0,0000463
5	49,2	0,0531	117,8	62,68	0,02355	0,58	45,8	2098	0,0000112
Summen	414,9	0,4471			0,23798				0,0001189

Sodann ist:

$$E = \frac{1}{2g}\left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_0^2}\right) = 0{,}051\,(0{,}0002546 - 0{,}0001701) = 0{,}0000043095;$$

$$G = \Sigma_0^l \left(\frac{p\lambda}{a^3 k^2}\right) = 0{,}00011890.$$

Daher:

$$E + G = 0{,}00012321,$$

und, da $h = 0^m{,}4471$ ist:

$$Q = \sqrt{\frac{0{,}4471}{0{,}00012321}} = 60{,}239 \text{ Cubikmeter.}$$

d'Aubuisson berechnete dagegen:

$$Q = 68{,}4 \text{ Cubikmeter.}$$

Die Messung mittelst eines Hydrometers (Tachometers) soll geliefert haben:

$$Q = 75{,}10 \text{ Cubikmeter.}$$

Ist letztere Messung richtig, so bestätigt dies Beispiel unsere Warnung vor dem Gebrauche der Formeln I. bis mit III.

In einzelnen Fällen, wo die Profilquerschnitte, überhaupt die Unregelmäßigkeit der Bewegung nicht so groß, wie in dem vorberechneten Falle ist, erhält man oft bessere Uebereinstimmungen, wie sich u. A. Weisbach bemüht, in der unten notirten Quelle[1]) an Beispielen darzuthun.

So berechnet Weisbach (mittelst obiger Formeln) die Wassermenge an einer Stelle des Saaleflusses zu 1809 Cubikfuß, während eine directe Messung (mit den geeigneten Instrumenten) nur

[1]) Hülse, Maschinenencyklopädie. Bd II, S. 151 ff.

1578 Cubikfuß, also 231 Cubikfuß zu wenig lieferte. Der betreffende Fehler betrug daher $\frac{1809-1578}{1578} = 0{,}146$, d. i. fast 15 Procent.

Weisbach nimmt als Grund dieses Mißverhältnisses den Umstand an, daß auf einer über 2000 Fuß langen Flußstrecke nur 8 Profilmessungen gemacht worden wären, während, bei der vorhandenen Unregelmäßigkeit der Profile und demnach der großen Ungleichförmigkeit der Bewegung, eine viel bedeutendere Zahl (also auch geringere Abstände) hätten genommen werden müssen.

Wir werden nachher hören, wie die jüngsten Urtheile ausgezeichneter Hydrauliker hierüber lauten, so daß schon hier vor Anwendung vorstehender Formeln, auf Flüsse und Gräben mit natürlichen, unregelmäßigen Betten, unter allen Umständen gewarnt werden muß! Was daher die Ermittlung der Wassermenge Q betrifft, so muß man diese stets nach §. 124 bestimmen.

§. 144.

Um für den zweiten der oben bezeichneten Fälle, mindestens bei Canälen, Aufschlagwassergräben u. d. m., überhaupt für in regelmäßig, künstlichen Betten fließenden Wassers von den Sätzen der ungleichförmig permanenten Bewegung Gebrauch machen zu können, bemühen wir uns, die Gleichung I. des §. 132 (S. 396) entsprechend umzuformen.

Differenzirt man hierzu diese Gleichung, so ergiebt sich:

$$(1)\quad \frac{vdv}{g} = dh - \frac{p}{a}(Av + Bv^2)\,dl,$$

ein Ausdruck, der vorzugsweise dazu benutzt wird, die Länge l durch die Wassertiefe, oder auch diese letztere Größe durch die erstere auszudrücken.

Für diese Zwecke ist es von Vortheil, (1) wie nachstehend zu gestalten.

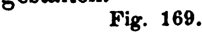
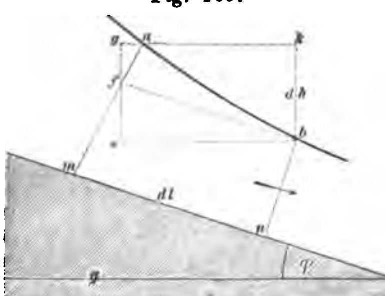


Fig. 169.



Es sei $abmnq$, Fig. 169, das Längenprofil einer Canalstrecke von der Länge $mn = dl$ und dem Neigungswinkel φ des Bodens; ferner sei die größte Tiefe des Profiles, stromaufwärts, d. i. $\overline{am} = y$, die kleinste stromabwärts $\overline{bn} = y - dy$, so daß af die Größe dy darstellt.

Sodann ist, wenn $\overline{eb}$ und $\overline{gak}$ parallel zum Horizonte gezogen werden, ge und kb aber Verticallinien sind und $\overline{fb} \parallel \overline{mn}$ genommen wird:

$$\frac{\overline{kb} = \overline{gf} + \overline{ef}, \text{ oder}}{dh = -dy \,.\, \cos\varphi + dl \,.\, \sin\varphi}.$$

Hiernach folgt aus (1):

$$(2)\quad \frac{vdv}{g} = -dy \,.\, \cos\varphi + dl \,.\, \sin\varphi - \frac{p}{a}(Av + Bv^2)\,dl.$$

Aus dieser Gleichung entferne man dv, indem man beachtet, daß, wenn Q die pro Secunde abfließende Wassermenge bezeichnet, $v = \frac{Q}{a}$ und $dv = -\frac{Q \cdot da}{a^2} = -\frac{v}{a}\, da$ ist.

Statt da kann man aber schreiben $da = x \cdot dy$, wenn x die horizontale Breite des Wasserspiegels im Querprofile a bezeichnet, d. h. es ist auch:

$$dv = -\frac{v \cdot x}{a} \cdot dy.$$

Daher wird aus (2):

$$-\frac{v^2}{g} \cdot \frac{x}{a} \cdot dy + dy \cdot \cos\varphi = dl \cdot \sin\varphi - \frac{p}{a}(Av + Bv^2)\, dl$$

und daher:

$$\text{I.} \quad \frac{dl}{dy} = \frac{\frac{v^2}{g} \cdot \frac{x}{a} - \cos\varphi}{\frac{p}{a}(Av + Bv^2) - \sin\varphi}.$$

In den meisten Fällen ist φ sehr klein, weshalb man setzen kann $\cos\varphi = 1$. Setzt man überdies $\sin\varphi = i$, so folgt:

$$\text{II.} \quad \frac{dl}{dy} = \frac{\frac{v^2}{g} \cdot \frac{x}{a} - 1}{\frac{p}{a}(Av + Bv^2) - i}.$$

Führt man hier wieder Q ein, ersetzt abermals $Av + Bv^2$ durch $\frac{v^2}{k^2}$ und beachtet, daß $dy = \frac{da}{x}$ ist, so ergiebt sich:

$$\text{III.} \quad dl = \frac{1}{i \cdot x} \cdot \frac{\frac{x}{g} Q^2 - a^3}{\frac{pQ^2}{ik^2} - a^3} \cdot da.$$

Kann man endlich eine durchaus constante mittlere Breite $= b$ der Profile in Rechnung bringen, also $a = b \cdot y$ und überdies $x = b$ setzen, so erhält man endlich:

$$\text{IV.} \quad i \cdot dl = \frac{\frac{Q^2}{gb^2} - y^3}{\frac{pQ^2}{ib^3k^2} - y^3} \cdot dy.$$

§. 145.

Geschichtliche Notizen.

Eine Theorie der ungleichförmigen Bewegung des Wassers dürfte zuerst von Eytelwein aufgestellt worden sein. Mindestens entwickelt derselbe im Zusatze zu §. 131 der 1822 bearbeiteten zweiten Auflage seiner Hydraulik, eine Gleichung zur Berechnung der Wassertiefe und des Gefälles für einen Canal von unveränderlicher Breite, worin das

Wasser im oberen Querschnitt höher steht als im Querschnit am unteren Ende einer bestimmten Länge.

Leider ist Eytelwein's Entwickelung insofern mangelhaft, als er die lebendige Kraft unberücksichtigt läßt, welche entweder einen Theil des Gefälles in Anspruch nimmt, wenn das Wasser aus einer kleineren Geschwindigkeit in eine größere übergeht oder das Gefälle vermehrt, wenn das Wasser an Geschwindigkeit verliert.

Auch Gerstner in seiner Mechanik (Anmerkung zu §. 253, Bd. II) entwickelt eine Formel für die ungleichförmige Bewegung des Wassers in Betten, unter der Voraussetzung, daß das Gefälle constant und die Wassertiefe in Hinsicht auf Wasserperimeter und Breite der Profile sehr klein und wenig veränderlich ist. Die Rechnung ist jedoch so verwickelt, daß sie keinen practischen Werth hat.

Frei von dem bei Eytelwein gerügten Fehler, bei gehöriger Einfachheit für practische Zwecke, behandelte zuerst Poncelet die fragliche Aufgabe in der (im Winter von 1827 auf 1828 bearbeiteten) lithographirten Ausgabe seines berühmten Werkes „Cours de mécanique appliquée aux machines", und zwar gelangte er daselbst zu den im vorigen Paragraphen entwickelten Gleichungen. Unmittelbar nachher (ebenfalls 1828) veröffentlichte Belanger seine werthvolle Abhandlung über denselben Gegenstand unter dem Titel „Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes"[1]). Der Verfasser gegenwärtigen Buches hat es für Pflicht gehalten, entsprechend der Bedeutung, welche man lange Zeit hindurch der hierin gegebenen Lösung von Aufgaben der practischen Hydraulik mit Recht beilegte, einige derselben im folgenden Paragraphen aufzunehmen.

Später machten sich insbesondere Coriolis und Vauthier um die Ausbildung der Theorie der permanenten Bewegung verdient, deren Abhandlungen in den Annales des ponts et chaussées, Jahrgang 1836, Tome XI. und XII, zu finden sind. Vauthier insbesondere suchte die Theorie durch zahlreiche Beispiele den Practikern zugänglich zu machen.

Coriolis war es namentlich, welcher es zuerst für erforderlich hielt, den linken Theil der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen mit dem Erfahrungscoefficienten α zu multipliciren, den er größer als Eins voraussetzte und wodurch er glaubte, den Fehler corrigiren zu können, den man offenbar begeht, indem man statt der Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Stromfäden, die lebendige Kraft in Rechnung nimmt, welche der mittleren Geschwindigkeit entspricht.

Vauthier zeigte, daß man $\alpha = 1{,}03$ nehmen könne, wenn die mittlere Geschwindigkeit 1,5 Meter beträgt, dagegen $\alpha = 1{,}10$, wenn die mittlere Geschwindigkeit 0,25 Meter ist.

Das erste Lehrbuch einer für Ingenieure brauchbaren Hydraulik, worin die permanente ungleichförmige Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen behandelt wurde, war die zweite, 1840 erschienene Auf-

---

[1]) Die Priorität der Aufstellung betreffender Formeln, Belanger gegenüber, wird auch in der von Kretz (1876) besorgten Ausgabe des erwähnten Poncelet-schen Werkes, Seconde Partie, Pag. 100, entschieden Poncelet zugesprochen.

lage des für seine Zwecke höchst werthvollen Buches d'Aubuisson's (Traité d'Hydraulique a l'Usage des Ingénieurs), worüber bereits oben S. 205 berichtet wurde.

Zu bedauern war, daß d'Aubuisson zum Vergleiche seiner Rechnungsersultate lediglich Funk'sche Messungen benutzte, welche dieser Hydrotekt seiner Zeit in der Weser angestellt hatte und von denen sehr viele (nach Hagen und Lahmeyer)[1]) als von sehr zweifelhaftem Werthe nachgewiesen wurden.

Weisbach bemühte sich zuerst und zwar in seiner für den Unterricht und für das Selbststudium höchst anzuerkennenden Weise, die Theorie der ungleichförmigen Bewegung fließender Wässer in Deutschland zu verbreiten, so daß, in Bezug der werthvollen Aufgaben, die betreffende, für Hülse's Maschinenencyklopädie, Bd. II. (Artikel „Bewegung des Wassers") gelieferte Arbeit noch heute Beachtung verdient.

Welcher geringe Werth, trotz alledem, für die Praxis, sämmtlichen bis gegen Ende der vierziger Jahre aufgestellten Theorien dieser Wasserbewegung, beigelegt werden konnte, wies zuerst Dupuit in seinem schon oben S. 347 markirten, (1848) erschienenen Werke: „Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes"[2]), ganz entschieden nach.

Es wird genügen, hier nur einige seiner scharfen Urtheile wiederzugeben. Bei Gelegenheit einer Kritik über die Coefficienten zur Correction der fehlerhaften Bildung der betreffenden lebendigen Kräfte nach Coriolis, Vauthier u. A., bemerkt Dupuit schließlich Folgendes:[3]) „Tous les calculs faits jusqu'à present, et qui reposent sur la différence de la force vive de deux sections voisines, sont donc completément erronés. S'il s'agissait de rectangles indéfinis ou de sections régulières, les formules, qui précèdent (Siehe vorigen Paragraphen) ou d'autres analogues pourraient servir à les rectifier, mais les sections de cours d'eau naturel sont tellement irrégulières qu'il est impossible d'arriver à déterminer d'une manière un peu exacte l'expression de la force vive. Or une légère erreur dans l'évaluation de deux quantités peut en donner une énorme dans leur difference".

Von den Formeln des vorigen Paragraphen macht daher Dupuit auch nur in den Fällen Gebrauch[4]), wenn die Profile Rechtecke von unveränderlicher Breite bilden, oder die Querschnitte sich weder plötzlich noch graduell verändern.

Unter Beachtung dieser Vorschrift gelangte Dupuit zu werthvollen practischen Resultaten, welche die weitläufigen, sehr ermüdenden Rechnungen Belanger's[5]) überflüssig machten und wovon hier nachfolgende Paragraphen Zeugniß geben werden.

---

[1]) Lahmeyer, Erfahrungsresultate, S. 16.

[2]) Eine zweite Auflage dieses schätzbaren Buches (durchgesehen und beträchtlich vermehrt) erschien 1863. Die hauptsächlichsten theoretischen Erörterungen sind jedoch unverändert geblieben.

[3]) a. a. O., Pag. 65, §. 45 der zweiten Auflage.

[4]) Études, Zweite Auflage, Pag. 73.

[5]) Essai sur la solution numérique etc.

Unter Beibehaltung derselben Rechnungsbasis (Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte) konnten begreiflicher Weise diese Theorien keine erfolgreiche Aenderung bewirken, wie dies u. A. auch Bresse in seinem sonst vortrefflichen Buche „Cours de mécanique appliquée", IIe Partie, Paris 1860, erkennen läßt.

Als völlig unzulänglich, wenn nicht als eine beklagenswerthe Täuschung, wenigstens für die Sache im Allgemeinen, müßte den rationellen Practikern der Abschnitt „Expériences sur le mouvement varié" (Pag. 247—296) in dem sonst so ausgezeichneten Werke „Recherches hydrauliques" von Darcy-Bazin, erscheinen. Aus den hier mitgetheilten Versuchen ist für die wichtigsten practischen Fälle nur sehr wenig zu entnehmen.

Das größte Aufsehen in der betreffenden theoretischen Welt hat das jüngste Werk des Franzosen Boussinesq erregt, welches am 28. October 1872 der Pariser Academie der Wissenschaften präsentirt wurde und betitelt ist: „Essai sur la théorie des eaux courantes"[1]. Nach dem Berichte einer Commission, bestehend aus Bonnet, Phillips und Saint-Venant, erklärte die Academie dasselbe als würdig zur Aufnahme in das Recueil des Savants étrangers, was gleichbedeutend dem Urtheile ist, daß die Arbeit zu den Ausgezeichnetsten ihrer Art gehört. Hiermit wird zugleich das höchste Lob über die vorzügliche Leistung eines Nichtmitgliedes der Academie ausgesprochen.

Diese Arbeit umfaßt, vom rein theoretischen Standpunkte, die Bewegung des Wassers in offenen Betten und in (geschlossenen) Röhren und behandelt in ersterer Beziehung namentlich die ungleichförmige Bewegung, wie sich solche bei Hochwasser und bei der Einwirkung von Fluth und Ebbe zu erkennen giebt.

Boussinesq basirt hierzu seine Theorien nicht auf das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, sondern auf die hydrostatischen und hydrodynamischen Gleichungen Euler's (S. 15 und S. 193) und zwar besonders deshalb, weil nach seiner Ansicht sonst die widerstehenden Arbeiten der inneren Kräfte nicht die erforderliche Beachtung erfahren können.

Leider sind die sich ergebenden analytischen Rechnungen so verwickelt und weitläufig, daß wenigstens in der von Boussinesq erhaltenen Gestalt, die Praxis keinen Gebrauch davon machen kann.

§. 146.

Um die Brauchbarkeit vorstehender Formeln in einigen practischen Fällen darzuthun, mag zunächst II, §. 144, zur Lösung eines Belanger'schen Zahlenbeispieles[2]) vorbereitet werden.

Der Boden des betreffenden Canales (Aqueduc de Ceinture in Paris) sei ganz horizontal, also $i =$ Null, so daß aus II. wird:

---

[1]) Paris. Imprimérie Nationale. 1877.

[2]) a. a. O., Nr. 25.

$$(1)\quad \frac{dl}{dy} = \frac{\frac{v^2}{g}\cdot\frac{x}{a} - 1}{\frac{p}{a}\,(Av + Bv^2)}.$$

Belanger integrirt diesen Ausdruck in gewöhnlicher Weise nicht, sondern betrachtet die Differenzialien als Differenzen, schreibt, indem er gleichzeitig l stromaufwärts zählt:

$$(2)\quad \Delta l = \frac{a - \frac{v^2}{g}\cdot x}{p\,(Av + Bv^2)}\cdot \Delta y,$$

und verfährt übrigens ganz so, wie §. 143 bei der Lösung derartiger Zahlenbeispiele, was auch aus dem Nachstehenden ferner klar werden wird.

Zum Vergleiche mit diesem Verfahren integriren wir erstere Gleichung mit Dupuit[1]) direct, schicken jedoch noch einige entsprechende Umgestaltungen derselben und fernere Annahmen voraus.

Zuerst nehmen wir die Profilquerschnitte (nahezu) als Rectangel von gleicher Breite $x = 2b$ an, erhalten also:

$$a = 2by,\ Q = 2vby,\ v = \frac{Q}{2b}\cdot\frac{1}{y},$$

oder wenn zur Abkürzung $\frac{Q}{2b} = r$ gesetzt wird,

$$v = \frac{r}{y},\ \text{daher}$$

$$\frac{dl}{dy} = \frac{\frac{2b}{2by}\cdot\frac{r^2}{g}\cdot\frac{1}{y^2} - 1}{\frac{2b+2y}{2by}\left(A\frac{r}{y} + B\frac{r^2}{y^2}\right)},\ \text{oder}$$

$$\frac{dl}{dy} = b\cdot\frac{\frac{r^2}{g} - y^3}{(b+y)\,(Ary + Br^2)}.$$

Hier wieder $Ary + Br^2 = m$ als constant angenommen, liefert endlich:

$$\frac{m\,.\,l}{b} = \frac{r^2}{g}\int\frac{dy}{b+y} - \int\frac{y^3dy}{b+y} + \text{Const.}$$

Beachtet man hier, daß

$$\frac{y^3}{y+b} = y^2 - by + b^2 - \frac{b^3}{b+y}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{m\,.\,l}{b} = \left(\frac{r^2}{g} + b^3\right)\text{Lgnt}\,(b+y) - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{2}y^2b - yb^2 + \text{Const.}$$

Bezeichnet ferner Y die größte Wassertiefe stromaufwärts, so wird $l =$ Null für $y = Y$ und daher das bestimmte Integral:

$$(3)\quad l = \frac{b}{m}\left[\left(\frac{r^2}{g} + b^3\right)\text{Lgnt}\left(\frac{b+y}{b+Y}\right) - \tfrac{1}{3}(y^3 - Y^3) + \tfrac{1}{2}b(y^2 - Y^2) - b^2(Y - y)\right].$$

[1]) Etudes Nr. 54 (Erste Auflage) und Nr. 55 (Zweite Auflage).

Beispiel. Der Canal des Aqueduc de Ceinture in Paris führt pro Secunde eine Wassermenge von 0,8 Cubikmeter, bei ganz horizontalem Boden ab und hat bei seiner Ausmündung eine Wassertiefe von $0^m,4$. Die Seitenwände haben eine $\frac{1}{32}$fache Anlage und die Sohle eine constante Breite von $1^m,3$; es fragt sich, in welcher Entfernung stromaufwärts die Wassertiefe $1^m,7$ beträgt?

Erste Auflösung.

Des bemerkten Vergleiches mit den Belanger'schen Zahlenwerthen wegen, rechnen wir hier mit den Eytelwein'schen Coefficienten, setzen also nach §. 133, S. 400:

$$A = 0{,}0000243;\ B = 0{,}000366.$$

In Bezug auf Gleichung (3) ist ferner $Y = 1^m,7$, $y = 0^m,4$ daher die mittlere Tiefe auf die bemerkte Strecke. $\frac{1{,}7 + 0{,}4}{2} = 1{,}05$, und deshalb die mittlere Breite im Wasserspiegel des trapezförmigen Profiles:

$$1{,}3 + \tfrac{2}{32} \,.\, 1{,}05 = 1^m{,}366, \text{ also}$$

$$2b = \frac{1{,}30 + 1{,}366}{2} = 1{,}333 \text{ und}$$

$$b = 0^m{,}67.$$

Ferner

$$r = \frac{Q}{2b} = \frac{0{,}8}{1{,}333} = 0{,}6,$$

so wie, wegen $m = Ary + Br^2$:

$$Ary = 0{,}0000243 \,.\, 0{,}6 \,.\, 1{,}05 = 0{,}000015309;$$
$$Br^2 = 0{,}000366 \,.\, 0{,}36 = 0{,}00013176;$$
$$m = 0{,}000147069.$$

Deshalb aber aus (3):

$$l = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{0{,}67}{0{,}000147069} \left[\left(\dfrac{0{,}36}{9{,}82} + 3{,}01 \right) \text{Lgnt}\, \dfrac{1{,}07}{2{,}37} - \tfrac{1}{3}(0{,}064 - 4{,}913) \right. \\ \left. \quad + \tfrac{1}{2} \,.\, 0{,}67\,(0{,}16 - 2{,}89) - 0{,}4489\,(0{,}40 - 0{,}70) \right] \end{array} \right\},$$

d. i. $l = 4639$ Meter.

Zweite Auflösung[1]).

Mit Bezug auf Gleichung (2) ist:

$$x = 1{,}30 + \tfrac{2}{32} \,.\, y = \tfrac{1}{32} \,.\, (41{,}6 + 2y);$$
$$p = 1{,}30 + 2y = \sqrt{1 + (\tfrac{1}{32})^2} = \tfrac{1}{32}\,(41{,}6 + 64{,}03 \,.\, y);$$
$$a = \frac{y}{2}\,(1{,}30 + x) = \frac{y}{32}\,)41{,}6 + y);$$
$$v = \frac{Q}{a} = \frac{0{,}80}{a}.$$

$$\text{Daher } \Delta l = \frac{32 \,.\, a - \dfrac{v^2}{2g}\,(83{,}2 + 4y)}{(41{,}6 + 64{,}03 \,.\, y)\,(Av + Bv^2)} \,.\, \Delta y.$$

[1]) Belanger, Essai etc. Nr. 28.

Von $y = 0^m,4$ anfangend und um $0^m,1$ fortschreitend, hat **Belanger** nach und nach folgende Tabelle berechnet, welche, mit Rücksicht auf vorstehenden Ausdruck für Δl, von selbst verständlich ist.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
y	$32 . a$	$v = \frac{25,6}{32 . a}$	$\frac{v^2}{2g}$	$83,2 + 4y$	Producte der Columnen 4 und 5 $= P$	$32a - P$	$32p = 41,6 + 64,03y$	$Av + Bv^2$	Nenner des Ausdruckes $\frac{\Delta l}{\Delta y}$ oder Product aus 8 und 9	$\frac{\Delta l}{\Delta y}$ oder Quotient aus 7 durch 10	Abstände der auf einander folgenden Tiefen
$0^m,40$	16,80	1,523	0,1182	84,80	10,0234	6,7766	67,212	0,0008848	0,059469	114	23^m
0,50	21,95	1,216	0,0753	85,20	6,4156	14,6344	73,615	0,0005701	0,041968	349	50
0,60	25,32	1,011	0,0521	85,60	4,4598	20,8602	80,018	0,0003982	0,031863	655	84
0,70	29,61	0,865	0,03814	86,00	3,2800	26,3300	86,421	0,0002945	0,025451	1035	126
0,80	33,92	0,755	0,02906	86,40	2,5108	31,4092	92,824	0,0002267	0,021043	1493	176
0,90	38,25	0,669	0,02281	86,80	1,9799	36,2701	99,227	0,0001798	0,017841	2033	234
1,00	42,60	0,601	0,01841	87,20	1,6054	40,9946	105,630	0,0001466	0,015485	2647	299
1,10	46,97	0,545	0,01514	87,60	1,3263	45,6437	112,033	0,0001218	0,013646	3345	373
1,20	51,36	0,498	0,01242	88,00	1,0930	50,2670	118,436	0,0001027	0,012163	4133	455
1,30	55,77	0,459	0,01074	88,40	0,9494	54,8260	124,839	0,0000881	0,010998	4985	545
1,40	60,20	0,425	0,00921	88,80	0,8178	59,3832	131,242	0,0000763	0,010014	5930	643
1,50	64,65	0,396	0,00799	89,20	0,7127	63,9373	137,645	0,0000670	0,009222	6932	749
1,60	69,12	0,370	0,00698	89,60	0,6254	68,4946	144,038	0,0000590	0,008498	8060	863
1,70	73,61	0,348	0,00617	90,00	0,5553	73,0547	150,441	0,0000527	0,007928	9215	
									Summa, d. i. $l = 4620^m$		

Es bedarf hiernach keiner Erörterung, welcher Auflösungsmethode man den Vorzug geben wird.

§. 147.

Ein etwas allgemeinerer Ausdruck, wie der des vorigen Paragraphen, läßt sich durch direcţe Integration von IV, §. 144, unter Voraussetzung erhalten, daß i und k constante Größen sind.

Zuerst kann man nämlich schreiben:

$$i\,.\,dl = \frac{y^3 - \dfrac{Q^2}{gb^2}}{y^3 - \dfrac{pQ^2}{{}^3k^2}} \cdot dy, \text{ oder auch:}$$

$$i\,.\,dl = \left[1 + \frac{\dfrac{pQ^2}{ib^3k^2} - \dfrac{Q^2}{gb^2}}{y^3 - \dfrac{pQ^2}{ib^3k^2}}\right] dy.$$

Ferner setze man $\frac{pQ^2}{ib^3k^3} = D^3$, $\frac{Q^2}{gb^2} = E^3$, wo D und E als bekannte Werthe anzunehmen sind, so daß erhalten wird:

$$i\,.\,dl = \left[1 + \frac{D^3 - E^3}{y^3 - D^3}\right] dy,$$

hieraus aber, wenn Y wieder stromaufwärts die (größte) Tiefe am Ende der Strecke l bezeichnet:

$$i\,.\,l = (y - Y) + (D^3 - E^3) \int_Y^y \frac{dy}{y^3 - D^3}\,.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche erhält man aber:

$$\frac{1}{y^3 - D^3} = \frac{1}{3D^2\,(y - D)} - \frac{2D + y}{3D^2\,(y^2 + Dy + D^2)},$$

daher:

$$i\,.\,l = (y - Y) + \frac{D^3 - E^3}{3D^2} \int_Y^y \frac{dy}{y - D} - \frac{D^3 - E^3}{3D^2} \int_Y^y \frac{(2D + y)\,.\,dy}{(y^2 + Dy + D^2)},$$

so wie nach vollständiger Ausführung der Integration:

$$\text{I.}\quad l = \frac{y - Y}{i} + \frac{D^3 - E^3}{3\,.\,i\,.\,D^2} \Big\{ \tfrac{1}{2}\,\text{Lgnt}\left[\left(\frac{y - D}{Y - D}\right)^3 \frac{Y^3 - D^3}{y^3 - D^3}\right] +$$

$$\tfrac{1}{2}\,\text{arc}\left[\text{tg} = \frac{D\,(Y - y)\sqrt{3}}{D\,(2D + Y) + y\,(2Y + D)}\right]\Big\}.\text{[1]}$$

---

[1]) Es ist $\int \frac{dy\,(2D + y)}{y^2 + Dy + D^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy\,(2y + D)}{y^2 + Dy + D^2} + \frac{1}{2} \int \frac{3D\,.\,dy}{y^2 + Dy + D^2}$, ferner:

$$\int \frac{dy\,(2y + D)}{y^2 + Dy + D^2} = \text{Lgnt}\,(y^2 + Dy + D^2) + \text{Const., so wie}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + Dy + D^2} = \frac{2}{D\sqrt{3}}\,\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{2y + D}{D\sqrt{3}}\right) + \text{Const.}$$

(In letzterem Falle zur Integration $y = u\,\frac{D}{2}$ gesetzt.)

Beispiel. Am Hamelner Wehre maß Funk[1]) die Wassertiefe der Weser 9,497 Fuß, während 3300 Cubikfuß Wasser über dasselbe flossen. Ferner betrug die Wassertiefe des natürlichen (nicht gestauten) Flusses, da wo die Bewegung (ziemlich) gleichförmig war, 2,40 Fuß und die mittlere Geschwindigkeit $v = 2,94$ Fuß, ferner war die Flußbreite an letzterer Stelle 467,69 Fuß und das Gefälle pro Längeneinheit $\frac{1}{2253}$. Es fragt sich, in welcher Entfernung stromaufwärts die Wassertiefe 7,4 Fuß betrug?

Auflösung. Es ist hier, mit Bezug auf I: $Q = 3300$; $v = 2,94$; $a = \frac{Q}{v} = 1122\square',4$; $b = 467,69$; $p = 467,69 + 4,8 = 472,49$; $i = \frac{1}{2253}$, $k = 97,847$, $g = 31,25$, und daher:

$$D^3 = \frac{pQ^2}{ib^3k^2} = 11,56,$$
$$D^2 = 5,114,$$
$$D = 2,261.$$

Ferner: $E^3 = \frac{Q^2}{gb^2} = 1,59312$; $Y = 2,4$; $y = 9,497 - 2,40 = 7,097$.

$$\text{Daher } \int \frac{dy}{y^3 - D^3} = \frac{1}{3D^2} \text{ Lgnt } (y - D) - \frac{1}{6D^2} \text{ Lgnt } (y^2 + Dy + D^2) - \frac{1}{D^2 \sqrt{3}} \text{ arc } \left(\text{tg} = \frac{2y + D}{D\sqrt{3}}\right) + \text{Const.}$$

oder auch:

$$\int \frac{dy}{y^3 - D^3} = \frac{1}{3D^2} \text{ Lgnt } (y - D) - \frac{1}{3D^2} \text{ Lngt } \sqrt{y^2 + Dy + D^2} - \frac{1}{D^2 \sqrt{3}} \text{ arc } \left(\text{tg} = \frac{2y + D}{D\sqrt{3}}\right) + \text{Const.}$$

Daher mit Beachtung der Grenzen:

$$\int_Y^y \frac{dy}{y^3 - D^3} = \frac{1}{3D^2} \left\{ \text{Lgnt } \frac{y - D}{Y - D} \frac{\sqrt{Y^2 + DY + D^2}}{\sqrt{y^2 + Dy + D^2}} - \sqrt{3} \left[\text{arc} \left(\text{tg} = \frac{2y + D}{D\sqrt{3}}\right) - \text{arc} \left(\text{tg} = \frac{2Y + D}{D\sqrt{3}}\right) \right] \right\},$$

oder nach fernerer Zusammenziehung und mit Rücksicht auf die Form:

$$\text{arc} \left(\text{tg} = \frac{m}{p}\right) - \text{arc} \left(\text{tg} = \frac{n}{p}\right) = \text{arc} \left\{\text{tg} = \frac{mq - np}{pq + mn}\right\}.$$

$$\int_Y^y \frac{dy}{y^3 - D^3} = \frac{1}{3D^2} \left\{ \tfrac{1}{2} \text{ Lgnt } \left(\frac{y - D}{Y - D}\right)^3 \left(\frac{Y^3 - D^3}{y^3 - D^3}\right) - \sqrt{3} \text{ arc } \left[\text{tg} = \frac{D(Y - y)\sqrt{3}}{D(2D + Y) + y(2Y + D)}\right] \right\}.$$

[1]) Darstellung der wichtigsten Lehren der Hydrotechnik etc., S. 185. Des Vergleiches mit der Funk'schen Originalarbeit wegen, behält der Verfasser hier die rhnl. (preußischen) Maaße bei. Bekanntlich ist 1 Meter = 3,186 solcher Fuße und 1 Cubikmeter = 32,346 Cubikfuß rhnl.

Daher also:

$$l = \frac{9,497 - 7,400}{\frac{1}{2253}} + \frac{11,56 - 1,593}{3 \cdot \frac{1}{2253} \cdot 5,114} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{Lgnt} \left[\left(\frac{9,497 - 2,261}{7,40 \quad - 2,261} \right)^3 \left(\frac{405,22 - 11,56}{856,56 - 11,56} \right) \right] - \\ - \sqrt{3} \left[\text{arc} \left(\text{tg} = \frac{2,261 \cdot 2,097 \cdot 1,732}{26,956 \cdot 162,028} \right) \right] \end{array} \right\};$$

$$l = 2253 \{ 2,097 + 0,65 [\tfrac{1}{2} (0,263) - 1,732 \cdot \text{arc}\ 2^\circ 30'] \};$$

$$l = 2253 (2,097 + 0,0367) = 2253 \cdot 2,1337;$$

$$l = 4807 \text{ Fuß.}$$ [1]

Im vierten Capitel, bei der Berechnung der sogenannten Stauweiten, kommen wir auf dies Beispiel zurück, wobei ein außerordentlich kurzes Verfahren zur Auflösung angewandt werden wird.

Viertes Capitel.

Stauhöhe und Stauweite bei Einbauen in Canälen und Flüssen.

§. 148.

Jede Beschränkung, Erhöhung oder jeder Einbau im Bette eines Canales oder Flusses, erzeugt eine Erhebung (einen Aufstau) der Schichten und beziehungsweise der Oberfläche des fließenden Wassers. Die Größe dieser Erhebung über den natürlichen Wasserspiegel nennt man die Stauhöhe und die Länge, auf welche sie sich stromaufwärts fortpflanzt, die Stauweite.

Hier kann nur von regelrechten, künstlichen Einbauen im Wasserbette die Rede sein, welche sich entweder über die ganze Breite oder nur über einen Theil derselben erstrecken. Zur ersten Classe gehören die dichten Wehre, bei denen man wieder vollkommene und unvollkommene Ueberfallwehre, so wie Durchlaß- und Schleusenwehre unterscheidet; zur zweiten Classe rechnet man die lichten Wehre, Buhnen, Parallelwerke und Brücken, wenn die Pfeiler der letzteren in den Strom eingebaut sind.

Im Nachstehenden beantworten wir die Fragen, welche sich auf Berechnung der Stauhöhe und Stauweite aller dieser Einbaue beziehen.

§. 149.

Stauhöhe.

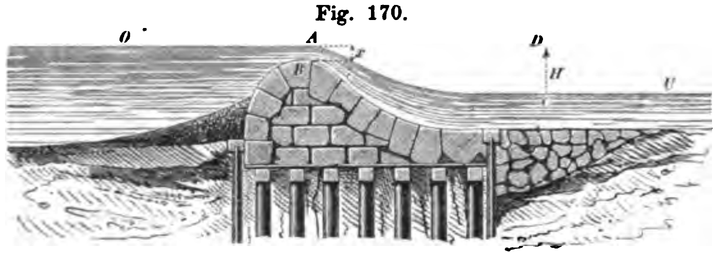
Stauhöhe bei vollkommenen Ueberfallswehren, d. h. bei Wehren, woselbst der Unterwasserspiegel U, Fig. 170, stets unter der Wehrkrone (dem Fachbaume) B liegt.

---

[1] Zum Vergleiche betreffender Formeln ist dies Zahlenbeispiel absichtlich der Maschinenencyklopädie, Bd. 2, S. 190, entlehnt, woselbst Weisbach, aus einer Gleichung anderer Form, $l = 4826$ Fuß berechnet.

Es sei $CD = H$ die durch das Wehr erzeugte oder hervorzubringende Stauhöhe, oder die Differenz der Wasserspiegel U hinter und O vor dem Wehre, ferner b die Breite der Wehrkrone

Fig. 170.



(Fachbaumlänge), so wie $\overline{AB} = x$ die Tiefe der Ueberfallsstelle B unter dem gestauten, aber ungesenkten Wasserspiegel O, und endlich c die mittlere Geschwindigkeit im größten Stauprofile vor dem Wehre.

Sodann erhält man zunächst, nach §. 111, für die pro Secunde über das Wehr fließende Wassermenge $= q$:

$$(1) \quad q = \tfrac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left\{ \left(x + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} \right\},$$

oder wenn c klein genug ist:

$$(2) \quad q = \tfrac{2}{3} \mu b x \sqrt{2gx}.$$

Verlangt man nun in einem bestimmten Falle, die zur Erzeugung der Stauhöhe H erforderliche Höhe $= z$ der Wehrkrone über dem ungestauten Wasserspiegel, d. i. die Größe $H - x = z$ zu kennen, so ergiebt sich aus (1):

$$\text{I.} \quad z = H + \frac{c^2}{2g} - \left\{ \left(\frac{3q}{2\mu b \sqrt{2g}}\right) + \left(\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}},$$

so wie die Wehrhöhe $= \eta$ über der Sohle des Flußbettes, wenn e die Tiefe des natürlichen, ungestauten Stromes ist:

$$\text{II.} \quad \eta = e + H + \frac{c^2}{2g} - \left\{ \left(\frac{3q}{2\mu b \sqrt{2g}}\right) + \left(\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}}.$$

Ist dann B die natürliche Flußbreite vor dem Wehre, im größten Stauprofile, wobei $B \gtreqless b$ sein kann, so ist:

$$c = \frac{Q}{B(e+H)},$$

wenn Q die Wassermenge des Flusses oberhalb bezeichnet, die gleich q ist, sobald vor dem Wehre keine Wasserabführung erfolgt.

Nach Eytelwein[1]) soll man für Ueberfälle mit Flügelwänden und wenn die Ueberfallskante gehörig abgerundet ist, $\mu = 0{,}855$ oder $\frac{2}{3}\mu = 0{,}570$ nehmen. Bei Ueberfällen ohne Flügelwände räth derselbe Hydrauliker $\mu = 0{,}632$ zu setzen. Nach Weisbach's Versuchen soll sich, für den ersten Fall, $\mu = 0{,}8$ ergeben haben

[1]) Handbuch der Mechanik und Hydraulik, 2. Auflage, S. 115 und 181.

Beispiel. In einem Flusse, welcher 11,68 Meter Breite und 1,46 Meter mittlere Tiefe hat und pro Secunde 7,47 Cubikmeter Wasser abführt, will man ein vollkommenes Ueberfallswehr von 14,6 Meter Breite an einer Stelle einbauen, woselbst kein größerer Stau als 0,73 Meter gestattet wird, aber 1,84 Cubikmeter Wasser pro Secunde in einen Seitengraben zum Beaufschlagen eines Wasserrades abgeführt werden sollen. Man soll die Höhe der Wehrkrone über der Flußsohle berechnen.

Auflösung. Zuerst ist hier, um c zu berechnen, $Q = 7^{cbm},47$, $e = 1^m,46$, $B = 11^m,68$, $H = 0^m,73$, also:

$$c = \frac{7,47}{11,68\,(1,46 + 0,73)} = \frac{7,47}{25,58} = 0.292,$$

daher wegen $g = 9^m,81$ und $\frac{1}{2g} = 0,051$:

$$\frac{c^2}{2g} = 0,004348,$$

folglich, wenn man überdies Flügelwände voraussetzt und $\mu = 0,855$ nimmt, ferner beachtet, daß $q = 7,47 - 1,84 = 5,63$ Cubikmeter ist, nach II:

$$\eta = 1,46 + 0,73 + 0,004348 - \left\{\frac{3\,.\,5,63}{2\,.\,0,835\,.\,14,6\,.\,4,43} + (0,004348)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{2}{3}},$$

$$\eta = 2,194348 - [0,1527 + 0,0002596]^{\frac{2}{3}}, \text{ d. i.:}$$

$$\eta = 2,194348 - 0,2870 = 1^m,907348.$$

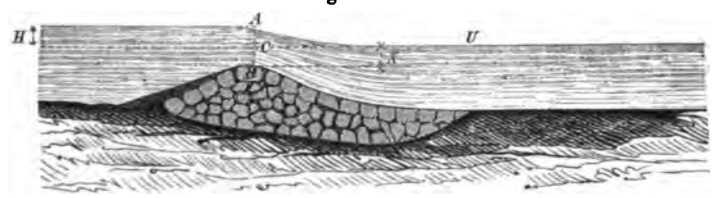
Aus den letzteren (Zahlen-) Gleichungen ist zugleich zu entnehmen, welchen geringen Einfluß auf die Wehrhöhe die Geschwindigkeit ($= c$) im größten Stauprofile vor dem Wehre hat.

§. 150.

Stauhöhe bei unvollkommenen Ueberfallswehren (Grundwehren), d. h. bei solchen Wehren, wo der Wasserspiegel des Unterwassers stets über der Wehrkrone liegt.

Bezeichnet x die Tiefe der Wehrkrone B, Fig. 171, unter dem

Fig. 171.



ursprünglichen, ungestauten Wasserspiegel und H die Stauhöhe, d. h. die Differenz der Wasserspiegel O und U, so erhält man zuvörderst unmittelbar aus I, §. 114, woselbst die Geschwindigkeit c des ankommenden Wassers vernachlässigt ist, für die pro Secunde über das Wehr fließende Wassermenge $= Q$:

$$\text{I.} \quad Q = \tfrac{2}{3}\mu_1 bH\sqrt{2gH} + \mu_2 bx\sqrt{2gH}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\text{II.} \quad x = \frac{Q}{\mu_2 b\sqrt{2gH}} - \frac{2}{3}\frac{\mu_1}{\mu_2} . H.$$

Setzt man mit Weisbach $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}8$, so folgt:

$$(1) \quad x = \frac{Q}{0{,}8 . b\sqrt{2gH}} - 0{,}66 . H.$$

Nimmt man dagegen mit Redtenbacher[1]) $\mu_2 = 0{,}62$ und $\mu_1 = 0{,}855$, so folgt:

$$(2) \quad x = \frac{Q}{0{,}62 . b\sqrt{2gH}} - 0{,}92\, H.$$

Die Höhe η der Wehrkrone über dem Flußbette berechnet sich sonach, wenn e wiederum die natürliche, ungestaute Wassertiefe des Flusses ist, zu:

$$\eta = e - x, \text{ d. i.}$$

$$\text{III.} \quad \eta = e - \frac{Q}{\mu_2 b\sqrt{2gH}} + \frac{2}{3}\frac{\mu_1}{\mu_2} H.$$

Beispiel. Es ist die Höhe η eines Grundwehres über der Flußsohle unter der Voraussetzung zu berechnen, daß $e = 1^m{,}17$, $b = 8^m{,}76$, $H = 1^m{,}17$ und die pro Secunde abfließende Wassermenge 32,72 Cubikmeter ist.

Auflösung. Unter der Voraussetzung, daß $\sqrt{2g} = 4{,}43$ ist, erhält man aus (1):

$$x = \frac{32{,}72}{0{,}8 . 8{,}76 . 4{,}43 . \sqrt{1{,}17}} - 0{,}66 . 1{,}17, \text{ d. i.:}$$

$$x = 0{,}97 - 0{,}77 = 0^m{,}20$$

und folglich als Wehrhöhe:

$$\eta = 1{,}17 - 0{,}20 = 0^m{,}97.$$

Dagegen findet man aus (2):

$$x = \frac{32{,}72}{0{,}62 . 8{,}76 . 4{,}43 . \sqrt{1{,}17}} - 0{,}92 . 1{,}17, \text{ oder}$$

$$x = 1{,}2577 - 1{,}0764 = 0^m{,}1813.$$

und weiter:

$$\eta = 1{,}170 - 0{,}1813 = 0^m{,}9887.$$

§. 151.

Stau bei Durchlaß- oder Schleusenwehren, Fig. 172. Hierbei sind folgende drei Fälle zu unterscheiden.

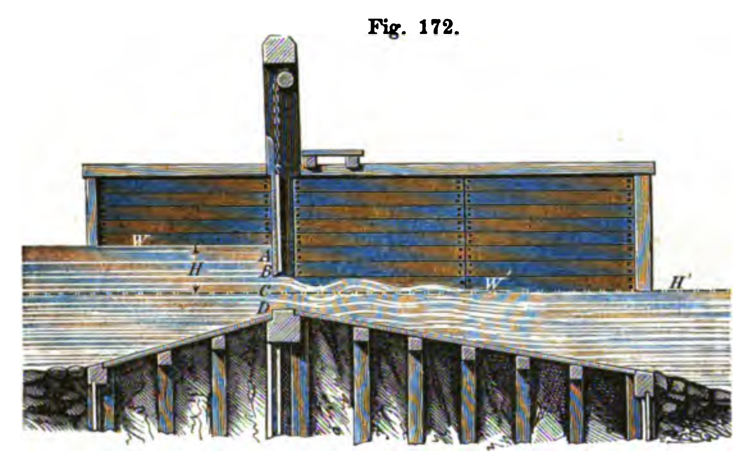
Erster Fall. Der Wasserspiegel W des ungestauten Wassers geht durch die Ausflußöffnung CB, oder, was dasselbe ist, das

[1]) Resultate für den Maschinenbau, 6. Auflage, S. 114, Nr. 148.

Niveau des Unterwassers liegt bei C unterhalb der oberen Kante B der Schützenmündung, so daß ein Theil Wasser (durch BC) frei in die Luft strömt, ein anderer Theil unter Wasser (durch CD) ausfließt.

Ist hierbei $\overline{BC} = e_1$, $\overline{CD} = e_2$ und sind μ_1 und μ_2 die be-

Fig. 172.



treffenden Ausflußcoefficienten, ferner b die lichte Weite der rectangulären Mündung und endlich H die Stauhöhe, oder die Differenz zwischen dem Oberwasserspiegel W und dem Unterwasserspiegel W', so erhält man für die durch BC pro Secunde strömende Wassermenge $= q_1$:

$$q_1 = \mu_1 b e_1 \sqrt{2g\left(H - \tfrac{1}{2} e_1\right)},$$

so wie für das durch $\overline{CD}$ fließende Wasser $= q_2$:

$$q_2 = \mu_2 b e_2 \sqrt{2gH}.$$

Die Gesammtmenge $= Q = q_1 + q_2$ ist sonach:

$$\text{I.} \quad Q = b\sqrt{2g}\left\{\mu_1 e_1 \sqrt{\left(H - \tfrac{1}{2} e_1\right)} + \mu_2 e_2 \sqrt{H}\right\},$$

wobei die Geschwindigkeit $= c$, womit das Wasser vor der Mündung ankommt, abermals vernachlässigt ist.

Mit Berücksichtigung der Letzteren erhält man:

$$\text{II.} \quad Q = b\sqrt{2g}\left\{\mu_1 e_1 \sqrt{\left(H - \tfrac{1}{2} e_1\right) + \frac{c^2}{2g}} + \mu_2 e_2 \sqrt{H + \frac{c^2}{2g}}\right\}.$$

Zweiter Fall. Die Mündung $\overline{BD}$ ist ganz unter Wasser gesetzt. (Man sehe auch Fig. 108, S. 273.) Ist hierbei $b\,(e_1 + e_2) = \omega$ der Flächeninhalt von $\overline{BD}$, ferner A der Inhalt des Wasserprofils in $\overline{AB}$, unmittelbar vor der Mündung, so läßt sich der Ausfluß so betrachten, als träte das Wasser durch den Querschnitt A in ein Gefäß und durch eine Mündung vom Inhalte $\alpha\omega$ aus demselben, so daß man die betreffende Geschwindigkeit $= v$ in der Mündung $\overline{BD}$, nach I, S. 208, erhält:

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{\alpha^2\omega^2}{A^2}}},$$

wo H die Differenz zwischen Ober- und Unterwasserspiegel, d. i. die Stauhöhe, bezeichnet.

Da ferner $v = \frac{Q}{\alpha\omega}$, so ergiebt sich auch aus (1):

$$\text{II.} \quad H = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{\mu^2\omega^2} - \frac{1}{A^2}\right]\text{[1]}$$

oder, wenn e die ungestaute Wassertiefe bezeichnet und wegen $A = b(H+e)$:

$$\text{II}^a. \quad H = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{e^2\omega^2} - \frac{1}{b^2(H+e)^2}\right],$$

ferner aus II:

$$\text{II}^b. \quad \omega = \frac{Q}{\mu\sqrt{2gH + \left(\frac{Q}{A}\right)^2}}.$$

Dritter Fall. Der Fachbaum des Schleusenwehres liegt über dem Spiegel des Unterwassers.

In diesem Falle ist gleichfalls von II. und II^a. Gebrauch zu machen, nur daß dabei H die Druckhöhe über der Mitte der Schützenöffnung bis zum Oberwasserspiegel darstellt[2]).

Beispiel. Wie hat man den Querschnitt der Schützenöffnung bei einem Schleusenwehre zu nehmen, wenn die Mündung ganz unter Wasser steht, die gestattete Stauhöhe $0^m,50$ betragen darf, die Tiefe des ungestauten Wassers $0^m,8$, ferner die Breite $4^m,0$ und endlich die mittlere Geschwindigkeit im Profile von letzteren Dimensionen $0^m,75$ ist?

Auflösung. Wegen aufgehobener Contraction an der unteren Kante der Ausflußöffnung, nehmen wir $\alpha = 0,650$, so wie den gegebenen Werthen entsprechend:

$$Q = 4 \,.\, 0,8 \,.\, 0,75 = 2^{cbm},40;\ H + e = 0,5 + 0,8 = 1^m,3.$$

$$A = 4 \,.\, 1,3 = 5\square^m,2, \text{ weshalb aus II}^b\text{. folgt:}$$

$$\omega = \frac{2,4}{0,65\sqrt{2 \,.\, 9,81 \,.\, 0,5 + \left(\frac{2,4}{5,2}\right)^2}} = 1\square^m,16.$$

§. 152.

Zur noch weiteren Anwendung der bis jetzt zur Beantwortung von Fragen über Stauhöhen gewonnenen Resultate, so wie um die

---

[1]) Diese Gleichung läßt sich auch unmittelbar aus §. 143 ableiten, wenn man daselbst $Av + Bv^2$ gleich Null setzt, ein Umstand, der zugleich Anlaß zu der Ansicht gegeben hat, man könne ohne Weiteres das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte auf Fälle gegenwärtiger Art, d. h. auf Bewegungen, wo plötzliche Geschwindigkeitsänderungen vorkommen, anwenden.

[2]) Die gute Uebereinstimmung dieser Formeln mit der Erfahrung zeigen auch Lesbros: Expériences hydrauliques etc. Paris 1851, Pag. 195.

besondere Wichtigkeit des Gegenstandes bei Anlage der Wassergräben und Gerinne zum Beaufschlagen der Wasserräder für den Gewerb- und Fabrikbetrieb darzuthun, lösen wir nachstehende Aufgabe [1]).

„Die Maschinen einer Baumwollspinnerei von 12000 Feinspindeln (Garn Nr. 40) sollen durch eine Turbine und zwar an einer Stelle in Bewegung gesetzt werden, woselbst ein betreffender Fluß bei 10 Meter Breite, ein natürliches Gefälle von $2^m,459$ besitzt, während derselbe bei Hochwasser pro Secunde 7,0 Cubikmeter, bei Kleinwasser aber nur 2 Cubikmeter pro Secunde abführt und dabei die Wasserstände um $0^m,43$ variiren.

Die Terrainverhältnisse, die angeführte Differenz der Wasserstände und die möglichst vortheilhafte Disposition der ganzen Anlage, machen die Herstellung eines Wehres und das Ausheben eines Canales von 1000 Meter Länge wünschenswerth, wobei zu beachten ist, daß höchstens 1 Meter Stau gestattet wird und die größte Differenz der Wasserstände oberhalb des Wehres nicht mehr als $0^m,24$ betragen darf. Man soll die betreffenden Canal- und Wehrdimensionen berechnen.“

Rechnet man auf jede Maschinenpferdekraft 300 Feinspindeln, so ist eine Nutzarbeit von 40 Pferdekräften zu entwickeln. Garantirt man ferner einen Wirkungsgrad der Turbine von 0,70, bezeichnet die pro Secunde erforderliche Wassermenge mit q und das Totalgefälle mit h, so erhält man: .

$$40 \,.\, 75 = 0,7 \,.\, 1000 \,.\, q \,.\, h, \text{ d. i.}$$

$$\frac{30}{7} = q \,.\, h$$

Da man der Aufgabe nach mit Sicherheit stets auf 1,5 Cubikmeter Wasser pro Secunde rechnen kann, so wäre ein Nutzgefälle erforderlich von:

$$h = \frac{30}{7 \,.\, 1,5} = \frac{300}{105}$$

oder in runder Zahl von

$$h = 3^m,0.$$

Zur Beurtheilung des nothwendigen Totalgefälles berechnen wir zunächst das dem Canale zu gebende Gefälle, der, bei 1000^m Länge, pro Secunde 1,5 Cubikmeter Wasser abzuführen hat.

Hierzu sei die mittlere Geschwindigkeit des Wassers $v = 0^m,5$ und nach S. 432 die Breite des Wasserprofiles gleich der doppelten Tiefe, oder $b = 2e$. Der Inhalt des Querschnittes also

$$a = \frac{q_1}{v} = \frac{1,5}{0,5} = 3\square^m$$

und daher $e = 1^m,2245$, so wie $b = 2^m,449$ und ferner der Wasserperimeter $p = b + 2e = 4^m,898$.

Nimmt man daher, bei Benutzung der Chezy-Eytelwein'schen Formel $v = k\sqrt{\frac{a}{p}\frac{\eta}{l}}$, den Coefficienten k (mit Redtenbacher)

[1]) Es ist diese Aufgabe einer in Redtenbacher's „Theorie und Bau der Wasserräder“, S. 218, nachgebildet.

zu 50,25 an, so ist, wenn η das absolute Gefälle bezeichnet:

$$\eta = \frac{v^2}{k^2} \frac{p}{a} \, . \, l$$

$$\eta = \tfrac{1}{4} \, . \, \tfrac{1}{2525} \, . \, 1{,}632 \, . \, 1000 = 0^m{,}162.$$

Um sowohl den Gefällverlust beim Eintritte des Wassers in den Canal (§. 140) in Anschlag zu bringen, als auch, um selbst beim niedrigsten Wasserstande die erforderliche Wassermenge mit Sicherheit für den Motor zu erhalten, legen wir den Wasserspiegel im Canale 0,2 unter den des Flusses, bedürfen folglich ein Totalgefälle von

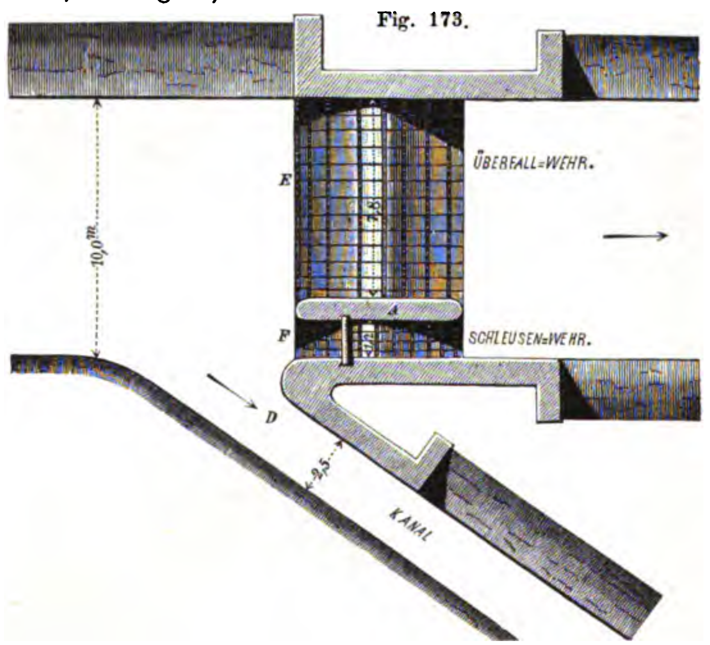
$$3 + 0{,}162 + 0{,}2 = 3^m{,}362.$$

Da jedoch blos 2,459 natürliches Gefälle vorhanden sind, so ist durch den Wehrbau eine Stauhöhe zu erzeugen:

$$3{,}362 - 2{,}459 = 0^m{,}903.$$

Da nun, trotz des veränderlichen Wasserzuflusses, der Wasserstand oberhalb des Wehres höchstens um 0,24 differiren soll, so ist es am angemessensten, ein Ueberfall-Schleusenwehr, Fig. 173 bis mit 173[c], anzulegen[1]).

Fig. 173.



Hierzu werde ferner angenommen, daß der Fachbaum B des Schleusenwehres, Fig. 173[c], mit dem höchsten Wasserstande unter-

---

[1]) In der Grundrißfigur ist 1 Meter Länge durch $3\frac{1}{2}$ Millimeter, in den doppelt so großen Durchschnittsfiguren (173[a] rechtwinklig zum Stromstrich, 173[b] und 173[c] in der Längenrichtung durch Ueberfall- und Schleusenwehr) 1 Meter durch 7 Millimeter dargestellt.

halb des Wehres in einerlei Niveau, also $0^m,43$ über dem Stande des Kleinwassers, oder $1^m,43$ über der Flußsohle liege.

Fig. 173a.

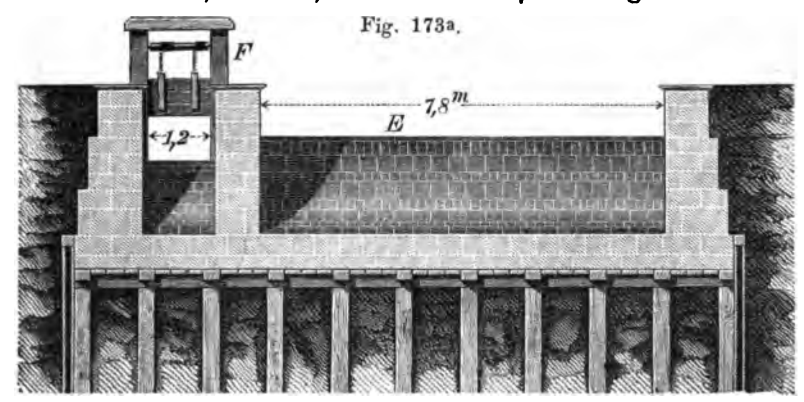


Fig. 173b.

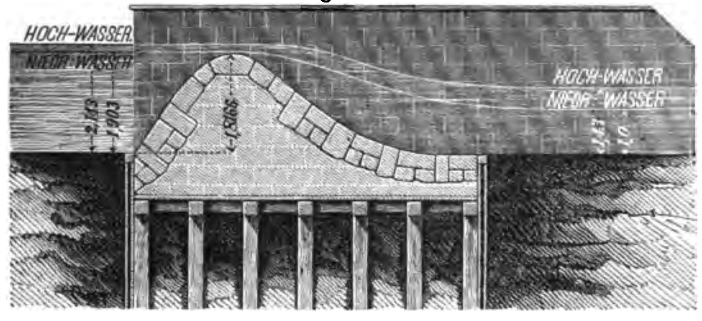
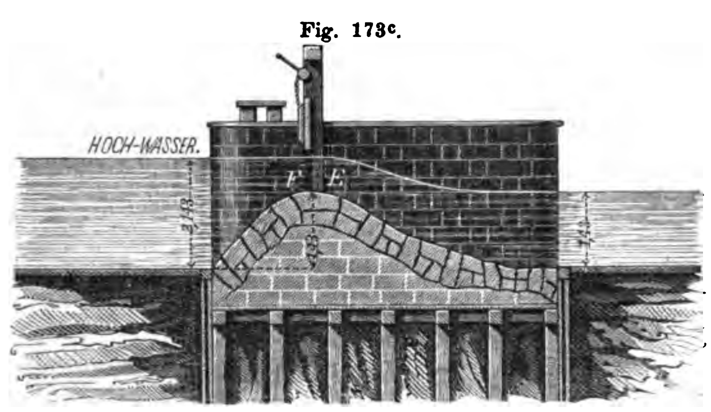


Fig. 173c.



Vernachlässigt man die Geschwindigkeit des ankommenden Wassers, setzt die Pfeilerdicke A, Fig. 173, gleich einem Meter, beachtet, daß beim Kleinwasser über das vollkommene Ueberfall-wehr E, Fig. 173b, $2,0 - 1,5 = 0,5$ Cubikmeter Wasser gehen. (da

der Canal D, Fig. 173, 1,5 Cubikmeter Wasser aufzunehmen hat, dabei aber das Schleusenwehr F, Fig. 173[c], ganz geschlossen ist), so folgt, wenn x die Tiefe der Wehrkrone E unter dem gestauten Wasserspiegel bezeichnet und endlich y die lichte Weite des Schleusenwehres darstellt, nach §. 149 (Formel 2), den Coefficienten $\mu = 0{,}855$ angenommen:

$$(1) \quad 0{,}5 = 0{,}57\,(9 - y)\,x\sqrt{2gx} \text{ (bei Kleinwasser).}$$

Dagegen ist beim Hochwasser **über den Ueberfall** zu leiten die Wassermenge:

$$(2) \quad 0{,}57\,(9 - y)\,(x + 0{,}24)\sqrt{2g\,(x + 0{,}24)},$$

so wie gleichzeitig durch das ganz geöffnete Schleusenwehr, Fig. 173[c], die Wassermenge:

$$(3) \quad 0{,}57\,.\,y\,(0{,}903 + 0{,}24 - 0{,}43)\sqrt{2g\,(0{,}903 + 0{,}24 - 0{,}43)}.$$

Die Summe von (2) und (3) muß aber $7{,}0 - 1{,}5 = 5{,}5$ Cubikmeter betragen, weshalb erhalten wird:

$$(4) \quad 5{,}5 = 0{,}57\,(9 - y)\,(x + 0{,}24)\sqrt{2g\,(x + 0{,}24)} + 0{,}57\,y\,(0{,}713)\sqrt{2g\,(0{,}713)}.$$

Substituirt man hier: $9 - y = \frac{0{,}5}{0{,}57\,.\,x\sqrt{2gx}}$ und

$$(5) \quad y = 9 - \frac{0{,}5}{0{,}57\,.\,x\sqrt{2gx}} \text{ aus (1), so folgt:}$$

$$5{,}5 = \frac{0{,}5}{x\sqrt{2gx}}(x + 0{,}24)\sqrt{2g(x + 0{,}24)} + 9\,.\,0{,}57\,.\,0{,}713\sqrt{2g\,.\,0{,}713} - \frac{0{,}57\,.\,0{,}5\,(0{,}713)\sqrt{2g(0{,}713)}}{0{,}57\,.\,x\sqrt{2gx}}.$$

Hier mit $x\sqrt{x}$ multiplicirt, $\sqrt{2g} = 4{,}429$ gesetzt und zusammengezogen giebt:

$$5{,}5\,x\sqrt{x} = (0{,}5\,.\,x + 0{,}120)\sqrt{x + 0{,}24} + 13{,}6797\,.\,x\sqrt{x} - 0{,}300866,$$

$$\text{oder: } -8{,}17976\,.\,x\sqrt{x} = (0{,}5\,.\,x + 0{,}12)\sqrt{x + 0{,}24} - 0{,}300866,$$

so wie hieraus I. $x = 0^{m}{,}0864$.

Letzterer Werth in (5) gesetzt, liefert endlich:

$$\text{II.} \quad y = 9{,}0 - 7{,}8 = 1^{m}{,}2.$$

Die Breite des Ueberfallwehres ist sonach $7^{m}{,}8$, eine Größe, wonach auch unsere Figuren 173 bis 173[c] in bereits oben bemerktem, verjüngten Maßstabe aufgetragen sind.

Bei Hochwasser geht daher über das Wehr ein Wasserquantum pro Secunde von:

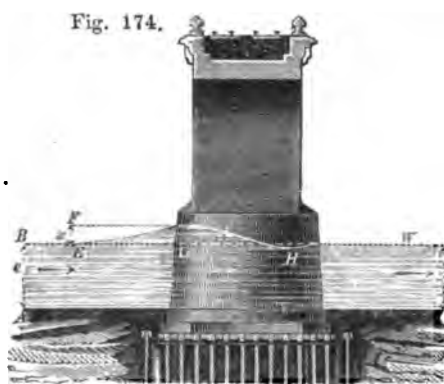
$$0{,}57\,.\,7{,}8\,(0{,}0864 + 0{,}24)\sqrt{2g\,(0{,}0864 + 0{,}24)} = 3{,}6727 \text{ Cubikmeter,}$$

so wie gleichzeitig durch das geöffnete Schleusenwehr:

$$5{,}5 - 3{,}6727 = 1{,}8273 \text{ Cubikmeter.}$$

§. 153.

Stauhöhe bei Brücken, Buhnen und Schleusen.


Fig. 174.

Es sei BW, Fig. 174, der natürliche, ungestaute Wasserspiegel, die größte Erhebung G des letzteren beim Eingange in die Brücke und die größte Senkung in H, während sich noch andere geringere Senkungen und Erhebungen in immer abnehmenden Wellen, außerhalb der Pfeiler, stromabwärts, bis zur Wiederherstellung des ursprünglichen Wasserspiegels wiederholen.

Nimmt man hier die betreffenden Staugesetze jenen bei den Grundwehren, §. 150, gleich an, setzt die ungestaute Wassertiefe $\overline{AB} = e$, die Stauhöhe $\overline{EF} = x$, bezeichnet mit B die natürliche Flußbreite, mit b die lichte Weite zwischen den Brückenpfeilern (oder dem Buhnenkopfe und dem gegenüberliegenden Ufer) und mit c die Geschwindigkeit des ankommenden Wassers in gestautem Profile vom Inhalte $B\,(x + e)$, so erhält man, mit Rücksicht auf I, §. 111, wenn außerdem $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ gesetzt wird:

$$\text{I.}\quad Q = \mu b \sqrt{2g}\left\{\tfrac{2}{3}\left(x + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}\left(\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} + e\sqrt{\left(x + \frac{c^2}{2g}\right)}\right\},$$

oder genau genug:

$$\text{II.}\quad Q = \mu b \sqrt{2g}\left\{\left(\tfrac{2}{3}x + e\right)\sqrt{x + \frac{c^2}{2g}}\right\}.$$

Hierbei ist $c = \frac{Q}{B(x+e)}$ oder, für die meisten Fälle genau genug: $c = \frac{Q}{Be}$ und $\frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{Be}\right)^2$, welcher letzterer Werth $= h$ gesetzt werden mag.

Zur Berechnung der Stauhöhe $= x$ reducirt man leicht aus II:

$$\text{III.}\quad 0 = x^3 + (h + 3e)x^2 + \left(\tfrac{9}{4}e^2 + 3eh\right)x - \left(\tfrac{9}{8}\frac{Q^2}{\mu^2 g b^2} - \tfrac{9}{4}he^2\right).$$

Nach Navier[1]) hat man bei Brückenöffnungen zu nehmen:

$\mu = 0{,}95$, wenn sich die Pfeiler in Halbkreisen oder spitzen Winkeln endigen;

$\mu = 0{,}90$, wenn der Horizontalschnitt des Vordertheils einen stumpfen Winkel bildet;

$\mu = 0{,}70$, wenn die Anfänger der Bögen ins Wasser tauchen, wie dies bei vielen kleinen Brücken der Fall ist.

Eytelwein[2]) räth zu nehmen:

---

[1]) Résumé des Leçons etc. Deuxième Partie, Pag. 108.

[2]) Hydraulik, 2. Auflage, §. 142.

$\mu = 0{,}954$ bei Brückenpfeilern mit spitzen Vordertheilen;
$\mu = 0{,}855$ bei Pfeilern mit geraden Vordertheilen.

Die Hintertheile der Brückenpfeiler sind abzurunden oder zuzuschärfen, will man beim Austritte aus den Pfeilern plötzliche Geschwindigkeitsveränderungen und demnach Verluste an lebendiger Kraft vermeiden, so wie gleichzeitig wirbelnde Bewegungen verhindern, welche nachtheilig auf das Grundbett einwirken.

Es sind diese Rücksichten um so nothwendiger, als die Geschwindigkeit, womit das Wasser aus den Pfeilern heraustritt, unter allen Umständen größer ist, als die Eintrittsgeschwindigkeit, wodurch zugleich stromabwärts eine größere Neigung des Wasserspiegels erzeugt wird, so wie eine geringere Wassertiefe und ein leichteres Angreifen des Bettes und der Bauwerke, welche letzteres einschließen.

Zusatz 1. Belanger[1]), d'Aubuisson[2]) und nach ihnen andere französische Schriftsteller, selbst der von Vielen als besondere Autorität betrachtete Bresse[3]), in seiner allerdings werthvollen Hydraulik (Sec. Part., Nr. 89), mit Ausnahme jedoch von Dupuit[4]), benutzen zur Berechnung von Stauhöhen in den fraglichen Fällen den I, §. 132, entwickelten Ausdruck, vernachlässigen jedoch (der betreffenden kurzen Strecke wegen) den Bettwiderstand und setzen, wenn x wiederum die Stauhöhe, ferner v und v_0 beziehungsweise die größte und kleinste Geschwindigkeit der Staustelle bezeichnet:

$$\text{IV.}\quad x = \frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}.$$

Hieraus würde die (allerdings) sehr einfache Regel folgen, daß die Stauhöhe gleich der Differenz der Druckhöhen ist, welche den größten und kleinsten Geschwindigkeiten der Staustelle entsprechen.

Statt IV. läßt sich auch schreiben, wenn Q die pro Secunde durch die Staustelle fließende Wassermenge darstellt und a, a_0 die Inhalte der betreffenden Profile:

$$x = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_0^2}\right],$$

oder, da in unserem Falle $a = \mu b e$, $a_0 = B\,(e + x)$ ist:

$$\text{V.}\quad x = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{(\mu b e)^2} - \frac{1}{B^2(e+x)^2}\right].$$

Zusatz 2. Zur Beurtheilung des practischen Werthes der bis jetzt aufgestellten Formeln benutzen wir zunächst Funk's hydrometrische Messungen an der Weserbrücke zu Minden[5]), wobei die ersten acht im Jahre 1804, die neunte aber 1799 bei einer sehr hohen Ueber-

---

[1]) Essai etc. Nr. 57.
[2]) Traité d'hydraulique, §. 172.
[3]) Cours de Mécanique appliquée. Seconde Partie. Hydraulique. Paris 1860.
[4]) Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes. Paris 1848 (Erste Ausgabe) und 1863 (Zweite Ausgabe), Nr. 91.
[5]) Hydrotechnik, S. 131.

schwemmung vorgenommen wurden. Sämmtliche Maaße sind preußische, wobei $g = 31{,}25$ Fuß, $\sqrt{2g} = 7{,}91$ ist.

Zu den betreffenden Rechnungen wandte Funk die Gleichung III. an, führte dabei jedoch $\psi \,.\, e$ statt e ein, wobei ψ einen Coefficienten bezeichnet, welcher die Abnahme der Geschwindigkeit von der Oberfläche nach dem Boden zu corrigiren soll.

Die natürliche Flußbreite B ist überall $= 576$ Fuß, der Coefficient $\psi = 0{,}85$.

Nr. der Funk'schen Versuche	Ungestaute Flußtiefe $= e$ in Fuß.	Wassermenge pro Sec. $= Q$ in Cubikf.	Ausflußcoefficient[1] $= \mu$	$k = \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{Be}\right)^2$	Summe der Brückenweite $= b$ in Fußen	Beobachtete Stauhöhe in Fußen	Berechnete Stauhöhe $= x$ in Fußen
722	4,540	1867	0,90	0,031	235	0,160	0,070
723	8,009	13972	0,90	0,243	270	0,666	0,750
724	12,396	25181	0,90	0,380	282	0,833	0,895
725	11,789	26409	0,90	0,400	291	0,944	1,005
726	10,680	23781	0,81	0,418	282	1,000	1,150
727	14,153	32208	0,81	0,474	311	1,101	1,075
728	15,618	36326	0,81	0,481	302	1,202	1,250
729	17,112	42625	0,81	0,501	306	1,222	1,325
730	17,896	76670	0,90	0,501	422	1,830	1,900

d'Aubuisson[2]) benutzt dieselben Versuche, um die practische Brauchbarkeit der Formel V. darzuthun (wobei 1 preußischer Fuß = 0,31385 Meter, 1 preußischer Cubikfuß = 0,0309158 angenommen ist).

Für Metermaaß ist $B = 180{,}71$, $\frac{1}{2g} = 0{,}051$.

Q in Cubikmet.	b in Metern	e in Metern	μ	x in Metern beobachtet	x in Metern berechnet
58,0	73,7	1,425	0,90	0,052	0,016
432,0	94,6	2,514	0,90	0,209	0,220
779,0	88,5	3,890	0,90	0,261	0,267
817,0	91,8	3,700	0,90	0,296	0,302
735,0	91,8	3,352	0,90	0,314	0,323
996,0	97,6	4,441	0,81	0,345	0,342
1123,0	94,8	4,901	0,81	0,377	0,383
1318,0	96,0	5,371	0,81	0,384	0,426
2370	132,4	5,671	0,81	0,540	0,559

[1]) Die Coefficienten μ sind wegen der Bollwerke, welche die Pfeiler umgeben, wegen der verschiedenen Gestaltungen der Vorpfeiler, wegen der davor gerammten Eisbrecher und endlich wegen des Einströmens des Wassers in die Bogen bei Hochwasser schwer zu bestimmen, weswegen sie hier so angegeben sind, wie sie am besten mit den Beobachtungen stimmen. (Anmerkung von Funk.)

[2]) Traité d'hydraulique, Pag. 206.

Aus beiden Tabellen erkennt man, daß die Formeln III. und V. den Umständen entsprechend, als für die Praxis brauchbar bezeichnet werden können.

Zusatz 3. Dubuat[1]) und Eytelwein[2]) entwickeln zur betreffenden Stauberechnung die Formel:

$$\text{VI.} \quad x = \frac{v^2}{\mu^2 \cdot 2g} \left[\left\{ \frac{B \cdot e}{b\,(e+x)} \right\}^2 - 1 \right],$$

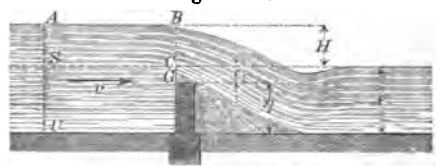
wobei v die Geschwindigkeit des Wassers im Profile $B \cdot e$ bezeichnet.

Wie aus einem nachfolgenden Beispiele (S. 474) erhellt, stimmen die Werthe für x nach dieser Formel nicht mit den Erfahrungswerthen der vorigen Tabellen, weshalb, bis zur weiteren Aufklärung des ganzen Gegenstandes, nicht zu rathen ist, letztere Gleichung in Anwendung zu bringen.

Zusatz 4. Wir entlehnen der für practische Fälle an Aufgaben so reichhaltigen Arbeit Weisbach's in Hülse's Maschinenencyklopädie, Artikel „Bewegung des Wassers" (S. 170 ff.), noch nachbemerkten Fall, mit Zuziehung der Abbildungen Fig. 174a und 174b.

Fig. 174a.

Fig. 174b.



Es soll nämlich, für Schiffahrtszwecke, die vorhandene Tiefe $= e$ eines Flusses, durch Einbau einer Buhne $FGKN$, von η Höhe um H aufgestaut und berechnet werden, welche Breite dem durch die noch vorhandene Oeffnung $GFLM$ fließenden Wasser noch verbleibt. Die normale Flußbreite ist $\overline{DE} = b$, die überhaupt fließende secundliche Wassermenge $= Q$, während μ der allgemeine Ausflußcoefficient sein mag. Die Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers sei $= c = \frac{Q}{b\,(H+e)}$. Endlich sei die unbekannte Buhnenlänge $FK = GN = b_1$.

Offenbar hat man hier drei verschiedene Wassermengen q_1, q_2 und q_3 zu berechnen, deren Summe $= Q$ sein muß. Hierzu sei:

1) q_1 die Wassermenge, welche durch das Profil $DBEJCH$ fließt. Für diese erhält man, ohne Weiteres, wenn $\frac{c^2}{2g} = h$ gesetzt wird:

$$q_1 = \tfrac{2}{3}\mu b \sqrt{2g} \left\{ (H+h)^{\frac{3}{2}} - (h)^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

2) Ferner sei q_2 die Wassermenge, welche noch außerdem über die Kappe GN, durch das Profil $CGNJ$ fließt. Dafür hat man:

$$q_2 = \mu b_1 (e - \eta) \sqrt{2g\,(H+h)} = \mu b_1 e_1 \sqrt{2g\,(H+h)}.$$

3) Demnach muß q_3 die Wassermenge sein, welche durch das Profil $HCFM$ fließt, wofür ist:

$$q_3 = \mu\,(b - b_1)\,e \sqrt{2g\,(H+h)}.$$

[1]) Principes, Nr. 158.

[2]) Hydraulik, §. 142.

Folglich ergiebt sich:

$$\text{VII. } Q = q_1 + q_2 + q_3 = \mu \sqrt{2g} \left\{ \tfrac{2}{3} b \left[(H+h)^{\frac{3}{2}} - (h)^{\frac{3}{2}} \right] + [b_1 e_1 + (b - b_1) e] \sqrt{(H+h)} \right\}.$$

Die erforderliche Buhnenlänge b_1 ist aber hiernach:

$$\text{VIII. } b_1 = \frac{\mu b \sqrt{2g} \left\{ \frac{2}{3} \left[(H+h)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right] + e \sqrt{H+h} \right\} - Q}{\mu \eta \sqrt{2g\,(H+h)}}.$$

Zusatz 5. Zur Warnung für eine allgemeine Anwendung vorstehender Formeln, bei practischen Rechnungen, unter allen Umständen und wenn man mehr von denselben verlangen will, als Annäherungswerthe, notirt hier der Verfasser betreffende Aussprüche der beiden bereits vorgenannten theoretischen und practischen Autoritäten Dupuit (Inspecteur Géneral des Ponts et Chaussées) und Bresse (Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur de Mécanique a l'École des Ponts et Chaussées).

Dupuit, a. a. O., Nr. 96 (Pag. 183 der Auflage von 1848 und Pag. 141 der Auflage von 1863), erklärt sich hier folgendermaßen:

„En résumé, les formules données jusqu'à présent pour calculer les remous produits par un étranglement brusque ne méritent aucune espèce de confiance, c'est une des nombreuses lacunes de l'hydraulique actuelle“ etc.

Bresse, a. a. O., Nr. 89 im Abschnitte „Gonflement produit par le passage d'une rivière sous un pont“ äußert sich wie nachstehend:

„Cette question, est extrêmement difficile à résoudre d'une manière satisfaisante. Il n'est guère possible d'analyser à fond le phénomène, à cause de sa complication: la loi suivant laquelle se contractent et s'épanouissent les filets fluides, l'influence de leur frottement mutuel et des mouvements tumultueux, sont des choses trés-imparfaitement connues et qui jouent ici le principal rôle. On n'est pas même completément d'accord sur la manière dont les faits se passent“ etc.

Beispiel 1. Wie groß ist die Stauhöhe bei einer Brücke (Fig. 174), wenn die durch die Pfeileröffnung pro Secunde fließende Wassermenge $Q = 996$ Cubikmeter beträgt, die natürliche Flußbreite $B = 180{,}71$ Meter, die Summe der Wasserdurchgangsweiten $b = 97{,}6$ Meter und die ungestaute Wassertiefe $e = 4{,}441$ Meter ist. Den Coefficienten $\mu = 0{,}81$ angenommen?

Auflösung. Es werde die Gleichung V. benutzt und zwar zu einer approximativen Berechnung, im zweiten Gliede derselben, der Werth x weggelassen, so daß man erhält:

$$x = \frac{Q^2}{2ge^2} \left[\frac{1}{(\mu b)^2} - \frac{1}{B^2} \right],$$

d. i. nach Substitution der gegebenen Zahlenwerthe:

$$x = \frac{0{,}051 \,.\, 992016}{19{,}722} \left[\frac{1}{(79{,}056)^2} - \frac{1}{(180{,}71)^2} \right],$$

d. i.:

$$x = 0^m{,}331.$$

Benutzt man letzteren Werth, für den Theil rechts der Gleichung V. zur ferneren Rechnung, so ergiebt sich schließlich:

$$x = 0^m,342.$$

Beispiel 2. Wie berechnet sich, nach der Dubuat-Eytelwein-schen Formel VI, der durch die vorhandenen Pfeiler erzeugte Stau, welcher an der Weserbrücke bei Minden entsteht, wenn daselbst $B = 576$ Fuß (rhnl.)[1]), $b = 311$ Fuß, $e = 14{,}153$ Fuß, $\mu = 0{,}81$ und $Q = 32208$ Cubikfuß ist, ferner $g = 31{,}25$ angenommen wird?

Auflösung. Nach Zusatz (3) ist wegen:

$$v = \frac{Q}{a} = \frac{32208}{576 \cdot 14{,}153} = 3{,}95 \text{ Fuß},$$

so wie $\frac{1}{\mu^2 . 2g} = \frac{1}{41}$ und $\frac{v^2}{\mu^2 . 2g} = \frac{15{,}6}{41} = 0{,}38$, zuerst annäherungsweise, indem man rechts x vernachlässigt:

$$x = 0{,}38 \left[\left(\frac{576 . 14{,}153}{311 . 25{,}053}\right)^2 - 1\right]$$

$$x = 0{,}38\,(3{,}43 - 1)$$

$$x = 0{,}9234 \text{ Fuß}.$$

Setzt man nunmehr $x + e = 15{,}076$ für den Zweck einer genaueren Rechnung, so folgt:

$$x = 0{,}38 \left[\left(\frac{576 . 14{,}153}{311 . 15{,}076}\right)^2 - 1\right]$$

$$x = 0{,}38\,(3{,}023 - 1)$$

$$x = 0{,}768 \text{ Fuß}.$$

Funk's Beobachtung gab nach der Tabelle I. (Zusatz 2) Versuch Nr. 727:

$$x = 1{,}101 \text{ Fuß},$$

die Rechnung mittelst Formel III, wenn ψe statt e gesetzt wird, giebt:

$$x = 1{,}075.$$

Beispiel 3. Durch die Fig. 174^a und 174^b skizzirte Buhne von $2^m,50$ Höhe, soll der Oberwasserspiegel einer ganz regelmäßigen Flußstrecke, um $0^m,50$ Höhe aufgestaut werden. Es fragt sich, welche Länge diese Buhne (rechtwinklig zum Stromstriche) erhalten muß, wenn die secundlich abfließende Wassermenge (im Minimum) 1356 Cubikmeter, die freie Profilbreite 350 Meter und die ungestaute mittlere Wassertiefe 3 Meter beträgt. Der Coefficient μ werde $= 0{,}85$ angenommen.

Auflösung. Mit Bezug auf Gleichung VIII. ist hier:

$$b = 350^m,\ Q = 1356^{cbm},\ e = 3^m,0,\ H = 0^m,5, \text{ daher:}$$

$$c = \frac{Q}{b\,(e + H)} = \frac{1356}{350 . 3{,}5} = 1^m,107, \text{ folglich:}$$

$$h = \frac{c^2}{2g} = 0^m,0635.$$

[1]) 1 Fuß rhnl. = 0,314 Meter, 1 Cubikfuß rhnl. = 0,0309 Cubikmeter.

Da hiernach $H + h = 0^m,5635$, ferner $\eta = 2^m,50$ und $\sqrt{2g} = 4,43$ ist, so ergiebt sich schließlich:

$$b_1 = 278^m,6.$$

Die Breite des Raumes für durchgehende Schiffe ist sonach:

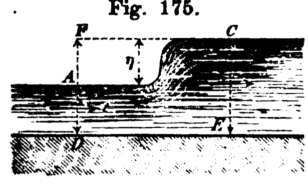
$$b - b_1 = 350,0 - 278,6 = 71^m,4,$$

d. h. vollkommen genügend.

§. 154.

Sprünge oder Wasserschwellen in Canälen. Eben so interessante wie bemerkenswerthe Staufälle wurden von dem italienischen Hydrauliker Bidone beobachtet[1]), die zwar selten oder gar nicht bei Flüssen, wohl aber bei Canälen einzutreten vermögen. Bidone fand nämlich, daß unter Umständen (bei großen Geschwindigkeiten und geringen Wassertiefen), in nicht großer Entfernung von der höchsten Staustelle, eine plötzliche Erhebung des Wasserspiegels, ein sogenannter Sprung (Wasserschwelle) $\overline{BC}$, Fig. 175, entstehen kann.

Fig. 175.



Zur Berechnung der betreffenden Stauhöhe $\overline{AF} = \eta$ läßt sich, wie Belanger[2]) zuerst gezeigt hat, die Gleichung IV, §. 153, und zwar in nachbemerkter Weise benutzen.

Es sei $AD = e$ die Wassertiefe stromaufwärts des Staues, e_0 die Wassertiefe im gestauten und sehr nahe bei AD liegenden Profile EC, ferner b die constante Canalbreite. Sodann hat man

$$bev = be_0 v_0,$$

oder, weil $e_0 = e + \eta$ ist, auch

$$ev = (e + \eta)\, v_0,$$

weshalb man aus dem citirten Ausdrucke erhält:

$$\eta = \frac{v^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{e}{e + \eta}\right)^2\right].$$

Hier auf beiden Seiten mit $\frac{(e+\eta)^2}{\eta}$ multiplicirt und reducirt, giebt endlich:

$$\text{I.} \quad \eta = \frac{v^2}{4g} - e + \sqrt{\frac{v^2}{2g}\left(\frac{v^2}{8g} + e\right)}.$$

Die Beschaffenheit der Aufgabe verlangt η positiv, weshalb die Bedingung erfüllt sein muß:

$$\left(e - \frac{v^2}{4g}\right) < \sqrt{\frac{v^2}{2g}\left(\frac{v^2}{8g} + e\right)},$$

woraus folgt:

---

[1]) Mémoire de l'Academie des sciences de Turin. Tom. XXV, 1820.
[2]) d'Aubuisson, Hydraulique, §. 169.

$$e < \frac{v^2}{g},$$

d. h. die Wassertiefe muß **kleiner** als die doppelte Geschwindigkeitshöhe sein.

Weitere Auskunft über die Bedingung der Entstehung dieses eigenthümlichen Staues giebt die Gleichung II, §. 144, indem dort für $e = \frac{v^2}{g}$ die Stauweite $= l$ zu Null wird.

Folgende Tafel[1]) zeigt die bemerkenswerthe Uebereinstimmung der mittelst I. berechneten Werthe mit der Erfahrung:

Versuchsreihe	Nr.	e	v	$\frac{v^2}{2g}$	Werthe von η berechnet	Werthe von η beobachtet von Bidone	Verhältniß der beiden Werthe von η
1ste	1	0m,0470	1m,3607	0m,0944	0m,0818	0m,0814	1,005
	2	0,0472	1,3552	0,0936	0,0809	0,0859	0,942
	3	0,0474	1,3445	0,0921	0,0792	0,0836	0,948
	4	0,0464	1,3772	0,0966	0,0845	0,0864	0,978
2te	1	0,0635	1,7031	0,1478	0,1312	0,1233	1,064
	2	0,0639	1,6930	0,1461	0,1303	0,1250	1,042
	3	0,0643	1,6832	0,1444	0,1281	0,1278	1,002
	4	0,0646	1,6733	0,1428	0,1265	0,1311	0,965
	5	0,0626	1,7286	0,1523	0,1373	0,1346	1,020
3te	1	0,0750	1,9170	0,1872	0,1696	0,1502	1,129
	2	0,0743	1,9363	0,1910	0,1739	0,1557	1,117
	3	0,0738	1,9462	0,1930	0,1762	0,1592	1,107
4te	1	0,0457	1,3876	0,0981	0,0863	0,0756	1,141
	2	0,0455	1,3934	0,0989	0,0873	0,0782	1,116
	3	0,0455	1,3934	0,0989	0,0873	0,0848	1,029
	4	0,0453	1,3994	0,0998	0,0923	0,0836	1,104

Anmerkung. Weisbach[2]) beobachtete diese Wasserschwellen auch in den Fällen, wo sich die Neigung des Canalbettes plötzlich ändert, und zwar entstand der Sprung stets an der Stelle, woselbst die der größeren Neigung entsprechende kleinere Wassertiefe in die der kleineren Neigung entsprechende größere Wassertiefe überging.

§. 155.

Stauweite.

Bei dem gegenwärtigen Standpunkte der wissenschaftlichen Hydraulik läßt sich die Frage hinsichtlich der Bestimmung von Stauweiten, mit einiger Zuverlässigkeit, fast allein oder doch vorzugsweise mit Hülfe der Sätze über ungleichförmige Bewegung des Wassers beantworten.

---

[1]) Belanger, Essai etc., Pag. 36.

[2]) Ingen.-Mechanik, Bd. 2, 4. Auflage, S. 360 (Anmerkung).

Aus den betreffenden Gleichungen (§. 144) ergeben sich zunächst ganz allgemein folgende zwei Hauptsätze über Stauweiten.

Erstens, daß die Stauweite, wenn man das vollständige Ende eines Staues im Auge hat, unendlich groß werden kann, also der gestaute Wasserspiegel eine Fläche bildet, welche sich der ursprünglichen (ungestauten) Wasseroberfläche bis ins Unendliche nähert, ohne diese jemals vollständig zu erreichen.

Zu diesem Satze gelangt man ohne Weiteres, wenn man beachtet, daß da, wo der Stau völlig beendet ist, offenbar die gleichförmige Bewegung wieder eintreten und also nach §. 132, S. 396 die Bedingungsgleichung stattfinden muß:

$$\frac{h}{l} = \sin \varphi = \frac{p}{a} (Av + Bv^2),$$

wonach die Gleichung I., §. 144, sofort liefert:

$$l = \infty.$$

Zweitens, daß die Stauweite auch Null werden kann. Dieser Fall tritt ein, wenn der Zähler der Gleichung II, §. 144, früher zu Null wird, als der Nenner derselben, d. h. unter der Bedingung:

$$\frac{v^2}{g} = \frac{a}{x} = e,$$

wobei e die mittlere Wassertiefe bezeichnet. Es ist also hier $\frac{dl}{dy} =$ Null, d. h. der Wasserspiegel steht an der Staustelle vertical (bildet eine sogenannte stehende Welle) oder es tritt jener Sprung (Fig. 175) ein, der bereits §. 154 betrachtet und dessen Höhe berechnet wurde.

Der erstere dieser beiden Fälle ist der gewöhnlich und am Meisten vorkommende, indem sich letzterer nur bei sehr geringen Wassertiefen und bei gleichzeitig großen Geschwindigkeiten ereignet.

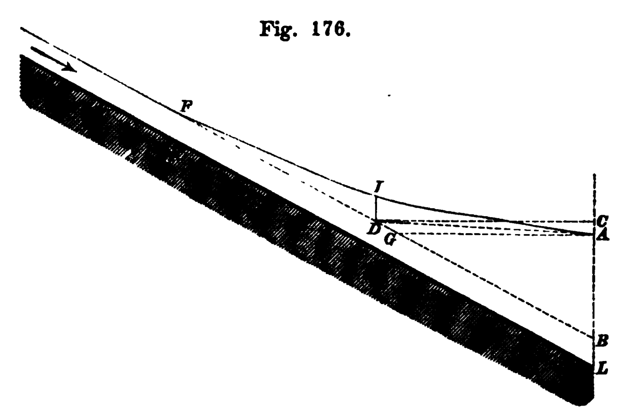
In jedem anderen Falle als diesen beiden extremen, hat man die Stauweiten entweder mittelst der allgemeinen Gleichung I. (§. 147) zu berechnen, oder nimmt zu den Methoden des §. 146 seine Zuflucht, wie aus dem Nachstehenden speciell klar werden wird.

Anmerkung. Dubuat[1]) war der Erste, welcher sich mit der Staufrage und namentlich der Gestalt des gestauten Wasserspiegels ausführlicher beschäftigte und insbesondere den Schluß machte, daß die Staucurve eine concave sein müsse und im Stromprofile nur wenig von einer Kreislinie verschieden sei. Dubuat's Behandlung des fraglichen Gegenstandes ist folgende.

Es sei $FKLB$, Fig. 176, das Längenprofil eines rectangulären Canales mit der Rösche oder dem Abhange $= s$ der überall gleichen Tiefe $FK = BL = e$ und der constanten Breite $= b$. In L sei ein Einbau angebracht, wodurch über B ein Stau von der Höhe $\overline{BA} = H$ erzeugt und das Längenprofil des gestauten Wasserspiegels AJF geworden sein mag. Könnte man sodann die Wasseroberfläche über B genau horizontal voraussetzen, so würde der Punkt G einer durch A

[1]) Principes, Nr. 150.

Fig. 176.



gezogenen Wagerechten AG die Stelle bezeichnen, woselbst der Stau endigte. Dies ist jedoch unmöglich (§. 131), weil sodann das Wasser kein Gefälle besitzen und mithin ohne Bewegung sein würde. Wir nehmen daher eine Gerade AD an, welche dasselbe Gefälle besitzen soll wie das Wasser über B, und die zugleich Tangente für den Punkt A der als Kreisbogen anzusehenden Staucurve AJF sein mag, dabei vorausgesetzt, daß D im ungestauten Wasserspiegel FB liegt[1]).

Eine Gerade von D nach G wird ferner als Tangente des Kreisbogens FJA bei F anzusehen und deshalb $\overline{FD} = \overline{DA}$ zu setzen sein.

Zieht man endlich durch D eine Horizontale CD, so wird CA das Gefälle auf die Canalstrecke DB oder genau genug auf CD darstellen, so daß, wenn der betreffende Abhang mit s_1 bezeichnet wird,

$$s_1 = \frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} \text{ ist, oder auch}$$

$$(1) \quad s_1 = \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}, \text{ wenn man } \overline{CD} \text{ mit } \overline{AD} \text{ verwechselt.}$$

Da ferner auch der Abhang $= s$ des ungestauten Wasserspiegels $s = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}$ oder genau genug (2) $s = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}}$ gesetzt werden kann, so folgt aus (1) und (2) folgende Proportion:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} = s_1 : s \text{ und hieraus:}$$

$$\overline{CB} - \overline{CA} : \overline{CA} = s - s_1 : s_1, \text{ d. i.,}$$

$$\text{wegen } \overline{CB} - \overline{CA} = \overline{AB} = H,$$

$$(3) \quad \overline{CA} = \frac{H s_1}{s - s_1},$$

oder weil nach dem Vorhergehenden $\overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{s_1}$ ist, endlich auch

[1]) Funk (Hydrotechnik, S. 134) nennt die Horizontale AG die hydrostatische Stauweite, dagegen AF (die wirkliche) die hydraulische Stauweite.

$$\overline{AD} = \frac{H}{s - s_1},$$

als Ausdruck für die Tangente $\overline{AD}$ oder die Hälfte der Stauweite, so daß für die ganze Stauweite gesetzt werden kann:

$$\overline{AF} = \overline{AD} + \overline{DF} = 2 \,.\, \overline{AD}, \text{ oder}$$

$$\overline{AF} = \frac{2 \,.\, H}{s - s_1}.$$

Da in dieser Gestalt die Formel, Dubuat's Erfahrungen zufolge, zu große Werthe giebt, räth derselbe, statt der 2 im Zähler 1,9 zu setzen[1]), so daß zuletzt erhalten wird:

$$\text{I.} \quad l = \frac{1{,}9 \,.\, H}{s - s_1}.$$

Außer den verschiedenen, mehr oder weniger unhaltbaren Annahmen, worauf sich die Entwickelung dieser Formel stützt, leidet sie namentlich an dem Uebel, daß sie den Abhang s_1 des aufgestauten Wasserspiegels als bekannt voraussetzt, dem natürlich nicht anders als durch eine Annäherungsrechnung entsprochen werden kann[2]).

Ungeachtet der Correctionscoefficienten der Formel I. giebt sie fast immer zu große Werthe[3]), so daß sie recht eigentlich dazu benutzt werden kann, den Ort zu bestimmen, wohin sich ein bestimmter Stau stromaufwärts nicht mehr erstreckt.

Funk[4]) behauptet, daß unter allen Umständen von der Dubuat'schen Darstellung für die Ausübung kein Gebrauch zu machen sei, weil die betreffenden Rechnungsresultate sich zu sehr von den Erfahrungswerthen entfernten.

Nach demselben Hydrauliker soll die Curve, welche der gestaute Wasserspiegel oberhalb des Wehres bildet, als eine halbe Parabel angesehen werden können, deren Achse über dem Wasserspiegel liegt, auch soll die hydraulische Stauweite niemals das Doppelte der hydrostatischen betragen. Auf diese Annahmen gestützt, leitet Funk für die Stauweite den Ausdruck ab:

$$\text{II.} \quad l = \tfrac{3}{2} \,.\, \frac{H}{s}.$$

Aber auch dieser Werth leidet an dem doppelten Uebel einer mangelhaften Begründung und der Nichtübereinstimmung mit der Erfahrung[5]).

d'Aubuisson vernachlässigt in I. s_1 ohne Weiteres, und um den hierdurch erzeugten Fehler zu corrigiren, ersetzt er den Coefficienten

---

[1]) Principes, Nr. 153 und 154.

[2]) Man sehe deshalb Funk, Hydrotechnik, S. 135, insbesondere aber Weisbach in der Maschinenencyclopädie, Bd. 2, S. 175.

[3]) Auch Hagen's Erfahrungen bestätigen dies (Wasserbaukunst, 2. Theil, 1. Bd., S. 322).

[4]) a. a. O., S. 136.

[5]) Mit Ausnahme eines Falles am Hameln'schen Wehre (§. 250 der Hydrotechnik) liefert II, auch nach Funk's eigenen Erfahrungen, stets zu große Werthe, was dieser Hydrauliker aber nicht seiner Formel, sondern den Flußkrümmungen Schuld giebt.

1,9 wieder durch 2, schreibt also:

$$\text{III.}\quad l = \frac{2H}{s},$$

wonach die hydraulische Stauweite genau doppelt so groß, wie die hydrostatische sein würde, ein Ausdruck, dessen Mangelhaftigkeit nach dem Vorstehenden von selbst einleuchtet.

Noch andere Formeln zur Bestimmung der Stauweite, ohne gleichfalls begründete Ableitungen und ohne daß dieselben für die Praxis zufriedenstellende Resultate gaben, lieferten St. Guilhem[1]) und Poirée[2]), in Bezug welcher auf die unten citirten Quellen verwiesen werden muß[3]).

§. 156.

Unter der Voraussetzung einer sehr bedeutenden Canalbreite in Bezug auf die vorhandene Wassertiefe, so daß letztere bei der Größenbestimmung des Wasserperimeters vernachlässigt werden kann, ferner unter der Annahme eines constanten Gefälles und Profiles in der ganzen Strecke, worauf sich die Staufrage bezieht, läßt sich in nachstehender Weise ein für die Anwendung einigermaßen brauchbarer Ausdruck ableiten.

Man setze in (2) (§. 144) dv gleich Null, d. h. vernachlässige die lebendigen Kräfte, welche den Geschwindigkeitsänderungen in den auf einander folgenden Profilen entsprechen, zähle ferner die gestauten Profile stromaufwärts, schreibe also $-dl$ statt $+dl$, wonach folgt:

$$0 = -dy \cdot \cos\varphi - dl \cdot \sin\varphi + \frac{p}{a}(Au + Bu^2)\,dl,$$

wobei u die Geschwindigkeit in einem beliebigen, gestauten Profile von der Wassertiefe y bezeichnet.

Aus letzterer Gleichung folgt aber, wenn $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = i$ und für $Au + Bu^2$ der bekannte Werth $\frac{u^2}{k^2}$ eingeführt wird:

$$(1)\quad dy = \left(\frac{1}{y}\,\frac{u^2}{k^2} - i\right) dl.$$

Für die ungestaute Strecke FG, Fig. 177, wo e die constante Tiefe und v die unveränderliche mittlere Geschwindigkeit bezeichnen mag, ergiebt die Chezy-Eytelwein'sche Gleichung direct:

$$(2)\quad i = \frac{1}{e} \cdot \frac{v^2}{k^2}, \text{ oder}$$

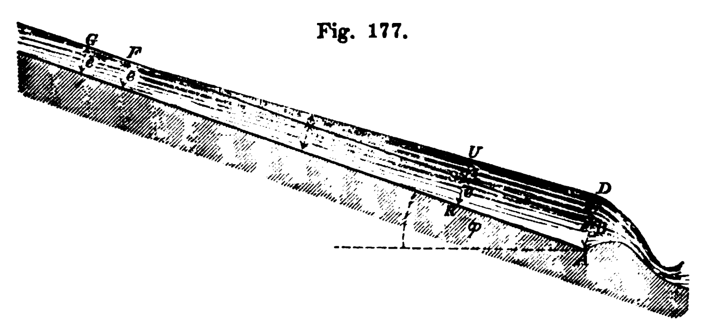
weil durch alle Profile pro Secunde dieselbe Wassermenge $= Q$

[1]) Annales des Ponts et Chaussées 1837, Nr. 2, Pag. 78 und 1838, Nr. 2, Pag. 249.

[2]) Ebendaselbst 1839, Nr. 2, Pag. 275.

[3]) Hagen (Wasserbaukunst, 2. Th., 1. Bd., S. 324) glaubt sogar, daß durch diese Annahme das betreffende Rechnungsresultat wahrscheinlich an Genauigkeit gewinne, oder doch die Wirkung der vernachlässigten Geschwindigkeitsänderungen höchst unbedeutend bleibt (a. a. O., S. 329 und 330 durch ein Zahlenbeispiel erwiesen).

Fig. 177.



fließt, d. h. der Beharrungszustand eingetreten sein soll, wegen $Q = bev = byu$, also $v = \frac{y}{e} . u$, auch (aus 2):

$$(3) \quad i = \frac{y^2}{e^3} \cdot \frac{u^2}{k^2}.$$

Entfernt man jetzt $\frac{u^2}{k^2}$ aus (1) mittelst (3), so erhält man endlich:

$$\text{I.} \quad i\,.\,dl = \frac{y^3 dy}{e^3 - y^3}\ \text{[1]}).$$

Führt man hier die Stauhöhe $SU = z$, Fig. 177, ein, d. h. setzt $e + z$ statt y, so folgt:

$$i\,.\,dl = \frac{(e+z)^3 dz}{e^3 - (e+z)^3}.$$

Hieraus ferner

$$i\,.\,dl = -\left[1 + \frac{e^3}{(e+z)^3 - e^3}\right] dz\ \text{[2]}),$$

so wie nach Ausführung der Division des Zählers in den Nenner:

$$(4) \quad \frac{i\,.\,dl}{e} = -\left[\tfrac{1}{3}\frac{dz}{z} + \tfrac{2}{3}\frac{dz}{e} + \tfrac{2}{9}\frac{z\,.\,dz}{e^2} - \tfrac{1}{9}\frac{z^2 dz}{e^3} + \tfrac{1}{27}\frac{z^3 dz}{e^4} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right].$$

Integrirt man und setzt die größte Stauhöhe BD am Einbaue bei A, Fig. 177, gleich Z, so findet sich endlich:

$$\text{I.} \quad \frac{i\,.\,l}{e} = \tfrac{1}{3}\,\text{Lgnt}\,\frac{Z}{z} + \tfrac{2}{3}\frac{Z-z}{e} + \tfrac{1}{9}\frac{Z^2-z^2}{e^2} - \tfrac{1}{27}\frac{Z^3-z^3}{e^3} + \tfrac{1}{108}\frac{Z^4-z^4}{e^4} -$$
$$- \tfrac{1}{486}\frac{Z^6-z^6}{e^6} + \tfrac{1}{567}\frac{Z^7-z^7}{e^7} - \tfrac{1}{972}\frac{Z^8-z^8}{e^8} + \tfrac{1}{2187}\frac{Z^9-z^9}{e^9} -$$
$$- \tfrac{1}{7290}\frac{Z^{10}-z^{10}}{e^{10}} + \tfrac{1}{26244}\frac{Z^{12}-z^{12}}{e^{12}} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Für den Fall, daß eine Senkung der Oberfläche statt hat (wie dies z. B. zufolge Ausbaggerungen geschehen kann), erhält man:

---

[1]) Dieselbe Gleichung findet **Hagen** auf etwas anderem Wege (S. 326, II. Theil, Bd. 1 seiner Wasserbaukunst). Mir war I. aus den Vorträgen des Herrn Professor **Weisbach** bereits vor dem Erscheinen der ersten Ausgabe des Hagen'schen Werkes (d. h. vor 1844) bekannt.

[2]) Auch bei **Dupuit** (Études etc.) Nr. 66.

$$\text{II. } \frac{i.l}{e} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Lgnt}\,\frac{Z}{z} - \tfrac{2}{3}\,\frac{Z-z}{e} + \tfrac{1}{9}\,\frac{Z^2-z^2}{e^2} + \tfrac{1}{27}\,\frac{Z^3-z^3}{e^3} + \tfrac{1}{108}\,\frac{Z^4-z^4}{e^4} -$$

$$- \tfrac{1}{486}\,\frac{Z^6-z^6}{e^6} - \tfrac{1}{567}\,\frac{Z^7-z^7}{e^7} - \tfrac{1}{972}\,\frac{Z^8-z^8}{e^8} - \tfrac{1}{2187}\,\frac{Z^9-z^9}{e^9} - \tfrac{1}{7920}\,\frac{Z^{10}-z^{10}}{e^{10}} \ldots$$

Beispiel 1. Durch ein Wehr wird ein Fluß über dem Fachbaume des ersteren um $0^m,135$ aufgestaut, während die ungestaute Flußtiefe $1^m,0$ und das Bodengefälle $\frac{1}{3000}$ ist; es fragt sich, in welcher Entfernung vom Wehre stromaufwärts der Stau nur noch $0^m,01$ beträgt?

Auflösung. Es ist hier $\frac{Z}{e} = \frac{0,135}{1,0} = 0,135$; $\frac{z}{e} = 0,01$, also $\frac{Z}{z} = \frac{0,135}{0,01} = 13,5$, daher aus I. unmittelbar:

$$\frac{i.l}{e} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Lgnt}\,13,5 + \tfrac{2}{3}\,.\,0,125 + \tfrac{1}{9}(0,018225 - 0,0001) - \tfrac{1}{27}(0,002460 - 0,000001),$$

d. i. $\frac{i.l}{e} = 0,867563 + 0,083333 + 0,002013 - 0,000091$, oder

$$(1)\quad \frac{i.l}{e} = 0,952818, \text{ wonach}$$

$$l = 0,952818\,.\,1\,.\,3000 = 2858^m,45.$$

Beispiel 2. In welcher Entfernung noch weiter stromaufwärts des vorigen Beispieles beträgt die Stauhöhe nur noch $0^m,0098$?

Auflösung. Hier ist

$$\frac{Z}{e} = 0,010;\ \frac{z}{e} = 0,0098;\ \frac{Z}{z} = \frac{0,010}{0,0098} = 1,02,$$

sonach aus I:

$$(2)\quad \frac{i.l}{e} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Lgnt}\,.\,1,02 + \tfrac{2}{3}\,.\,0,0002 = 0,006734,$$

so wie ferner:

$$l = 0,006734\,.\,1\,.\,3000 = 20^m,202.$$

Beispiel 3. Durch eine Ausbaggerung wird stromabwärts der Wasserspiegel eines sonst 1 Meter tiefen Flusses von $\frac{1}{4000}$ Bodengefälle um $0^m,225$ gesenkt; es fragt sich, in welcher Entfernung stromaufwärts diese Senkung nur noch $0^m,01$ beträgt?

Auflösung. Hier ist

$$\frac{Z}{e} = \frac{0,225}{1} = 0,225;\ \frac{z}{e} = 0,01 \text{ und } \frac{Z}{z} = 22,5,$$

demnach aus II:

$$(3)\quad \frac{i.l}{e} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Lgnt}\,22,5 - \tfrac{2}{3}\,.\,0,215 + \tfrac{1}{9}\,.\,0,050525 + \tfrac{1}{27}\,.\,0,011389625$$
$$+ \tfrac{1}{108}\,.\,0,00256288 = 0,9005985,$$

und ferner:

$$l = 0,9005985\,.\,1\,.\,4000 = 3602^m,394.$$

§. 157.

Tabellen zur Berechnung von Stauweiten und Stauhöhen[1]).

Nachstehende Tabellen beruhen auf der (übrigens willkürlichen) Voraussetzung, daß eine Stauhöhe (pro Einheit der natürlichen Wassertiefe) $\frac{z}{e} = 0{,}0098$ den Ausgangspunkt bildet, also eine Stelle der Wasseroberfläche, gleichsam der Ursprung eines betreffenden Coordinatensystems ist, woselbst der Stau als fast verschwunden betrachtet werden kann. Für die bemerkte Stauhöhe berechnet sich der Abstand von der ersten Stauhöhe $\frac{z}{e} = 0{,}01$ der Tabelle zu 0,006734, wofür in der mit $f\left(\frac{z}{e}\right)$ bezeichneten Columne der kürzere Werth 0,0067 aufgeführt ist.

Weiteres über die betreffenden Berechnungen erhellt aus den Beispielen des vorigen Paragraphen. In Bezug auf die erste Tabelle ergiebt sich, wenn die Resultate für $\frac{il}{e}$ aus (1) Beispiel 1 und aus (2) Beispiel 2 addirt werden,

$$0{,}952818 + 0{,}006734 = 0{,}959552,$$

was dem Werthe $f\left(\frac{z}{e}\right)$ für $\frac{z}{e} = 0{,}135$ der Tabelle I. entspricht.

Der Gebrauch der Tabellen, beispielsweise zur Ermittelung der Stauweiten, besteht einfach darin, daß man die Stauhöhen am Einbaue Z und die z, bis zu welcher man die Stauweite ermitteln will, durch die Tiefe $= e$ des ungestauten Wassers dividirt, für diese Quotienten in der Tabelle die Werthe von $f\left(\frac{Z}{e}\right)$ und $f\left(\frac{z}{e}\right)$ aufsucht, letztere von einander abzieht und dadurch $\frac{i \,.\, l}{e}$ erhält. Um endlich die Stauweite l zu finden, multiplicirt man jene Differenz mit der natürlichen Wassertiefe e und dividirt zuletzt durch den Abhang i. Soll umgekehrt die Stauhöhe oder Senkung gefunden werden, so versteht sich nach dem so eben Aufgeführten das Verfahren von selbst, so wie auch zu den betreffenden Verständnissen die nach den Tabellen folgenden Beispiele dienen werden[2]).

---

[1]) Es sind diese Tabellen ganz neu mit Hülfe der Formeln I. und II. berechnet, einige der letzteren Werthe der ersten Tabellen sind Dupuit (Études, Pag. 255 erste Auflage und Pag. 297 zweite Auflage) entlehnt, dem überhaupt das Verdienst zuzuschreiben ist, zuerst den glücklichen Gedanken zur Berechnung practisch brauchbarer Tabellen aus den gedachten Formeln gefaßt und ausgeführt zu haben. Unsere Tafeln sind übrigens von doppelt so großem Umfange wie die Dupuit's. Bei der Berechnung dieser Tabellen betheiligte sich ($185\frac{6}{7}$) u. A. besonders der jetzige Oberlehrer am Gymnasium zu Göttingen, Herr Dr. Gödecker, der auch später (1861) die letzteren Werthe noch genauer nach einer Formel ermittelte, auf welche wir in dem folgenden Paragraphen zurückzukommen Gelegenheit finden.

[2]) Wichtig ist's übrigens auch noch, auf die Bemerkungen am Anfange des §. 156 Rücksicht zu nehmen.

(Tabelle I.)

Zur Berechnung von

$\frac{z}{e}$	$f\left(\frac{z}{e}\right)$	$\frac{z}{e}$	$f\left(\frac{z}{e}\right)$	$\frac{z}{e}$	$f\left(\frac{z}{e}\right)$	$\frac{z}{e}$
0,010	0,0067	0,160	1,0335	0,310	1,3610	0,460
0,015	0,1452	0,165	1,0473	0,315	1,3700	0,465
0,020	0,2444	0,170	1,0608	0,320	1,3789	0,470
0,025	0,3222	0,175	1,0740	0,325	1,3877	0,475
0,030	0,3863	0,180	1,0869	0,330	1,3964	0,480
0,035	0,4411	0,185	1,0995	0,335	1,4050	0,485
0,040	0,4889	0,190	1,1119	0,340	1,4136	0,490
0,045	0,5316	0,195	1,1241	0,345	1,4221	0,495
0,050	0,5701	0,200	1,1361	0,350	1,4306	0,500
0,055	0,6053	0,205	1,1479	0,355	1,4390	0,505
0,060	0,6376	0,210	1,1595	0,360	1,4473	0,510
0,065	0,6677	0,215	1,1709	0,365	1,4556	0,515
0,070	0,6958	0,220	1,1821	0,370	1,4638	0,520
0,075	0,7222	0,225	1,1931	0,375	1,4720	0,525
0,080	0,7482	0,230	1,2040	0,380	1,4801	0,530
0,085	0,7708	0,235	1,2148	0,385	1,4882	0,535
0,090	0,7933	0,240	1,2254	0,390	1,4962	0,540
0,095	0,8148	0,245	1,2358	0,395	1,5041	0,545
0,100	0,8353	0,250	1,2461	0,400	1,5119	0,550
0,105	0,8550	0,255	1,2563	0,405	1,5197	0,555
0,110	0,8739	0,260	1,2664	0,410	1,5275	0,560
0,115	0,8922	0,265	1,2763	0,415	1,5353	0,565
0,120	0,9098	0,270	1,2861	0,420	1,5430	0,570
0,125	0,9269	0,275	1,2958	0,425	1,5507	0,575
0,130	0,9434	0,280	1,3054	0,430	1,5583	0,580
0,135	0,9595	0,285	1,3149	0,435	1,5659	0,585
0,140	0,9751	0,290	1,3243	0,440	1,5734	0,590
0,145	0,9903	0,295	1,3336	0,445	1,5809	0,595
0,150	1,0051	0,300	1,3428	0,450	1,5884	0,600
0,155	1,0195	0,305	1,3519	0,455	1,5958	0,605

Erhebungen des Wasserspiegels.

$f\left(\frac{z}{e}\right)$	$\frac{z}{e}$	$f\left(\frac{z}{e}\right)$	$\frac{z}{e}$	$f\left(\frac{z}{e}\right)$	$\frac{z}{e}$	$f\left(\frac{z}{e}\right)$
1,6032	0,610	1,8112	0,760	2,0010	0,910	2,1800
1,6106	0,615	1,8178	0,765	2,0071	0,915	2,1858
1,6179	0,620	1,8243	0,770	2,0132	0,920	2,1916
1,6252	0,625	1,8308	0,775	2,0193	0,925	2,1974
1,6324	0,630	1,8373	0,780	2,0254	0,930	2,2032
1,6396	0,635	1,8438	0,785	2,0315	0,935	2,2090
1,6468	0,640	1,8503	0,790	2,0375	0,940	2,2148
1,6540	0,645	1,8567	0,795	2,0435	0,945	2,2206
1,6611	0,650	1,8631	0,800	2,0495	0,950	2,2264
1,6682	0,655	1,8695	0,805	2,0555	0,955	2,2322
1,6753	0,660	1,8759	0,810	2,0615	0,960	2,2380
1,6823	0,665	1,8823	0,815	2,0675	9,965	2,2438
1,6893	0,670	1,8887	0,820	2,0735	0,970	2,2496
1,6963	0,675	1,8951	0,825	2,0795	0,975	2,2554
1,7032	0,680	1,9014	0,830	2,0855	0,980	2,2611
1,7101	0,685	1,9077	0,835	2,0915	0,985	2,2668
1,7170	0,690	1,9140	0,840	2,0975	0,990	2,2725
1,7239	0,695	1,9203	0,845	2,1035	0,995	2,2782
1,7308	0,700	1,9266	0,850	2,1095	1,000	2,2839
1,7376	0,705	1,9329	0,855	2,1154	1,100	2,3971
1,7444	0,710	1,9392	0,860	2,1213	1,200	2,5683
1,7512	0,715	1,9455	0,865	2,1272	1,300	2,6179
1,7589	0,720	1,9517	0,870	2,1331	1,400	2,7264
1,7647	0,725	1,9579	0,875	2,1390	1,50	2,8337
1,7714	0,730	1,9641	0,880	2,1449	1,60	2,9401
1,7781	0,735	1,9703	0,885	2,1508	1,70	3,0458
1,7848	0,740	1,9765	0,890	2,1567	1,80	3,1508
1,7914	0,745	1,9827	0,895	2,1625	1,90	3,2553
1,7980	0,750	1,9888	0,900	2,1683	2,00	3,3594
1,8046	0,755	1,9949	0,905	2,1742	2,10	3,4631
					2,20	3,5564
					2,30	3,6694
					2,40	3,7720
					2,50	3,8745
					2,60	3,9768
					2,70	4,0789
					2,80	4,1808
					2,90	4,2826
					3,00	4,3843
					3,50	4,4891
					4,00	5,3958
					4,50	5,8993
					5,00	6,4120

(Tab. II.) **Zur Berechnung von Senkungen des Wasserspiegels.**

$\frac{z}{e}$	$f\left(\frac{z}{e}\right)$	$\frac{z}{e}$	$f\left(\frac{z}{e}\right)$	$\frac{z}{e}$	$f\left(\frac{z}{e}\right)$
0,010	0,0067	0,225	0,8939	0,440	0,9931
0,015	0,1251	0,230	0,8982	0,445	0,9941
0,020	0,2287	0,235	0,9023	0,450	0,9951
0,025	0,2888	0,240	0,9063	0,455	0,9961
0,030	0,3463	0,245	0,9101	0,460	0,9971
0,035	0,3943	0,250	0,9138	0,465	0,9980
0,040	0,4356	0,255	0,9174	0,470	0,9989
0,045	0,4715	0,260	0,9209	0,475	0,9998
0,050	0,5034	0,265	0,9242	0,480	1,0006
0,055	0,5319	0,270	0,9275	0,485	1,0014
0,060	0,5577	0,275	0,9306	0,490	1,0022
0,065	0,5811	0,280	0,9336	0,495	1,0029
0,070	0,6025	0,285	0,9365	0,500	1,0036
0,075	0,6222	0,290	0,9394	0,505	1,0043
0,080	0,6405	0,295	0,9421	0,510	1,0050
0,085	0,6575	0,300	0,9448	0,515	1,0057
0,090	0,6733	0,305	0,9473	0,520	1,0063
6,095	0,6881	0,310	0,9498	0,525	1,0069
0,100	0,7020	0,315	0,9522	0,530	1,0075
0,105	0,7150	0,320	0,9546	0,535	1,0081
0,110	0,7273	0,325	0,9569	0,540	1,0086
0,115	0,7389	0,330	0,9591	0,545	1,0091
0,120	0,7500	0,335	0,9612	0,550	1,0096
0,125	0,7603	0,340	0,9632	0,555	1,0101
0,130	0,7703	0,345	0,9652	0,560	1,0106
0,135	0,7796	0,350	0,9671	0,565	1,0111
0,140	0,7886	0,355	0,9690	0,570	1,0116
0,145	0,7971	0,360	0,9708	0,575	1,0121
0,150	0,8053	0,365	0,9725	0,580	1,0125
0,155	0,8131	0,370	0,9742	0,585	1,0129
0,160	0,8205	0,375	0,9759	0,590	1,0133
0,165	0,8276	0,380	0,9775	0,595	1,0137
0,170	0,8344	0,385	0,9790	0,60	1,0140
0,175	0,8410	0,390	0,9805	0,65	1,0166
0,180	0,8473	0,395	0,9819	0,70	1,0184
0,185	0,8538	0,400	0,9833	0,75	1,0194
0,190	0,8591	0,405	0,9847	0,80	1,0199
0,195	0,8647	0,410	0,9860	0,85	1,0203
0,200	0,8700	0,415	0,9873	0,90	1,0203
0,205	0,8751	0,420	0,9885	0,95	1,0203
0,210	0,8801	0,425	0,9897	1,00	1,0203
0,215	0,8848	0,430	0,9909		
0,220	0,8895	0,435	0,9920		

§. 158.

Beispiele als Gebrauchsanweisung vorstehender Tabellen.

Beispiel 1. Ein Strom hat in seinem natürlichen Zustande $\frac{1}{5000}$ Gefälle pro Längeneinheit und eine mittlere constante Wassertiefe von 2 Fuß. Durch den Einbau eines Wehres wird über dem Fachbaume des letzteren ein 3 Fuß hoher Stau erzeugt, so daß die Wassertiefe am Wehre 5 Fuß beträgt.

Es ist zu berechnen, in welchen Entfernungen stromaufwärts die Stauhöhen beziehungsweise noch 2 Fuß, 1 Fuß, $\frac{1}{2}$ Fuß und $\frac{1}{4}$ Fuß sind?[1])

Auflösung. Für sämmtliche Stauhöhen ist:

$$\frac{Z}{e} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Dagegen für 2 Fuß Stauhöhe: $\frac{z}{e} = \frac{2}{2} = 1{,}0$ und sonach, wenn man letztere beiden Werthe in der mit $\frac{z}{e}$ der Tabelle überschriebenen Columne aufsucht und die correspondirenden Zahlen der Columne $f\left(\frac{Z}{e}\right)$ hier niederschreibt:

$$f\left(\frac{Z}{e}\right) = 2{,}8337$$

$$f\left(\frac{z}{e}\right) = 2{,}2839,$$

daher, weil $\frac{i\,.\,l}{e} = f\left(\frac{Z}{e}\right) - f\left(\frac{z}{e}\right)$, auch

$\frac{i\,.\,l}{e} = 0{,}5498$, d. i. wegen $i = \frac{1}{5000}$, $e = 2$,

$$l = 0{,}5498\,.\,2\,.\,5000 = 5498 \text{ Fuß}.$$

Die Berechnung der übrigen Fälle versteht sich hiernach von selbst, weshalb wir nur die Endresultate und zwar unter Nebenstellungen der Hagen'schen und Heinemann'schen, aufführen:

---

[1]) Es ist dies Beispiel absichtlich Hagen's Wasserbaukunst, S. 328, II. Theil, Bd. 1, entlehnt, um das Vortheilhafte der Tafeln recht hervorzuheben. Eben so ist nachher Rücksicht auf Heinemann's lange Formel genommen, die derselbe zur Vervollständigung der Hagen'schen Rechnungsweise in Erbkam's Zeitschrift für Baukunst, Jahrg. 1855, S. 207 mittheilte und solche ebenfalls auf das obige Zahlenbeispiel anwandte.

Stauweiten.				
Stauhöhen	$z = 2$ Fuß	$z = 1,0$ Fuß	$z = \frac{1}{2}$ Fuß	$z = \frac{1}{4}$ Fuß
Nach Hagen	5496	11745	15880	19067
Nach Heinemann	5487	11682	15797	18948
Nach den Tabellen	5498	11726	15876	19068

Beispiel 2.[1]) In einem 80 Fuß breiten und 4 Fuß tiefen Flusse, welcher 1400 Cubikfuß Wasser pro Secunde abführt und dabei einen Abhang gleich 0,000623 besitzt, soll ein Wehr eingebaut werden, um das Wasser 3 Fuß hoch aufzustauen; man soll angeben, in welcher Entfernung vom Wehre stromaufwärts die Stauhöhen beziehungsweise sind: 2,5 Fuß, 2 Fuß, 1,5 Fuß, 1,0 Fuß, 0,5 Fuß, 0,25 Fuß und 0,1 Fuß?

Auflösung. Für alle Fälle ist hier $\frac{Z}{e} = \frac{3}{4} = 0,75$, und correspondirend nach der Tabelle I: $f\left(\frac{Z}{e}\right) = 1,9888$. Sodann wollen wir eine der betreffenden Stauweiten wählen, wobei die Tabellen nur mittelst Interpolation gebraucht werden können.

Es folgt für $z = \frac{1}{4}$ Fuß, $\frac{z}{e} = \frac{1}{16} = 0,0625$, d. i. ein Werth, der nach Tabelle I. zwischen 0,060 und 0,065 der ersten Columne liegt.

Wir benutzen deshalb die bekannte Interpolationsformel (S. 312):

$$f\left(\frac{z}{e}\right) = y = y_1 + (y_2 - y_1)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

erhalten mit Zuziehung der Tabelle I:

$$x_2 = 0,0650 \qquad y_2 = 0,6677$$
$$x_1 = 0,0600 \quad \text{und} \quad y_1 = 0,6376$$
$$x = 0,0625$$

sodann aber

$$f\left(\frac{z}{e}\right) = y = 0,6376 + 0,0301\,\frac{0,0025}{0,0050} = 0,6526.$$

$$\text{Daher } \frac{i\,.\,l}{e} = f\left(\frac{Z}{e}\right) - f\left(\frac{z}{e}\right) = 1,9888 - 0,6526,$$

$$\frac{i\,.\,l}{e} = 1,3362 \text{ und}$$

$$l = 1,3362\,.\,4\,.\,\frac{1000000}{623} = 8579,1 \text{ Fuß}.$$

[1]) Absichtlich Weisbach's Ing.-Mechanik (4 Auflage), Bd. 2, S. 355 entlehnt, um die Resultate des Rechnungsganges dieses Hydraulikers mit den Tabellenwerthen vergleichen zu können.

Die übrigen berechneten Werthe stellen wir ohne Weiteres mit den correspondirenden Weisbach'schen in folgendem Täfelchen zusammen:

Stauhöhen $= z$	2,5 Fuß	2',0	1',5	1',0	0,50	0,25	0,10
Wassertiefen $= z + e$	6,5 Fuß	6,0	5,5	5,0	4,5	4,25	4,10
Stauweiten nach Weisbach	1005,6	2078,7	3260,8	4649,1	6537,0	8102,7	10434,5
Stauweiten nach den Tabellen	1014,4	2104,01	3318,1	4768,0	6817,9	8579,1	10700,5

Beispiel 3.[1]) Die Wassermenge eines Flusses beträgt 40 Cubikmeter pro Secunde, seine mittlere Tiefe (an ungestauter Stelle) $1^m,05$ und sein (ziemlich) constantes Gefälle $0^m,000115$. Durch ein Wehr wird in diesem Flusse ein Stau von $1^m,5$ Höhe erzeugt und dabei zu wissen verlangt, in welcher Entfernung stromaufwärts dieser Stau noch $0^m,6$ beträgt?

Auflösung. Hier ist

$$\frac{Z}{e} = \frac{1,50}{1,05} = 1,428, \quad \frac{z}{e} = \frac{0,60}{1,05} \doteq 0,570.$$

Daher mit Zuziehung von Tabelle I:

$$f\left(\frac{Z}{e}\right) = 2,757517\,^{2})$$

$$f\left(\frac{z}{e}\right) = 1,75890, \text{ d. i.}$$

$$\frac{i\,.\,l}{e} = 1,000 \text{ genau genug, daher}$$

$$l = 1,0\,.\,1,05\,.\,\frac{1000000}{115}\,;$$

$$l = 9130^m,4.$$

Belanger findet, nach demselben umständlichen Verfahren, welches S. 456 angegeben wurde: $l = 9245^m,0$.

Beispiel 4.[3]) Wie hoch wird ein (bei Poissy in der Seine) zu erbauendes Wehr das Niveau des niedrigsten Wasserstandes daselbst

---

[1]) Belanger: Essai etc., Pag. 24, Nr. 44.

[2]) Nach bekannter Interpolationsformel ist:

$$f\left(\frac{Z}{e}\right) = y = y_1 + (y_2 - y_1)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 2,7264 + 0,1073\,\frac{0,029}{0,100} = 2,75717.$$

[3]) Eine berühmte Aufgabe, deren Lösung Prony zuerst versuchte (Annales des Ponts et Chaussées, 1835, 2, Pag. 244 ff. etc.). Später unternahm Vauthier eine neue Lösung, in Betreff welcher auf unsere Quelle verwiesen werden muß (Annales des Ponts et Chaussées, 1836, 2, Pag. 241). Man sehe auch Dupuit: Études etc., Pag. 109 erste Auflage und Pag. 88 zweite Auflage.

erheben, damit stromaufwärts (bei Maisons) in 2020 Meter Entfernung, der Stau nicht mehr als $0^m,891$ beträgt, vorausgesetzt, daß an letzterer Stelle die Tiefe des ungestauten Wassers $1^m,59$ ist, auch überdies bekannt ist, daß die Niveaudifferenz zwischen den beiden genannten Punkten (Poissy und Maisons) $1^m,737$ und der Wasserabfluß pro Secunde 158,52 Cubikmeter beträgt?

Auflösung. Hier ist $i \,.\, l = 1,737$, $e = 1,59$, also

$$\frac{i\,.\,l}{e} = \frac{1,737}{1,590} = 1,0924.$$

Ferner ist $\frac{z}{e} = \frac{0,891}{1,590} = 0,560$ und folglich nach Tabelle I:

$$f\left(\frac{z}{e}\right) = 1,7444.$$

Ferner ist:

$$1,0924 = f\left(\frac{Z}{e}\right) - f\left(\frac{z}{e}\right), \text{ also}$$

$$1,0924 + 1,7444 = f\left(\frac{Z}{e}\right), \text{ d. i.}$$

$$2,8368 = f\left(\frac{Z}{e}\right).$$

Letzterem Werthe entspricht, genau genug, nach Tabelle I:

$$\frac{Z}{e} = 1,50, \text{ daher}$$

$$Z = 1,50 \,.\, 1,59 = 2^m,385,$$

ganz denselben Werth findet Vauthier[1]) nach einem umständlichen Verfahren, welches demjenigen Belanger's nachgebildet ist.

Beispiel 5.[2]) In einem Flusse, woselbst das Bodengefälle (ziemlich constant) 0,0003, ferner die natürliche Wassertiefe $1^m,2$ ist, unternimmt man eine Ausbaggerung (oder Verbreiterung des Profiles), wodurch an betreffender Stelle eine Senkung des Wasserspiegels $= 0^m,36$ entsteht. Es fragt sich, in welcher Entfernung stromaufwärts diese Senkung nur noch $0^m,12$ beträgt?

Auflösung. Es ist hier: $\frac{Z}{e} = \frac{0,36}{1,2} = 0,3$; $\frac{z}{e} = \frac{0,12}{1,20} = 0,10$; sonach zufolge Tabelle II:

$$f\left(\frac{Z}{e}\right) = 0,9448;\; f\left(\frac{z}{e}\right) = 0,7020, \text{ daher:}$$

$$\frac{i\,.\,l}{e} = 0,9448 - 0,7020 = 0,2428, \text{ also}$$

$$l = 0,2428 \,.\, 1,2 \,.\, \tfrac{10000}{3} = 971^m,2.$$

Beispiel 6. Wie berechnet sich mit Hülfe der Tafeln die Stauweite des Beispieles S. 458, woselbst am Hamelner Wehre die Stauhöhe

---

[1]) Annales des Ponts et Chaussées 1836, 2, Pag. 283.

[2]) Dupuit: Études, §. 74.

9,497 — 2,400 = 7,097 Fuß, die natürliche (ungestaute) Wassertiefe 2,40 Fuß, die Rösche $\frac{1}{2253}$ und die Stauhöhe am Ende der fraglichen Strecke 5 Fuß betrug?

Zunächst ergiebt sich

$$\frac{Z}{e} = \frac{7{,}097}{2{,}40} = 2{,}957,\ \frac{z}{e} = \frac{5{,}0}{2{,}4} = 2{,}083.$$

Sodann mittelst Tabelle I. und gehöriger Interpolation:[1])

$$f\left(\frac{Z}{e}\right) = 4{,}340056;\ f\left(\frac{z}{e}\right) = 3{,}4455.\ \text{Daher:}$$

$$\frac{i\,.\,l}{e} = 4{,}3406 - 3{,}4455 = 0{,}8951 \text{ also:}$$

$$l = 0{,}8951\,.\,2{,}40\,.\,2253 = 4839{,}98 \text{ Fuß},$$

ein Werth, der verhältnißmäßig gut mit dem S. 459 gefundenen übereinstimmt.

§. 159.

Die directe Integration des Ausdruckes I, §. 156, welche, nach dem in §. 147 angewandten Verfahren, leicht auszuführen ist, liefert eine Gleichung, die zur Berechnung von Stauweiten dann vortheilhafter wie die Reihe Nr. 4, S. 481 ist, wenn die Werthe von $\frac{z}{e}$ die Zahl 3 übersteigen.

Hierzu verändern wir wieder $i\,.\,dl = \frac{y^3 dy}{e^3 - y^3}$ in

$$i\,.\,dl = -\left[1 + \frac{e^3}{y^3 - e^3}\right] dy \text{ und weiter in}$$

$$i\,.\,dl = -\left[dy + \frac{e}{3}\,\frac{dy}{y-e} - \frac{e}{3}\,\frac{(y+2e)\,dy}{y^2+ye+e^2}\right], \text{ woraus folgt:}$$

$$i\,.\,l = -y - \frac{e}{3}\,\text{Lgnt}\,(y-e) + \frac{e}{6}\int\left(\frac{2y+e}{y^2+ye+e^2}\right) dy +$$

$$+ \frac{e^2}{2}\int\frac{dy}{y^2+ye+e^2} + \text{Const.}^{2)},\ \text{d. i.}$$

---

[1]) $f\left(\frac{Z}{e}\right) = 4{,}2826 + 0{,}1017\,\frac{0{,}083}{0{,}10} = 4{,}2826 + 0{,}0577 = 4{,}3406.$

$f\left(\frac{z}{e}\right) = 3{,}3594 + 0{,}1037\,\frac{0{,}083}{0{,}100} = 3{,}3594 + 0{,}0861 = 3{,}4455.$

[2]) Die directe Integration der Gleichung I. des §. 156 hat zuerst Weisbach zur Berechnung von Stauweiten ausgeführt und zwar bereits gegen Ende der dreißiger Jahre nach Mittheilung an den damals an der Chemnitzer Gewerbeschule lehrenden Verfasser. Später, 1844, hat Weisbach das betreffende Endresultat in Hülse's Maschinenencyklopädie, im Abschnitte „Bewegung des Wassers" (Bd. I, S. 190) zur Berechnung eines Funk'schen Beispieles benutzt.

Nachher hat sich Hagen (Wasserbaukunst, Theil II, Bd. 1, S. 326) um die Sache bemüht, ferner Heinemann in Erbkam's „Zeitschrift für Baukunst". Jahrg. V (1855), S. 203 ff., der namentlich den Hagen'schen Integral-

$$i\,.\,l = -y - \frac{e}{3}\,\mathrm{Lgnt}\,(y-e) + \frac{e}{6}\,\mathrm{Lgnt}\,(y^2 + ey + e^2) +$$
$$+ \frac{e}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{2y+e}{e\sqrt{3}}\right) + \mathrm{Const.}$$

Daher mit Bezug auf die in Fig. 177 markirten Grenzen

$$\overline{RU} = z + e = y \text{ und } \overline{AB} = Z + e = Y,$$

wonach l durch $\overline{SB}$ dargestellt wird:

$$\text{I.}\quad i\,.\,l = Z - z + \frac{e}{6}\,\mathrm{Lgnt}\left[\frac{Z^2\,(z^2 + 3ez + 3e^2)}{z^2\,(Z^2 + 3eZ + 3e^2)}\right] -$$
$$- \frac{e}{\sqrt{3}}\left\{\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{2Z+3e}{e\sqrt{3}}\right) - \mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{2z+3e}{e\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

Setzt man in letzterer Gleichung $Z = Ue$, also $U = \frac{Z}{e}$ und eben so $z = ue$, also $u = \frac{z}{e}$, dividirt ferner links und rechts durch e, so folgt:

$$\text{II.}\quad \frac{i\,.\,l}{e} = U - u + \tfrac{1}{6}\,\mathrm{Lgnt}\left[\frac{U^2\,(u^2 + 3u + 3)}{u^2\,(U^2 + 3U + 3)}\right] -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{2U+3}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{2u+3}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

Mittelst dieser Gleichung hat Herr Dr. Gödecker sich bereits 1861 mit Erfolg bemüht, die Werthe meiner Stautabellen (der ersten Auflage der Hydrodynamik) zu verbessern und zu erweitern, wovon auch bei der gegenwärtigen (2. Auflage) Gebrauch gemacht wurde [1]).

---

ausdruck wegen unvollkommener Constantenbestimmung tadelt und diesem Mangel abzuhelfen suchte. Bald nach Heinemann hat einer meiner fleißigen Zuhörer, der jetzige Oberlehrer Dr. Gödecker am Gymnasium zu Göttingen, die Gleichung I. abgeleitet, solche aber erst 1861 im VII. Bande, S. 186 der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins veröffentlicht.

Bei sämmtlichen vorgenannten Rechnungen war man mit ganz richtigem Tacte bemüht, den Erfahrungscoefficienten k der Chezy-Eytelwein'schen Formel (S. 400 ff.) vor der Integration völlig wegzuschaffen, was den jüngsten Erfahrungen über Bestimmung der jedesmaligen Größe von k (S. 404—417) vollständig entspricht.

Unter Beibehaltung eines constanten Werthes für k hat 1860 der Pariser Professor und Ingenieur Bresse in seinem „Cours de mécanique appliquée", Seconde Partie, Pag. 220 etc., denselben Gegenstand behandelt und den betreffenden Endwerth zur Berechnung von Stautabellen benutzt, die jedoch den vorher mitgetheilten Tabellen nicht vorzuziehen sind. Endlich hat sich in jüngster Zeit auch Grashof im ersten Theile seiner theoretischen Maschinenlehre, §. 133, um die Sache bemüht und auch gezeigt, wie man selbst ein veränderliches k in die Formel einzuführen vermag.

[1]) Dr. Gödecker nahm überdies nicht (wie hier §. 157 geschah) $\frac{z}{e} = 0{,}0098$ zum Ausgangspunkte bei der Berechnung der höchsten Tabellenwerthe, sondern wählte dafür $\frac{z}{e} = u = 0{,}010$. Die betreffende Endgleichung erscheint demnach

Benutzt man letztere Gleichung zur directen Berechnung des §. 158, S. 489 (Belanger, Essai etc., §. 25) entlehnten Beispieles, so ist:

$$U = \frac{Z}{e} = \frac{1{,}50}{1{,}05} = 1{,}429;\ u = \frac{z}{e} = \frac{0{,}60}{1{,}05} = 0{,}571, \text{ folglich:}$$

$$\begin{matrix} 3U = 4{,}287;\ U^2 = 2{,}042; \\ 3u = 1{,}713;\ u^2 = 0{,}326; \end{matrix} = \text{Lgnt}\left[\frac{U^2(u^2+3u+3)}{u^2(U^2+3U+3)}\right] = \text{Lgnt}\,3{,}383 = 1{,}21876.$$

Daher:

$$\frac{i.l}{e} = 1{,}429 - 0{,}571 + \frac{1{,}218764}{6} - 0{,}0627 = 0{,}998427,$$

folglich, weil $i = 0{,}000115$ auch

$$l = \frac{0{,}998427\,.\,1{,}05}{0{,}000115} = 9116^m{,}07.$$

Unsere Tabelle I. lieferte, nach S. 489:

$$l = 9130^m{,}40,$$

Belanger (Essai, Pag. 25) berechnet $l = 9245^m{,}0$, Bresse (Cours de Mécanique II, Pag. 224 und 225) findet $l = 9072^m{,}0$, Grashof (Theoret. Maschinenlehre, S. 767) findet $l = 9066^m{,}0$.

Zum Vergleiche werde noch die S. 488 gelieferte Tabelle durch die nach Bresse berechneten Werthe erweitert:

Wenn die Stauhöhen sind	2 Fuß	1,0 Fuß	0,50 Fuß	0,25 Fuß
Ergeben sich die Stauweiten nach Bresse zu	5472 Fuß	11642 Fuß	15708 Fuß	18803 Fuß

Hinsichtlich anderer, namentlich theoretischer Erörterungen und Berechnungen etc. für Specialfälle der Abschnitte Stauhöhe und Stauweite, u. A. auch den interessanten Bidone'schen „Wassersprung" betreffend, ist namentlich Studirenden nicht genug Grashof's „Theoretische Maschinenlehre", Bd. I, insonderheit §. 134 und 135 zu empfehlen. Der für die (mehr) practischen Zwecke gegenwärtiger Hydrodynamik zulässige Umfang unseres Buches gestattete leider nicht, dasselbe durch die gedachten höchst werthvollen Arbeiten Grashof's zu vervollständigen.

---

im citirten Bande der Zeitschrift des Hannov. Archit.- und Ingen.-Vereins unter der Form:

$$\frac{i.l}{e} = U + 2{,}32275 - \tfrac{1}{6}\,\text{Lgnt}\left(\frac{U^2+3U+3}{U^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{2U+3}{\sqrt{3}}\right).$$

Dritter Abschnitt.

Bewegung des Wassers in Röhren und Röhrenleitungen.

Erstes Capitel.

Bewegung des Wassers in Röhren.

§. 160.

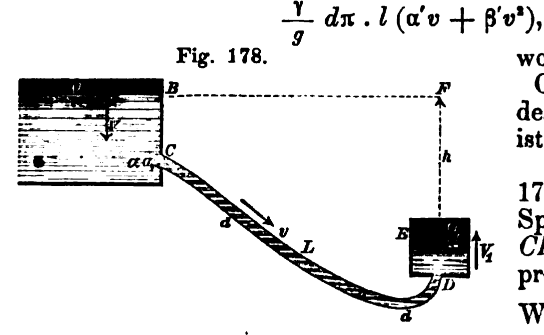
Die Gesetze der Bewegung des Wassers in Röhren würden ohne Weiteres aus §. 78 bis mit §. 80 zu entnehmen sein, hätte man dort bereits auf den Widerstand Rücksicht genommen, welcher, eben so wie beim Fortfließen in Canälen, in Röhren bemerkbar wird, sobald deren Länge (nach S. 281) ungefähr das Vierfache ihres Durchmessers übertrifft. In der Gestalt, wie sich die betreffenden Gleichungen an den citirten Orten vorfinden, geben sie gegenüber den Beobachtungen viel zu große Geschwindigkeiten, und zwar ist diese Differenz um so bedeutender, je länger die Röhren sind und je kleiner ihr Durchmesser ist.

So weit bis jetzt Beobachtungen über die Natur dieses Widerstandes lehren, kann man ihn, für practische Zwecke, abgesehen von den Zahlenwerthen der betreffenden Coefficienten, durch denselben mathematischen Ausdruck, §. 132, S. 395, darstellen, welcher unter ziemlich gleichen Umständen bei der Canalbewegung benutzt wurde.

Bezeichnet man den Durchmesser der überall als gleichweit vorauszusetzenden cylindrischen Röhre von kreisförmigem Querschnitte mit d und deren Länge mit l, so ergiebt sich jener Widerstandswerth zu

$$\frac{\gamma}{g}\, d\pi \, . \, l\, (\alpha' v + \beta' v^2),$$

Fig. 178.



wobei v die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre ist.

Hiernach sei O, Fig. 178, der Querschnitt des Speisebassins B der Röhre CD, woselbst sich die pro Secunde abfließende Wassermasser $M = \frac{Q}{g}$

fortwährend an der Oberfläche mit der Geschwindigkeit V so ersetzen mag, daß die Druckhöhe über der Mündung a_1 bei C stets dieselbe bleibt, dabei aber der Contractionscoefficient bei a_1 gleich α ist. Das prismatische Gefäß ED, in welches sich das Röhrenwasser ergießt, habe einen Querschnitt $= O_1$ und die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche E daselbst sei $= V_1$; endlich werde die Druckhöhe über E oder die Differenz der Wasserspiegel in E und B mit h bezeichnet.

Unter denselben Voraussetzungen, wie §. 78 und 83, und mit Beachtung, daß hier $OV = \alpha a_1 v_1 = av = O_1 V_1$ ist, wenn v_1 die Geschwindigkeit in der Mündung a_1 bei C bezeichnet, liefert das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte in Verbindung mit dem Principe Carnot's unmittelbar die Gleichung: [1])

$$\tfrac{1}{2} M (V_1^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} M (v_1 - v)^2 + \tfrac{1}{2} M (v - V_1)^2 =$$
$$gMh - \frac{\gamma}{g}\, d\pi l\, (\alpha' v + \beta' v^2) v,$$

oder wegen $\frac{\gamma}{g}\, v = \frac{M}{a} = \frac{4M}{d^2\pi}$, so wie $V_1 = \frac{av}{O_1}$ und $v_1 = \frac{a}{\alpha_1} v$:

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 \left(\frac{a^2}{O_1^2} - \frac{a^2}{O^2}\right) + \tfrac{1}{2} Mv^2 \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2 + \tfrac{1}{2} Mv^2 \left(1 - \frac{a}{O_1}\right)^2 =$$
$$gMh - \frac{4l}{d} M (\alpha' v + \beta' v^2),$$

d. i. auch, wenn man durch gM dividirt:

$$\frac{v^2}{2g}\left[\frac{a^2}{O_1^2} - \frac{a^2}{O^2} + \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{a}{O_1}\right)^2\right] =$$
$$h - \frac{l}{d}\left(\frac{4\alpha'}{g} \cdot v + \frac{4\beta'}{g} v^2\right),$$

oder endlich, wenn $\frac{4\alpha'}{g} = A'$ und $\frac{4\beta'}{g} = B'$ gesetzt wird:

$$\text{I.} \quad \frac{v^2}{2g}\left[\frac{a^2}{O_1^2} - \frac{a^2}{O^2} + \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{a}{O_1}\right)^2\right] =$$
$$h - \frac{l}{d}(A'v + B'v^2).$$

Ist der Querschnitt a der Röhre CD in Bezug auf die Querschnitte O und O_1 der Gefäße B und ED klein genug und führt man nach §. 84, S. 226 statt $\left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$ den sogenannten Widerstandscoefficienten η_0 ein, so ergiebt sich:

$$h = \frac{v^2}{2g}(1 + \eta_0) + \frac{l}{d}(A'v + B'v^2).$$

Schreibt man ferner ähnlich §. 133, S. 400,

$$\frac{v^2}{2gk_1^2} = A'v + B'v^2, \text{ so folgt:}$$

---

[1]) Der Rohrstrang CD wird hierbei als ganz gerade, oder die Krümmungen so gering gedacht, daß deren Einfluß vernachlässigt werden kann. Auf die Krümmungswiderstände der Röhren kommen wir später ausführlich zurück.

$$h = \frac{v^2}{2g}\left[1 + \eta_0 + \frac{1}{k^2}\frac{l}{d}\right],$$

oder endlich $\frac{1}{k^2} = \eta$ gesetzt:

$$\text{II.} \quad h = \frac{v^2}{2g}\left[1 + \eta_0 + \eta\frac{l}{d}\right],$$

hieraus aber:

$$\text{III.} \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \eta_0 + \eta\frac{l}{d}}}.$$

Bei sehr langen Leitungen fällt $1+\eta_0$ gegen $\eta\frac{l}{d}$ so klein aus, so daß man einfach nehmen kann:

$$\text{IV.} \quad h = \eta\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}.$$

Die secundliche Wassermenge $= Q$ berechnet sich in beiden Fällen zu:

$$\text{V.} \quad Q = \frac{\pi d^2}{4}.v.$$

Der Widerstandscoefficient η_0 für das Einmündungsstück, läßt sich nach Weisbach, für practische Zwecke 0,505, folglich $1 + \eta_0 = 1{,}505$ setzen. Nach derselben Autorität ist zu nehmen (für Metermaaß):

$$\eta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}$$ [1]).

Nach letzterem Werthe wurde folgende Tabelle berechnet:

v	$0^m,1$	$0^m,2$	$0^m,3$	$0^m,4$	$0^m,5$	$0^m,7$	$1^m,0$	$1^m,1$	$1^m,2$	$1^m,3$	$1^m,4$	$1^m,5$	$2^m,0$	$3^m,0$
η	0,0443	0,0356	0,0317	0,0294	0,0278	0,0257	0,0239	0,0234	0,0230	0,0227	0,0224	0,0221	0,0211	0,0199

§. 161.

Geschichtliche Notizen.

Ueber den Widerstand, welchen bewegtes Wasser in Röhren erfährt, handelte zuerst Pitot in den Memoiren der Pariser Academie von 1728, indem er daselbst zeigte, daß sich der Widerstand wie umgekehrt die Durchmesser der Röhren verhalte. Die ersten und zugleich für die

[1]) Auf die betreffenden verdienstlichen Arbeiten Weisbach's, so wie auf die späteren Arbeiten von Darcy, Hagen u. A. kommen wir im nächstfolgenden Paragraphen zurück, wo auch über den Einfluß der Temperatur des Wassers berichtet wird.

Praxis noch heute brauchbarsten Beobachtungen stellte Couplet[1]) an den Wasserleitungen von Marly nach Versailles an, die leider nur nicht umfangreich genug waren, um den Anforderungen hinlänglich zu entsprechen; am allerwenigsten aber befriedigten die Theorien, welche sowohl Couplet selbst, als nachher Belidor auf diese Versuche zu gründen suchten.

Die größte Zahl von Versuchen, mit besonders hierzu hergestellten Röhren aus Weißblech, stellte Bossut bei dem Speisebassin an, welches die Stadt Mezières mit Wasser versorgt[2]). Bossut wagte jedoch nicht, aus den bis dahin gewonnenen Erfahrungsresultaten einen mathematischen Ausdruck aufzustellen, vielmehr empfahl er, aus den Beobachtungswerthen durch Interpolation oder durch graphische Darstellung, etwa zu suchende Größen annäherungsweise zu ermitteln.

Dubuat[3]) unternahm neue Versuche, um die Couplet's und Bossut's zu vervollständigen, und war besonders so glücklich, jene mathematische Formel aufzustellen, welche wir bereits S. 398 aufführten und die er für Röhren wie Canäle gleich anwendbar hielt. Die betreffenden Zahlencoefficienten bestimmte Dubuat aus 7 Beobachtungen Couplet's, 26 Bossut's und aus 56 eigenen, überhaupt aus 89 an Röhren gemachten Beobachtungen, denen er 36 Beobachtungen an Canälen und Flüssen beifügte.

Die Mängel der Dubuat'schen Formel wurden bereits S. 398 erörtert, und waren Ursache, daß man sich auch für Röhrenleitungen bemühte, andere brauchbarere mathematische Ausdrücke zu bilden.

In Deutschland gebührt Woltmann[4]) das Verdienst, eine derartige bessere Formel aufgestellt zu haben.

Er findet (1790), aus entsprechenden Raisonnements und unter Bestimmung der Zahlenwerthe mittelst 87 Versuchen Couplet's, Bossut's und Dubuat's für Röhrenleitungen[5]):

$$\frac{v^{\frac{7}{4}}}{133{,}6} = \frac{g \,.\, r}{b} \text{ (franz. Zollmaaß),}$$

wobei $g = 362$, $r = \frac{1}{4}\, d$, $b = \dfrac{l}{h - \dfrac{v^2}{478}}$ ist, weshalb man auch schreibt:

$$v^{\frac{7}{4}} = 133{,}6 \,.\, g \,.\, \frac{d}{4}\left(\frac{h - \dfrac{v^2}{478}}{l}\right).$$

Eytelwein hielt auch letzteren Ausdruck noch zur Bestimmung von v nicht einfach genug und entwickelte (1796) aus allgemeinen Principien der Hydraulik einen anderen, dessen Zahlencoefficienten er

---

[1]) Couplet, der Sohn, theilt die betreffende Abhandlung in den Mémoires de l'Académie für 1732 mit. Ausführlich berichtet hierüber Bossut in seinem Traité d'hydrodynamique, Tome II, Nr. 672.

[2]) S. 128, T. II, seiner 1795 erschienenen Hydrodynamique.

[3]) Principes, Nr. 334.

[4]) Beiträge zur hydraulischen Architektur, Bd. 1, S. 165.

[5]) Ebendaselbst, S. 169.

aus 51 Beobachtungen (7 von Couplet, 26 von Bossut und 18 von Dubuat) bestimmte und dadurch überhaupt erhielt:

$$v = \sqrt{\frac{478 \, . \, h}{1 + 0{,}0206 \, \frac{l}{d}}},$$

wobei sich alle Größen auf Pariser Zoll beziehen[1]).

Noch brauchbarer für große Geschwindigkeiten hielt Eytelwein folgende Formel:

$$v = \sqrt[35]{\left(\frac{478 \, . \, h}{1 + 0{,}0206 \, \frac{l}{d}}\right)^{18}},$$

der er sich auch bei Röhrenleitungen, in den bemerkten Zusätzen der Dubuat'schen Hydraulik, ausschließlich bediente.

Prony's (1802) bereits S. 399 hervorgehobenen Bemühungen, eine recht brauchbare Formel für das Gesetz der Bewegung des Wassers in Canälen zu Stande zu bringen, wurden Veranlassung, daß dieser Hydrauliker gedachte Formel auch auf Röhrenleitungen anzuwenden suchte und hierzu aus den bekannten, von Eytelwein bereits benutzten 51 Versuchen, nach einer Methode von La Place[2]) die Gleichung entwickelte:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{4l}{d}(0.0000173314 \, . \, v + 0{,}00000940302 \, . \, v^2) \text{ für pariser Zoll,}$$

oder:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{4l}{d}(0{,}0000173314 \, . \, v + 0{,}000348259 \, . \, v^2) \text{ für Meter.}$$

Zwölf Jahre später (1814) behandelte Eytelwein letztere Form der Darstellung von Neuem[3]), und zwar besonders aus dem Grunde, weil Prony ein wesentliches Glied, nämlich das, was sich auf die Contraction beim Eintritt des Wassers in die Röhre bezieht, vernachlässigt hatte, und findet mit Zuziehung derselben Beobachtungen nach gleicher Methode:

$$h = \frac{v^2}{2g\varepsilon^2} + \frac{4l}{d}(0{,}0000223579 \, . \, v + 0{,}0000075882 \, . \, v^2) \text{ für pariser Zoll,}$$

wobei $\varepsilon = 0{,}8125 = \frac{13}{16}$, also $\varepsilon^2 = 0{,}660156$ vorausgesetzt ist.

Die Versuche von Gerstner[4]) (1798) und die Bemühungen des Engländers Young[5]) um eine passende Formel mögen insbesondere deshalb hier aufgeführt werden, weil ersterer den Einfluß der Wärme auf die Bewegung des Wassers in Röhren nachwies und zeigte, daß

---

[1]) Dubuat's Principien der Hydraulik, deutsch von Kosmann, mit Zusätzen von Eytelwein. Berlin 1796, S. 86 etc.

[2]) Mécanique céleste, 1re part., liv. 3, art. 40 und auch Recherches physico-mathématiques de Prony, introduction, Pag. XVIII.

[3]) Abhandlung der Königlichen Academie der Wissenschaften in Berlin. Aus den Jahren 1814—1815, S. 159.

[4]) Handbuch der Mechanik, Bd. 2, S. 191.

[5]) „Rees' Cyclopaedia", Artikel Water, Bd. 38, und daraus „Maschinenencyklopädie, Bd. 2, S. 564.

durch erhöhte Temperatur die Geschwindigkeit vergrößert werde[1]) und letzterer die Erfahrungscoefficienten der Röhrenformel als mit den Durchmessern der Röhren veränderlich annahm.

Weisbach[2]) wandte zuerst (1840) die Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung der Coefficienten A' und B' (S. 495) an und benutzte dabei, außer den genannten 51 Beobachtungen noch eine von Gueymard, welche dieser Ingenieur an der Wasserleitung zu Grenoble angestellt hatte[3]). Die Resultate der betreffenden Rechnungen ergaben (für Metermaaß):

$$h = 0{,}0774\, v^2 + 0{,}00022915 \frac{l}{d}\, v + 0{,}00092627 \frac{l}{d}\, v^2.$$

Hagen[4]) kam nachher bei seinen Bestimmungen auf den Woltmann'schen gebrochenen Exponenten $\frac{7}{4}$ zurück, benutzt außer bereits oben aufgeführten Versuchen auch noch von Provis[5]) in England angestellte und findet ebenfalls nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn ϱ den innern Röhrenhalbmesser bezeichnet,

$$h = 0{,}024\, .\, v^2 + 0{,}003 \frac{l}{\varrho}\, v^{\frac{7}{4}},$$

wo h, v und l in Fußen und ϱ in Zollen, rheinländisches Maaß, ausgedrückt sind.

Auch diesen Ausdruck betrachtet Hagen nur als Annäherungswerth, räth deshalb, das erste Glied rechts ganz fortzulassen, dafür aber den Zahlencoefficienten des zweiten Gliedes auf 0,005 zu erhöhen, wodurch die Formel gleichzeitig noch für Röhren mit schwachen Krümmungen brauchbar werden soll. Es wird sonach

$$h = 0{,}005 \frac{l}{\varrho}\, v^{\frac{7}{4}},$$

oder nach Einführung der Wassermenge Q:

$$\varrho^{\frac{9}{2}} = 0{,}00069 \frac{4l}{h}\, Q^{\frac{7}{4}}.$$

Als seiner Zeit practische Fachautorität darf d'Aubuisson nicht unerwähnt bleiben, der, anders als Eytelwein, insbesondere nach Couplet's Versuchen (Hydraulique, Pag. 224, §. 186) die Gleichung aufstellte:

$$h = 0{,}051\, v^2 + 0{,}00137 \frac{l}{d} (v^2 + 0{,}055\, v).$$

---

[1]) Indeß gilt dies nur für Röhren von geringen Durchmessern. Gerstner wandte zu seinem Versuche solche von $\frac{4}{5}$ bis $2\frac{2}{5}$ Linien Weite an. Seine Resultate bewogen ihn zu mancherlei interessanten Folgerungen, z. B. Nachweis, weshalb der Puls des Menschen unter heißen Himmelsstrichen schneller als unter kalten schlägt, warum die Vegetation im Sommer besser von Statten gehe als im Winter etc. (a. a. O., S. 199).

[2]) Polytechn. Centralblatt 1840, Bd. 2, S. 863.

[3]) Annales des mines, IIe Serie, Tome V, 1829.

[4]) Handbuch der Wasserbaukunst. 1. Theil, S. 220 etc., 2. Aufl., 1853.

[5]) Transactions of the Institution of Civil Engineers. Vol. II. London 1838, Pag. 201.

Entfernt man hier v mittelst $\frac{Q}{d^2 \frac{\pi}{4}}$ und reducirt auf d, so erhält man (zur Bestimmung des Durchmessers d):

$$d^5 - \left\{0{,}00009594 \frac{lQ}{h} d^2 + 0{,}0826 \frac{Q^2}{h} d + 0{,}00222 \frac{lQ^2}{h}\right\} = 0.$$

Im Jahre 1854 behandelte Hagen[1]) die Frage über den Einfluß der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren von Neuem höchst sorgfältig und mit Hinzufügung eigener Beobachtungen (an Röhren von $1\frac{1}{4}$ bis $2\frac{3}{4}$ Linien Durchmesser) zu den bereits bekannten[2]). Indeß ließ sich aus diesen Versuchen ein bestimmter Schluß auf den Temperatureinfluß bei der Bewegung des Wassers in Röhren von größeren Durchmessern, wie solche in der Hydrotechnik Anwendung finden, nicht machen.

Weisbach[3]) gelangte später nach 11 eigenen Versuchen, so wie mit Benutzung von 52 Versuchen Couplet's, Bossut's, Dubuat's und Gueymard's, zu dem bereits im vorigen Paragraphen benutzten Ausdrucke für den Widerstandscoefficienten η, nämlich zu

$$\eta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}} \text{ (Meter).}^{4)}$$

Der bereits S. 401 aufgeführte französische Ingenieur St. Venant[5]) entwickelte aus den bekannten 51 französischen Versuchen die Formel

$$\frac{h}{l} \cdot \frac{d}{4} = 0{,}00029557 \, . \, v^{\frac{12}{7}} \text{ (Meter), oder}$$

$$v = 114{,}494 \left(\frac{d}{4} \cdot \frac{h}{l}\right)^{\frac{7}{12}},$$

deren Werthe sich, nach einer vergleichenden Zusammenstellung seiner Abhandlung (a. a. O., S. 73) den Versuchen ungewöhnlich gut anschließen.

Sowohl vom wissenschaftlichen als namentlich vom practischen Standpunkte aus betrachtet, verdienen die Arbeiten Darcy's[6]) beson-

---

[1]) Abhandlungen der Königlichen Academie der Wissenschaften, Jahrg. 1854.

[2]) Für enge Röhren, wie sie Hagen in Anwendung brachte, sollte

$$h = m \, . \, \frac{l \, . \, v^{1,75}}{\varrho^{1,25}}$$

zu setzen sein, wobei $m = 0{,}000038941 - 0{,}0000017185 \sqrt{t}$ ist, alles auf Zolle bezogen und die Temperatur t in Réaumur Graden ausgedrückt.

[3]) Ingenieur-Mechanik, Bd. 1, S. 1015, 5. Auflage.

[4]) Zu den allerjüngsten Bestätigungen über practische Brauchbarkeit der Weisbach'schen Widerstandscoefficienten bei Berechnungen von Wasserleitungsröhren dürften auch Versuche des Ingenieurs Disselhoff zu rechnen sein, welche mitgetheilt werden in der Wochenschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, vom 11. Octbr. 1879, S. 382.

[5]) Formules et Tables Nouvelles etc. Paris 1851, Pag. 71.

[6]) Les Fontaines Publiques de la ville de Dijon. Paris 1856, Pag. 376 und Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Paris 1857, Pag. 111. Unter der Ueberschrift: „Die Messungen Darcy's", berichtet in den uns bekannten deutschen Quellen über Darcy's reichhaltige Arbeit am Vollständigsten Lampe in seiner werthvollen Abhandlung „Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in Röhren", welche sich im „Civilingenieur", Bd. 19, S. 1 und S. 67 abgedruckt vorfindet.

dere Beachtung, der nach eigenen Beobachtungen an der Wasserleitung zu Chaillot in Paris mit Röhren aus verschiedenem Material (Eisen, Blei, Glas, Asphalt, neu so wie alt, aber von Niederschlägen gereinigt), bei Durchmessern von $0^m,0122$ bis $0^m,50$, bei 100^m Länge und mittleren Geschwindigkeiten $0^m,160$ bis $5^m,0$ pro Secunde, vor Allem zu dem bemerkenswerthen Resultate gelangte, daß die Beschaffenheit und der Zustand der Röhrenwände einen merklichen Einfluß auf die Wassermengen der Röhren ausübe[1]). Uebrigens paßte er seine Versuche der Formel an:

$$\varrho \cdot \frac{h}{l} = b_1 v^2,$$

$$\text{oder } \frac{h}{l} = \frac{b_1}{\varrho} v^2, \text{ oder auch } v = \sqrt{\frac{\varrho}{b_1} \frac{h}{l}},$$

wobei b_1 ein Zahlenwerth ist, dessen Größe (nach dem Beispiele Young's) mit dem Halbmesser ϱ der Röhre veränderlich ist.

Da übrigens Darcy vorzugsweise bestrebt war, empirische Regeln ausfindig zu machen, nach denen die Leistungsfähigkeit der Röhrenleitungen in ihrer gewöhnlichen Unvollkommenheit und mit Rücksicht auf Verunreinigung nach längerem Gebrauch beurtheilt werden kann, so nahm er, unter allen Umständen, vorausgesetzt, daß $v > 0,20$ Meter ist:

$$b_1 = 0,000507 + \frac{0,00000645}{\varrho}.$$

Zur Benutzung dieser Formeln entlehnen wir folgende Werthe einer größeren Tabelle Darcy's:

Durchmesser d (Meter)	Radien ϱ (Meter)	Coefficient b_1	$\frac{b_1}{\varrho}$	$\sqrt{\frac{\varrho}{b_1}}$
0,01	0,005	0,001801	0,36020	1,666
0,02	0,010	0,001154	0,11540	2,943
0,05	0,025	0,000765	0,030632	5,713
0,10	0,050	0,000636	0,012728	8,863
0,15	0,075	0,000593	0,007910	11,243
0,20	0,100	0,000571	0,005717	13,225
0,25	0,125	0,000558	0,004470	14,956
0,30	0,150	0,000550	0,003667	16,512
0,35	0,175	0,000543	0,003108	18,936
0,40	0,200	0,000539	0,002696	19,256
0,50	0,250	0,000532	0,002131	21,659
0,60	0,30	0,000528	0,001761	23,823
0,80	0,40	0,000523	0,001307	27,650
1,00	0,50	0,000519	0,001039	31,010

[1]) Weisbach's Angaben, daß nach seinen Versuchen ordinäre hölzerne Röhren von $2\frac{1}{2}$ und $4\frac{1}{2}$ Zoll Weite den Widerstandscoefficienten 1,75 Mal so groß gaben als Metallröhren, stimmen damit überein. Ingen.-Mechanik, Bd. 1 (5. Auflage), S. 1019 (Anmerkung).

Vorausgesetzt sind hierbei im Innern völlig reine und glatte Röhren. Sind die Wände bereits mit leichtem Niederschlag oder Oxyd bedeckt, so räth Darcy, sobald das einer bestimmten Geschwindigkeit correspondirende Gefälle gesucht wird, das berechnete Gefälle zu verdoppeln, oder wenn das Gefälle gegeben ist, nur die Hälfte davon zur Bestimmung der betreffenden Geschwindigkeit einzuführen.

Für die mittlere Geschwindigkeit v als Function der Geschwindigkeit V in der Achse der Röhre und der Geschwindigkeit W an den Wänden giebt Darcy den Ausdruck:

$$v = \frac{3V + 4W}{7}.$$

Gestützt auf Darcy's Versuche bemühte sich Hagen[1]), die wahren Gesetze der Bewegung des Wassers in Röhren, unter Rücksicht auf die inneren Bewegungen des strömenden Wasserkörpers, abzuleiten, wobei er zu der Gleichung gelangte:

$$\frac{h}{l} = \alpha \frac{v}{d^2} + \beta \frac{v^2}{d},$$

wo α und β Erfahrungscoefficienten sind und β von der jedesmaligen Temperatur des Wassers abhängig ist.

Giebt man dieser Gleichung die Weisbach'sche Form, so wird:

$$h = \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{vd}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

weshalb, wenn man $h = \eta_1 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ setzt, der Coefficient $\eta_1 = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{vd}$ ist.

87 einzelne Messungen an Röhren aus Eisen, Glas und Asphalt mit Durchmessern von $0^m,014$ bis $0^m,50$ und bei Geschwindigkeiten von $0^m,16$ bis $5^m,0$, lieferten Hagen:

$$\alpha_1 = 0{,}023577 \text{ und}$$

$$\beta_1 = 0{,}00011519 - 0{,}000004191\,t + 0{,}00000009229\,t^2,$$ [2])

wobei t die Temperatur des Wassers in Centigraden ist.

Vernachlässigt man von den beiden Coefficienten α_1 und β_1 den ersteren von der Temperatur unabhängig, so ergiebt sich:

$$\frac{h}{l} = \beta_1 \frac{v}{d^2},$$

ein Ausdruck, der auch (später als Hagen) von dem französischen Arzte Poiseuille[3]), nur unter etwas anderer Gestalt gefunden wurde,

---

[1]) „Ueber die Bewegung des Wassers in cylindrischen nahe horizontalen Leitungen". Gelesen in der Gesammtsitzung der Berliner Academie der Wissenschaften am 16. Decbr. 1869. (Als besonderer Abdruck 1870 erschienen.)

[2]) Berechnet man für $t = 10^0$ die Werthe von η der Weisbach'schen Tabelle (S. 496), so variiren die gefundenen Zahlen nur zwischen 0,02369 als Minimum und 0,02399 als Maximum, so daß man für technische Zwecke bei dieser Temperatur einfach 0,024 setzen kann.

Bei $t = 15^0$ würde man statt $\eta = 0{,}024$ die Zahl 0,02395 gefunden haben. Man sehe hierüber eine Arbeit des Ingenieurs Halbertsma in Schilling's Journal für Gasbeleuchtung etc., 1879, S. 236. (Nach den Transactions of the American Society of Civil Engineers, über Bewegung des Wassers in Röhren von C. G. Darrach.)

[3]) Annales de Chimie et de Physique etc. IIIe Série. Tome VII (1843),

weshalb man auch das darauf folgende Resultat das Hagen-Poiseuille-sche Gesetz zu nennen pflegt[1]).

Die allerjüngsten Arbeiten über den fraglichen Gegenstand haben nach einander Prof. Neumann und Dr. Jacobson in Königsberg geliefert, indem Neumann das Gesetz der Bewegung des Wassers in Röhren, insbesondere das Poiseuille'sche Gesetz aus streng wissenschaftlichen Principien ableitete[2]) und nachher Jacobson[3]) unter ferneren geeigneten Annahmen[4]), nach allgemeinen Principien der Mechanik fand:

$$h = \frac{v^2}{g} + \frac{8\eta l}{g\delta\varrho^2} v,$$

worin außer den bereits bekannten Bezeichnungen (auch $g = 9^m,81$), δ die der Temperatur t entsprechende Dichte der betreffenden Flüssigkeit bezeichnet und η, Coefficient der innern Reibung ist:

$$\eta = \frac{g\delta}{5511,3} \times \frac{1}{1 + 0,033679\,t + 0,0002209\,t^2}.$$

Durch das Glied $\frac{8\eta l}{g\delta\varrho^2} v$ wird überdies der theoretische Werth des Seitendrucks am Anfange des Rohres dargestellt. Jacobson's Versuche[5]) bestätigen im Wesentlichen die aus der Theorie abgeleiteten Resultate.

Unter Benutzung aller dieser Arbeiten hat sich Dr. Lampe in Danzig in allerjüngster Zeit bemüht, von 1869 ab, Versuche an der dortigen großen, circa zwei Meilen (14130 Meter) langen Wasserleitung anzustellen und zwar mit Röhren von 0,4185 Meter Durchmesser und was von besonderer Wichtigkeit ist, bei Druckhöhen von über 50 Fuß rhn. oder von 15,70 Meter.

---

oder der ganzen Reihe Bd. 82. Führt man nämlich die secundliche Wassermenge $Q = \frac{d^2\pi}{4} v$ in dem obigen Ausdrucke ein, so ergiebt sich

$$Q = \frac{\pi}{4\beta_1} \frac{hd^4}{l} = k_1 \frac{hd^4}{l},$$

wie Poiseuille, a. a. O., Pag. 59 findet.

[1]) Poiseuille entwickelte diesen Ausdruck aus Versuchen, die er hauptsächlich zu dem Zwecke anstellte, um die Gesetze des Blutkreislaufes, namentlich die Bewegung des Blutes in den Capillargefäßen zu untersuchen Er experimentirte daher auch nur mit Röhren, deren Durchmesser von 0,01395 bis 0,6522 Millimetern variirte, d. h. mit Capillarröhren. Neuerdings hat Dr. Lampe in Danzig dem Hagen-Poiseuille'schen Gesetze besondere Aufmerksamkeit gewidmet, worüber nachzulesen ist im Civil-Ingenieur, Bd. 19 (1873), S. 10 und 17.

[2]) Dr. Lampe in den Schriften der Naturforschenden Gesellschaft zu Danzig. Neue Folge. III. Bd., 1. Heft (1872), S. 64. Diese Arbeit wurde für einen größeren Kreis von Lesern, verändert und erweitert veröffentlicht in Bornemann's Civil-Ingenieur, Bd. 19 (1873), S. 1 und S. 67, unter der Ueberschrift: „Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in Röhren".

[3]) In letzterer Quelle S. 33.

[4]) Gedachte Annahme besteht darin, daß beim Uebergange des Wassers aus dem Speisegefäße in die Röhre kein Verlust an lebendiger Kraft stattfinde.

[5]) Civil-Ingenieur, a. a. O. (Bd. 19), S. 36, 38 und S. 74.

Zur Vergleichung mit den Darcy'schen Messungen giebt **Lampe** (für Meter) a. a. O., S. 79, die Formel:

$$\frac{h}{l} = 0{,}000061341 \frac{v}{d^2} + 0{,}00079332 \frac{v^2}{d}$$

und gelangt hierbei zuletzt zu dem Schlusse, „daß die neueste in den Abhandlungen der Berliner Academie (Jahrgang 1869) von **Hagen** aufgestellte Formel für die Bewegung des Wassers in Röhren nur als eine Interpolationsformel, nicht aber als wahrer Ausdruck des Gesetzes für jene Bewegung betrachtet werden kann".[1])

§. 162.

Bei der Berechnung von Röhrendurchmessern für practische Ausführungen geben vorstehende Formeln fast insgesammt zu geringe Werthe, ein Uebelstand, der in der Natur der Sache liegt, da man, mit Ausnahme der Couplet'schen Versuche, alle anderen mit Röhren anstellte, deren Wände glatt und rein waren und überhaupt nicht der Beschaffenheit und dem Zustande entsprachen, in welchem sich selbst die besten Röhren, in mehr oder weniger Zeit des practischen Gebrauches, befinden. So zeigt u. A. **Darcy**[2]), daß die Widerstandscoefficienten für die gebrauchten Wasserleitungsröhren von Dijon im Mittel doppelt so groß genommen werden müßten, als die seiner Formel, wobei neue Röhren vorausgesetzt werden. Aehnliche Erfahrungen haben andere Practiker gemacht.

Die Klagen, selbst der rationellsten Ingenieure, über diese Sachlage sind hinlänglich bekannt. **d'Aubuisson**[3]) und **Hagen**[4]) rathen deshalb, um sicher zu gehen, bei den Berechnungen die Wassermengen um die Hälfte größer zu nehmen, als sie wirklich zu sein brauchen, **Dupuit**[5]) aber empfiehlt, für die gewöhnlichen Fälle der Praxis, ein für allemal die Formel

$$d = \sqrt[5]{\frac{l}{h}\left(\frac{Q}{20}\right)^2}, \text{ oder}$$

$$d = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{l}{h} Q^2} \text{ für Metermaaß.}^{6)}$$

---

[1]) Ueber Dr. **Lampe's** Messungen des Seitendruckes des in Röhren fließenden Wassers, um, nach dem Vorgange **Bornemann's** und **Darcy's**, aus den direct beobachteten Druckverlusten die mittlere Geschwindigkeit im Rohre und weiter das gelieferte Wasserquantum zu bestimmen, wird ein späterer Paragraph Auskunft ertheilen.

[2]) Les Fontaines publiques de la ville de Dijon, Pag. 426.

[3]) Traité d'hydraulique, Pag. 242.

[4]) Handbuch der Wasserbaukunst. Erster Theil, S. 222. Zweite Auflage.

[5]) Traité de la distribution des eaux etc. Paris 1854, Pag. 58.

[6]) Diese Formel ist fast dieselbe, welche **d'Aubuisson** in seiner Hydraulik, Pag. 226 (Nr. 190), für Geschwindigkeiten empfiehlt, welche $0^m{,}6$ übersteigen, indem er setzt:

$$d = 0{,}298 \sqrt[5]{\frac{l}{h} Q^2}.$$

Letzterer Ausdruck, von dessen practischer Brauchbarkeit auch Referent vielfache Gelegenheit gehabt hat, sich zu überzeugen, soll bis auf Weiteres, statt aller früheren Formeln, in der Folge hier benutzt werden, wenn nicht besondere Umstände (wie sehr geringe Geschwindigkeiten) die Anwendung einer der anderen Formeln durchaus nothwendig machen.

Es entspricht hierbei der Widerstandscoefficient dem Werthe $\eta = \frac{1}{33} = 0,03030$, zu dessen weiteren Beurtheilungen die kleine Tabelle des §. 160, S. 496, benutzt werden kann.

Anmerkung. Unter Annahme einer bestimmten Geschwindigkeit v, womit sich das Wasser in einer Röhre bewegen soll (für gewöhnliche Fälle von $0^m,6$ bis $1^m,0$), erhält man für den Durchmesser d:

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} = 1,128 \sqrt{\frac{Q}{v}}.$$

Beispiel 1. Welchen Durchmesser muß man der völlig geraden Hauptröhre einer Wasserleitung geben, wenn erstere 1450 Meter Länge hat und bei $5\frac{1}{3}$ Meter Druckhöhe pro Stunde 140 Cubikmeter Wasser liefern soll? [1])

Erste Auflösung. Durch Einführung vorstehender Werthe in den älteren Weisbach'schen Ausdruck S. 499, wenn dort

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = 1,27324 \frac{Q}{d^2}$$

gesetzt und auf d reducirt wird, ergiebt sich:

$$d^5 - 0,0030847 \,.\, d^2 - 0,00003558 \,.\, d - 0,000617414 = 0.$$

Setzt man, um einen Annäherungswerth zu erhalten, $d^5 = 0,000617414$, so bekommt man vorläufig:

$$d = \sqrt[5]{0,000617414} = 0^m,2.$$

Führt man aber diesen Werth in das zweite und dritte Glied der genauen Gleichung ein, so erhält man:

$$d^5 = 0,00061741 + 0,00012339 + 0,000007116, \text{ d. i.:}$$

$$d = \sqrt[5]{0,0007479} = 0^m,237.$$

Nehmen wir ferner noch $d = 0^m,24$ an, so ergiebt sich:

$$d^5 = 0,000617414 + 0,000177678 + 0,000008539, \text{ folglich:}$$

$$d = \sqrt[5]{0,000803631} = 0^m,2404.$$

Zweite Auflösung. Aus III, §. 160, reducirt man leicht, wenn $v = \left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)$ gesetzt wird:

$$d = \sqrt[5]{\left[\frac{(1 + \eta_1)\, d + \eta l}{2gh}\right] \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2}.$$

Da hier d unter dem Wurzelzeichen vorkommt, so nehmen wir, der vorigen Auflösung entsprechend, $d = 0^m,2$ und finden demgemäß die mittlere Geschwindigkeit, womit sich das Wasser in der Leitung

---

[1]) Weisbach's Beispiel im Polytechn. Centralblatte 1840, Bd. 2, S. 877, zum Vergleiche mit Dupuit's Formel gewählt.

bewegt, zu $v = 0^m,86$, und folglich nach Weisbach (S. 496) $\eta = 0,025$ und $1 + \eta_1 = 1,505$ gesetzt, liefert:

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1,505 \,.\, 024 + 0,025 \,.\, 1450)}{2 \,.\, 9,81 \,.\, \frac{16}{3}} \left(\frac{4 \,.\, 7}{\pi \,.\, 180}\right)^2},$$

$$d = \sqrt[5]{\frac{109,834}{313,920} \left(\frac{26}{\pi \,.\, 180}\right)^2}, \text{ d. i.:}$$

$$d = 0^m,2436.$$

Dritte Auflösung. Mittelst Dupuit's Formel (S. 504) erhält man sofort:

$$d = \sqrt[5]{\frac{1450 \,.\, 3}{16} \left(\frac{140}{3600 \,.\, 20}\right)^2} = 0^m,2525.$$

Hiernach wird zu rathen sein, bei der Ausführung zu nehmen:

$$d = 0^m,253.$$

Vierte Auflösung. Unter Voraussetzung einer bestimmten Geschwindigkeit, mit welcher sich das Wasser in der Röhre bewegen soll, hätte man erhalten:

$d = 1,128 \sqrt{\frac{140}{3600} \,.\, \frac{1}{1}} = 0^m,2224$, wenn $v = 1^m,0$ angenommen wurde,

$d = 1,128 \sqrt{\frac{140}{3600} \,.\, \frac{1}{0,6}} = 0^m,2865$, wenn $v = 0^m,6$ angenommen wurde.

Beispiel 2. Man verlangt den Durchmesser einer 757 Meter langen Röhrenleitung zu kennen, welche bei 1,0 Meter Druckhöhe pro Secunde 0,089 Cubikmeter Wasser liefert.

Erste Auflösung. Mit besonderer Berücksichtigung der Versuche von Couplet findet man, nach d'Aubuisson[1]) (auch S. 500 dieses Buches):

$$d^5 = \left\{0,00009594 \frac{lQ}{h} \,.\, d^2 + 0,0826 \frac{Q^2}{h} + 0,00222 \frac{lQ^2}{h}\right\} = 0,$$

so wie, wenn man vorstehende Zahlenwerthe substituirt:

$$d^5 - (0,006464 \,.\, d^2 + 0,0006547 \,.\, d + 0,013318) = 0.$$

Zuerst das zweite und dritte Glied vernachlässigt, giebt:

$$d = \sqrt[5]{0,01338} = 0^m,4216.$$

Dieser Werth ist offenbar zu klein, weshalb $0^m,425$ in die Gleichung gesetzt werden mag, wodurch sie sich reducirt auf:

$$- 0,00090 = 0;$$

mit 0,427 liefert sie: $- 0,00058 = 0;$

„ 0,430 „ „ $- 0,00009 = 0;$

„ 0,4306 „ „ $0 = 0.$

Der gesuchte Durchmesser ist sonach:

$$d = 0^m,4306.$$

Zweite Auflösung. Dupuit's Formel liefert wieder direct:

$$d = \sqrt[5]{\frac{757}{1} \,.\, \left(\frac{0,089}{20}\right)^2} = 0^m,4316,$$

wonach man die practische Ausführung beschaffen wird.

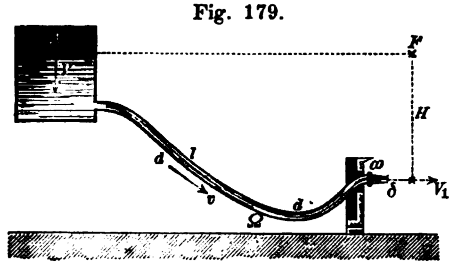
---

[1]) D'Aubuisson: Traité d'hydraulique, Nr. 191.

§. 163.

Ist das untere Ende einer Leitungsröhre vom Querschnitte $\Omega = \frac{d^2\pi}{4}$, wie bisher vorausgesetzt, nicht offen, sondern durch ein Mundstück, einen Schieber oder Hahn, Fig. 179, verengt, so daß der Querschnitt ω der Ausflußöffnung kleiner wie Ω ist, so erhält man ohne Weiteres, ähnlich wie §. 160, wenn man, bis auf die Druckhöhe H, die dortigen Bezeichnungen beibehält, für die Bewegung des Wassers in dieser Leitungsröhre:

Fig. 179.



$$\tfrac{1}{2} M (V_1^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} M (v_1 - v)^2 = gMH - \tfrac{1}{2} M\eta \frac{l}{d} v^2,$$

d. i. wegen $v_1 = \frac{\Omega}{\alpha a_1} v$ und $V_1 = \frac{\Omega}{\mu\omega} v$, so wie $V = \frac{\Omega}{A} v$:

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 \left[\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{A}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2} vM^2 \left(\frac{\Omega}{\alpha a_1} - 1\right)^2 = gMH - \tfrac{1}{2} M\eta \frac{l}{d} v^2,$$

oder wenn A in Bezug auf Ω recht groß ist, ferner $\left(\frac{\Omega}{\alpha a_1} - 1\right)^2 = \eta_1$ gesetzt wird:

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 \left[\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 + \eta_1 + \eta \frac{l}{d}\right] = gMH, \text{ d. i.:}$$

$$\text{I.} \quad v = \sqrt{\frac{2gH}{\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 + \eta_1 + \eta \frac{l}{d}}}.$$

Ist η_1 klein genug, um vernachlässigt zu werden, und bildet die Mündung ω eine Kreisfläche vom Durchmesser $= \delta$, so ist $\frac{\Omega}{\mu\omega} = \frac{d^2}{\mu\delta^2}$, also:

$$\text{II.} \quad v = \sqrt{\frac{2gH}{\frac{d^4}{\mu^2\delta^4} + \eta \frac{l}{d}}}.$$

Führt man in letztere Gleichung die Wassermenge $= Q$ pro Secunde ein, d. h. setzt $v = \frac{4Q}{d^2 . \pi}$ und nimmt $\eta = \frac{1}{33}$ an, so folgt für Metermaaß, indem sodann $\frac{1}{2g} = 0{,}051$ ist, nach gehöriger Reduction:

$$\text{III.} \quad d = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{lQ^2}{H - 0{,}0826 \frac{Q^2}{\mu^2\delta^4}}},$$

so wie auch aus I. für $\eta_1 = 1$:

$$\text{IV.} \quad Q = 20 \sqrt{\frac{H \cdot d^5}{l + 33 \cdot d + \frac{33 d^5}{\mu^2 \delta^4}}}$$

oder genau genug:

$$\text{V.} \quad Q = 20 \sqrt{\frac{H \cdot d^5}{l + 33 \frac{d^5}{\mu^2 \delta^4}}}.$$

Beispiel. Es ist der Durchmesser einer 834 Meter langen Leitung zu bestimmen, die unter 6,5 Meter Druckhöhe, pro Secunde 0,011 Cubikmeter Wasser durch mehrere Oeffnungen am unteren Ende ausgießen soll, deren Gesammtquerschnitt einer Kreisfläche von $0^m,04$ Durchmesser entspricht und wofür der betreffende Ausflußcoefficient zu 0,85 abgeschätzt ist.

Auflösung. Aus III. folgt ohne Weiteres:

$$d = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{834 \cdot (0{,}011)^2}{6{,}50 - 5{,}498}} = 0^m{,}187.$$

§. 164.

Aehnlich wie bei Canälen läßt sich auch bei Röhren mit (gesetzmäßig) veränderlichen Weiten, die **ungleichförmige Bewegung** des Wassers in denselben durch eine Gleichung ausdrücken.

Mit Bezug auf S. 216, und wenn man die dortigen Bezeichnungen beibehält, erhält man nämlich:

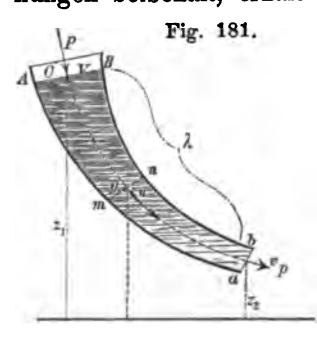


Fig. 181.

1. Für die mechanischen Arbeiten, welche die Pressungen P und p auf die Endflächen $\overline{AB}$ und $\overline{ab}$, Fig. 181, der Röhre von veränderlichen Querschnitten ausüben:

$$\omega u dt \; (P - p),$$

oder, wenn man die Masse des Volumens $\omega u dt$ mit m bezeichnet, wegen $m = \frac{\gamma \omega u dt}{g}$,

$$(1) \quad \frac{m \cdot g}{\gamma} (P - p).$$

Ebenso für die gleichzeitigen mechanischen Arbeiten, welche der Schwerkraftswirkung entsprechen, wenn z_1 und z_2 beziehungsweise die Schwerpunktsabstände der Schichten $\overline{AB}$ und $\overline{ab}$ von einer beliebigen Horizontalebene bezeichnen:

$$(2) \quad mg \, (z_1 - z_2).$$

Endlich für die widerstehende Arbeit, welche das Wasser in der Röhre erfährt, wenn $\overline{mn} = 2y$ den veränderlichen Durchmesser des kreisförmigen Röhrenquerschnittes bezeichnet, $\overline{Cu} = s$ und λ die ganze Röhrenlänge ist:

$$(3) \int_0^\lambda \frac{ds}{2y}(A_1 u + B_1 u^2) \cdot m \cdot g.$$

Setzt man daher V und v die Geschwindigkeiten beziehungsweise in den Schichten $\overline{AB}$ und $\overline{ab}$, so liefert das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte die Gleichung:

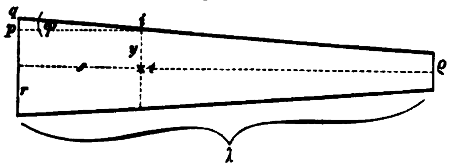
$$\tfrac{1}{2}m(v^2 - V^2) = \frac{mg}{\gamma}(P - p) + mg(z_1 - z_2) - \int_0^\lambda m \cdot g \cdot \frac{ds}{2 \cdot y}(A_1 u + B_1 u^2),$$

oder wenn man auch hier $\frac{u^2}{k_1}$ statt $A_1 u + B_1 u^2$ setzt und durch mg dividirt:

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = \frac{P}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} + z_1 - z_2 - \frac{1}{2k_1^2}\int_0^\lambda \frac{ds}{y} \cdot u^2.$$

Zusatz. In dem besonderen Falle, daß bei einer Röhre von der Länge λ, Fig. 182, die kreisförmigen Querschnitte, also auch deren Radien r und ϱ, mit λ gleichförmig abnehmen, läßt sich die allein zur Bewältigung des Röhrenwiderstandes erforderliche Druckhöhe $= h_1$, unmittelbar durch Auflösung der Gleichung:

Fig. 182.



$$h_1 = \frac{1}{2k_1^2}\int_0^\lambda \frac{ds}{y} u^2$$

wie nachstehend auffinden.

Man drücke zuerst den veränderlichen Röhrenhalbmesser $\overline{it} = y$ durch s aus, was wie folgt geschehen kann.

Es verhält sich $\overline{pq} : \overline{pi} = r - \varrho : \lambda$, d. i.:

$$\overline{pq} = \frac{s(r - \varrho)}{\lambda}, \text{ daher ist}$$

$$\overline{it} = y = r - \frac{s(r - \varrho)}{\lambda} = r\left[1 - \frac{s(r - \varrho)}{\lambda r}\right].$$

Zur Abkürzung setzen wir $\frac{r - \varrho}{\lambda \cdot r} = A$, erhalten also:

$$y = r(1 - As).$$

Ferner ist $u^2 = \left(\frac{\varrho}{y}\right)^4 v^2$, daher

$$h_1 = \frac{\varrho^4 v^2}{2k_1^2}\int_0^\lambda \frac{ds}{y^5}, \text{ oder}$$

$$h_1 = \frac{\varrho^4 v^2}{2k_1^2 r^5}\int_0^\lambda \frac{ds}{(1 - As)^5}, \text{ d. i.}$$

$$h_1 = \frac{1}{8} \frac{\varrho^4 v^2}{A k_1^2 r^5} \left[\frac{1}{(1 - A\lambda)^5} - 1 \right],$$

hier für A den obigen Werth eingeführt, giebt

$$h_1 = \frac{1}{8} \frac{v^2}{k_1^2} \left(1 - \frac{\varrho^4}{r^4}\right) \frac{\lambda}{r - \varrho}.$$

Wird endlich der Convergenzwinkel der Röhre, d. i. piq, mit φ bezeichnet, so ist $\frac{\lambda}{r - \varrho} = \operatorname{cotg} \varphi$ und sonach:

$$h_1 = \frac{1}{8} \frac{v^2}{k_1^2} \left(1 - \frac{\varrho^4}{r^4}\right) \operatorname{cotg} \varphi.$$

Beachtet man noch, daß $k_1^2 = \frac{2g}{\eta}$ gesetzt werden kann, so folgt überdies:

$$h_1 = \frac{1}{8} \eta \cdot \operatorname{cotg} \varphi \left(1 - \frac{\varrho^4}{r^4}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Letzteren Ausdruck entwickelte zuerst Gerstner in seinem Handbuche der Mechanik fester Körper (Bd. 2, S. 288). Nach Weisbach's Angaben (Ingen.-Mechanik, Bd. 1, S, 1021, 5. Auflage) soll derselbe recht gut mit den Versuchen übereinstimmen. Letzterer Hydrauliker berechnet übrigens:

$$h_1 = \frac{1}{8} \eta \cdot \operatorname{cosec} \varphi \left(1 - \frac{\varrho^4}{r^4}\right) \frac{v^2}{2g},$$

was daher rührt, daß er nicht Längenstücken der Röhre wie pi, sondern qi in Rechnung bringt. Bei so kleinen Winkeln φ, wie hier vorkommen, ist jedoch diese Verschiedenheit ohne Einfluß auf das Endresultat.

Ausführlicher wird die Bewegung des Wassers in Röhren von stetig veränderlicher Weite behandelt in folgenden Schriften: Bresse, Cours de mécanique appliquée, seconde partie, Pag. 154 etc. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. I, S. 519 etc.

§. 165.

Verengungen, Erweiterungen, Krümmungen und Richtungsveränderungen bei Wasserleitungsröhren.

Verengungen und Erweiterungen in Wasserleitungsröhren erzeugen Geschwindigkeits- und demnach Druckhöhenverluste, deren Größen nach §. 83 vollständig zu beurtheilen und zu berechnen sind.

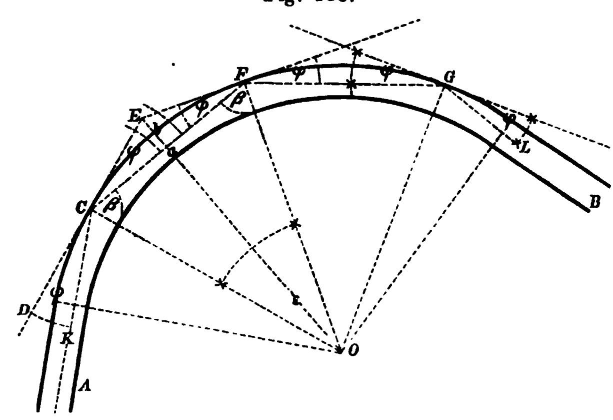
Eben solche Verluste bewirken aber auch Richtungsveränderungen, die entweder durch Krümmungen oder durch völlige Ecken der Röhren (Knieröhren) veranlaßt werden.

Die Größe der Wirkung derartiger Richtungsveränderungen ist bis jetzt ganz allein durch Versuche zu ermitteln gewesen, deren Resultate man in Formeln darzustellen bemüht war.

Um diese zu verstehen, werde zuvor bemerkt, daß wenn, wie

in Fig. 183, die verlängerte Achse $\overline{KC}$ einer geraden Röhre die

Fig. 183.



krumme Röhrenwand bei C trifft und an diesem Punkte die zugehörige Kreistangente DE gezogen wird, der Winkel KCD der Anprallungs- oder Reflexionswinkel heißt, und wenn man diese Construction fortsetzt, also von C abermals die Röhrenachse bei a zu tangiren sucht und die Wand eben so in F, ferner so fort noch in G u. s. w. trifft, alsdann gesagt wird: „die Röhre habe eine Krümmung von zwei, drei oder mehreren Anprallungen". Der Centriwinkel KOL, welcher dem ganzen vorhandenen Röhrenbogen KL entspricht, wird der Krümmungswinkel genannt. In einem folgenden Beispiele wird gezeigt, wie man die Anprallungswinkel einer krummen Röhrenstrecke ermitteln kann.

Die ersten brauchbaren Versuche über diesen Gegenstand hat Dubuat angestellt und daraus den Schluß gebildet, daß der Krümmungswiderstand einer Röhrenleitung dem Quadrate der Geschwindigkeit des darin sich bewegenden Wassers und der Summe der Quadrate der Sinus sämmtlicher Anprallungswinkel proportional sei. Aus 25 Messungen leitete Dubuat ferner eine Gleichung für den Verlust an Druckhöhe $= h'$ ab:[1])

$$h' = \frac{v^2 \cdot s^2}{3000},$$

wenn pariser Zollmaaß vorausgesetzt wird, und $s^2 = \Sigma\,(\sin \varphi^2)$, die bemerkte Sinussumme, so wie v die Geschwindigkeit des Wassers bezeichnet. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Größe der Anprallungswinkel 36 Grad nicht überschreitet.

Für Metermaaß erhält man aus letzterer Formel:

$$\text{I.}\quad h' = 0{,}0123 \cdot v^2 \cdot \Sigma\,(\sin \varphi^2),$$

oder, wenn man v entfernt und die Wassermenge pro Secunde $= Q$, so wie den Röhrendurchmesser d einführt:

$$\text{I}^a.\quad h' = 0{,}02\,\frac{Q^2}{d^4}\,\Sigma\,(\sin \varphi^2).$$

---

[1]) Principes, Nr. 105 und Nr. 357.

Navier[1]) empfiehlt, wahrscheinlich auf dieselben Versuche gestützt, den Ausdruck:

$$\text{II.} \quad h' = (0{,}0039 + 0{,}0186 \, . \, \varrho) \frac{\lambda}{\varrho^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ (Meter)},$$

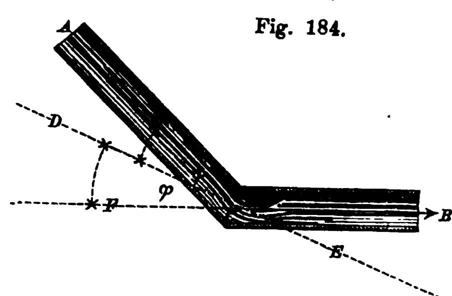


Fig. 184.

worin λ die Länge des Bogens ist, welcher dem Krümmungswinkel ($\angle KOL$, Fig. 183) entspricht und ϱ den zugehörigen Krümmungshalbmesser bezeichnet.

Die umfangreichsten und zuverlässigsten Versuche über Knieröhren, Fig. 184, hat Weisbach[2]) angestellt und daraus zur Berechnung des Verlustes an Druckhöhe $= h_2$ die Gleichung abgeleitet:

$$\text{III.} \quad h_2 = (0{,}9457 \, . \, \sin \varphi^2 + 2{,}047 \, . \, \sin \varphi^4) \frac{v^2}{2g} \cdot$$

Hierbei bezeichnet φ den Anprallwinkel $ACD = DCF$, Fig. 184, oder den halben Ablenkungswinkel ACF.

$$\text{Hiernach wird } h_2 \begin{cases} 0{,}046 \, . \, \frac{v^2}{2g} & \text{wenn } \varphi = 10^\circ \\ 0{,}139 \, . \, \frac{v^2}{2g} & \text{„} \quad \varphi = 20^\circ \\ 0{,}364 \, . \, \frac{v^2}{2g} & \text{„} \quad \varphi = 30^\circ \\ 0{,}984 \, . \, \frac{v^2}{2g} & \text{„} \quad \varphi = 45^\circ \end{cases}$$

etc.

Endlich fand Weisbach für gekrümmte Röhren (Kropfröhren), nach eigenen und Versuchen Dubuat's für den gewöhnlichen Fall, daß die Mittellinie des Kropfes ein Viertelkreis, also die Richtungsveränderung 90 Grad ist:

$$h_1 = \eta_1 \frac{v^2}{2g} \left[0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{\frac{7}{2}}\right] \frac{v^2}{2g} \text{ für Kröpfe mit kreisförmigem Querschnitt und}$$

$$h_2 = \eta_2 \frac{v^2}{2g} \left[0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{\frac{7}{2}}\right] \frac{v^2}{2g} \text{ für Kröpfe mit rectangulärem Querschnitt.}$$

Hiernach hat Weisbach[3]) folgende Werthe für η_1 und η_2 berechnet:

$\frac{r}{\varrho}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
η_1	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978
η_2	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,634	1,015	1,546	2,721	3,228

[1]) Résumé des Leçons etc. Deuxième Partie, Nr. 119.
[2]) Ingenieur-Mechanik, Bd. 1, S. 1044 (5. Auflage).
[3]) Ebendaselbst, S. 1048.

Außerdem hebt Weisbach hervor[1]), daß sich der Widerstand in Kropfröhren durch entsprechende Erweiterungen, so wie durch das Anbringen dünner Scheidewände in der Mitte der Röhre, wesentlich vermindern läßt.

Bei engeren Knieröhren (als die der Tabelle) wird der Widerstand ansehnlich größer als bei weiteren. Unter andern fand Weisbach für eine Knieröhre von 1 Centimeter Weite und 90 Grad Ablenkung oder $\varphi = 45$ Grad den Widerstandscoefficienten $\eta = 1{,}636$. Man sehe hierüber auch Weisbach's Experimental-Hydraulik, S. 152 ff.

Weisbach[2]) macht noch auf folgende zwei besondere Fälle, Fig. 184[a] und 184[b], aufmerksam. Lenkt das zweite Knie *BDE* nach derselben Seite hin ab, wie das erste *ACB* (Fig. 184[a]), so erfolgt keine weitere Contraction des Strahles, so daß η auch bei vollem Ausflusse nicht größer als für ein einfaches Knie *ACB* ist. Erfolgt aber die Ablenkung wie in Fig. 184[b], d. h. auf die entgegengesetzte Seite, so ist die Contraction eine doppelte, und daher auch der Widerstandscoefficient doppelt so groß als bei einfachem Knie. Wird endlich *BDE* so an *ABC* gesetzt, daß *DE* rechtwinklig auf die Ebene *ABD* zu stehen kommt, so stellt sich η ungefähr $1\frac{1}{2}$ Mal so groß heraus als beim Knie *ACB* allein.

Fig. 184[a].

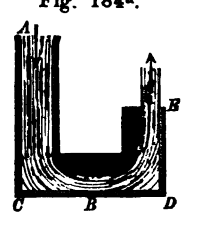
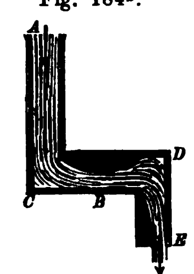


Fig. 184[b].



Schließlich werde noch erwähnt, daß sich die allgemeine Gleichung I, §. 163, schreiben läßt:

$$\text{IV.} \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 + \eta\frac{l}{d} + \Sigma\eta_n}},$$

wenn man mit $\Sigma\eta_n$ die Widerstandscoefficienten aller passiven Widerstände bezeichnet, welche in der Leitung, außer dem Röhrenwiderstande an sich, vorkommen.

Beispiel 1. Eine Wasserleitungsröhre von $0^m{,}25$ Durchmesser führe pro Secunde 0,05 Cubikmeter Wasser ab, wobei der zugehörige Krümmungswinkel (*KOL*, Fig. 183) $119\frac{1}{5}$ Grad, der Krümmungshalbmesser der kreisförmig gekrümmten Röhre $2^m{,}10$ beträgt; man verlangt die Größe der durch diese Krümmung verlorenen Druckhöhe zu kennen?

Auflösung. Man hat zuerst die Anzahl und Größe der Anprallungswinkel $DCK = \varphi$ zu bestimmen, was folgendermaßen geschieht. Es sei $\angle COF = \varepsilon$, daher $ab = r\,(1 - \cos\frac{1}{2}\varepsilon)$, oder weil $\varepsilon = 2\varphi$, auch $ab = r\,(1 - \cos\varphi)$. Es ist aber ab der halbe Röhrendurchmesser $= \frac{d}{2}$, folglich:

$$\sin \text{vers}\, \varphi = \frac{d}{2r}.$$

---

[1]) Ingenieur-Mechanik. Bd. 1 (5. Auflage), S. 1048.

[2]) Ebendaselbst, S. 1044.

Da nun in unserer Aufgabe $d = 0{,}25$ und $2r = 4{,}20$ ist, so folgt

$$\sin \operatorname{vers} \varphi = \frac{0{,}25}{4{,}2} = \frac{0{,}125}{2{,}1} = 0{,}0595,$$

wozu $\mu = 19^0\ 52'$ gehört, so daß also die vorhandene Zahl $= n$ der Anprallungswinkel beträgt:

$$n = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{119^0\ 12'}{19^0\ 02'} = 3.$$

Daher nach Dubuat's Formel I^a:

$$h' = 0{,}02 \cdot \frac{(0{,}05)^2}{(0{,}25)^4} \cdot 3 \cdot \sin^2 (19^0{,}52') = 0^m{,}00442.$$ [1]

Mittelst der Navier'schen Formel II. berechnet sich h' zu fast gleicher Größe.

Man erhält nämlich, wegen $\frac{1}{2g} = 0{,}51$ (Metermaaß),

$$h_1 = \left(\frac{0{,}0002}{r} + 0{,}00095\right) v^2 \cdot \frac{\lambda}{r} \cdot$$

Oder da $\frac{\lambda}{r} =$ Bogen $119^0\ 12'$ und $r = 2{,}10$ ist,

$$h_1 = (0{,}000095 + 0{,}00095) \cdot 2{,}08043 \cdot v^2$$

$$h_1 = 0{,}002174 \cdot v^2,$$

oder da $v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{0{,}050}{0{,}049} = 1^m{,}02$ ist,

$$h_1 = 0^m{,}0046183.$$

Beispiel 2. Welche Wassermenge führt pro Secunde der Heber, Fig. 60 (S. 117), von AB nach WW, wenn die wirksame Druckhöhe $2^m{,}9$,

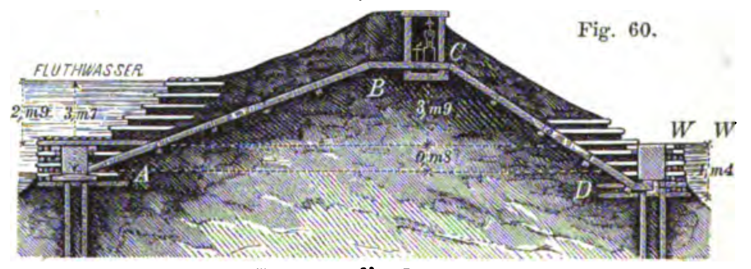


Fig. 60.

der Röhrendurchmesser $0^m{,}2$ und die Länge der Röhre $20^m{,}0$ beträgt, endlich jeder der Ablenkungswinkel des Hebers bei B und C 20 Grad, also jeder Anprallungswinkel 10^0 beträgt? Vorausgesetzt ist dabei, daß während der Zeit die Druckhöhe constant bleibt.

Auflösung. Nimmt man die Verluste beim Eintritte und Austritte des Wassers als gering an, so erhält man nach IV, wegen $\Omega = \mu\omega$ und mit Beachtung, daß $\Sigma\eta_n = 2 \cdot 0{,}046 = 0{,}92$ ist:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}9}{1 + \frac{1}{33}\frac{20}{0{,}2} + 0{,}092}} = 3^m{,}715,$$

---

[1]) D'Aubuisson, Traité d'hydraulique, Pag. 235.

so wie

$$Q = \frac{d^2\pi}{4} \cdot v = 0{,}785 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 3{,}715,$$

$$Q = 0{,}1166 \text{ Cubikmeter.}$$

Anmerkung. Wie aus den beiden letzteren Beispielen erhellt, sind bei nicht zu großen Geschwindigkeiten (unter $1^m{,}3$) die Verluste an Druckhöhe wegen Krümmungen und Kniestücken der Röhren unerheblich, sobald die betreffenden Anprallungswinkel und Krümmungshalbmesser entsprechend klein sind. Bei zweckmäßig und vortheilhaft angelegten Leitungen kann man daher auch (man beachte insbesondere das vorstehende Beispiel 1) ganz von diesen Richtungs- und Geschwindigkeitsverlusten absehen, zumal wenn man mit Dupuit den Widerstandscoefficienten allgemein zu $\eta = \frac{1}{33}$ annimmt und außerdem, bei Berechnung der Röhrendurchmesser, mit d'Aubuisson[1]) die fortzuführende Wassermenge um die Hälfte vergrößert einführt.

Bemerkenswerth, außer dem ähnlich lautenden Urtheile des letztgenannten Hydraulikers, sind noch die Ansichten anderer erfahrener, rationeller Practiker über den Einfluß der Krümmungen und Verengungen, wovon wir hier Nachstehendes mitzutheilen für unseren Zweck nicht unangemessen halten.

Hagen[2]) bemerkt zunächst, daß die theoretische Bestimmung des Einflusses der Krümmungen, so wie die Anwendung, die man davon machen kann, sehr unsicher sei, und fährt dann folgendermaßen fort: „da aber wahrscheinlich das Wasser beim Durchgange durch weite Röhren eine starke innere Bewegung annimmt, so sollte man kaum glauben, daß der Einfluß von mäßigen und sanften Krümmungen überhaupt noch merklich wäre. Eine bleierne Röhre von $\frac{1}{3}$ Zoll Weite und 8 Fuß Länge gab genau gleiche Resultate, wenn ich ihr eine kreisförmige Windung gab, oder wenn ich sie in eine gerade Linie auszog".

„Verengungen muß man möglichst zu vermeiden suchen, man darf aber nicht annehmen, daß sie, wenn sie nur mäßig sind, eine starke Verminderung der Wassermenge bedingen, denn zur Erzeugung der hier nöthigen Geschwindigkeit wird zwar ein gewisser Theil der Druckhöhe consumirt, aber eben diese größere Geschwindigkeit liefert auch wieder die lebendige Kraft zur Ueberwindung der Widerstände im folgenden Theile der Röhrenleitung. Ich fand, daß die Wassermenge, sobald ich die Einmündung der Röhre um die Hälfte ihres Querschnittes verengte, unverändert blieb; brachte ich aber eine gleiche Verengung an der Ausmündung der Röhre an, so gab sich eine starke Abnahme der Wassermenge zu erkennen, indem die zur Erzeugung der größeren Geschwindigkeit erforderliche lebendige Kraft in diesem Falle vollständiger Verlust war".

Bei Dupuit[3]) findet sich folgende Notiz: „Nous avons fait quelques

---

[1]) D'Aubuisson, Traité d'Hydraulique, Pag. 235, 243 und 257.

[2]) Handbuch der Wasserbaukunst. 1. Theil, S. 225. 2. Auflage.

[3]) Distribution des eaux, Nr. 62. Dupuit macht hierbei auf die bei Weitem nachtheiligeren Einflüsse von gekrümmten Röhren aufmerksam, welche in verticaler Ebene liegen, wobei in der dem Himmel zugekehrten Convexität

expériences pour determiner l'influences du changement brusque de direction des conduites. Ces expériences nous ont convaincu que la découverte d'une formule qui donnerait exactement l'influence des angles dans les conduites ne saurait avoir beaucoup d'utilité pratique" etc.

„Il va sans dire qu'il ne faut pas multiplier sans nécessité les coudes et les sinuosités; mais quand ils sont motivés par l'état des lieux, et qu'on ne pourrait les faire disparaître qu'avec de grandes dépenses, il faut s'y résigner. La moindre augmentation du diamètre de la conduite dans cette partie ferait plus que compenser la perte de charge due à ces circonstances".

Darcy (Font. Publ., Pag. 426) macht sogar folgenden Schluß: „Quant aux coudes, je n'en parle pas, les pertes de charge qu'ils occasionnent ne sont pas à considérer dans le pratique".

Lampe's Druckmessungen an der neuen Wasserleitung der Stadt Danzig bestätigen die Darcy'schen Angaben. Lampe berichtet hierüber (Civil-Ingenieur, Bd. 19, S. 5), daß auch durch ziemlich starke Krümmungen, wenn dieselben nur allmählich eintreten, kein merklicher Druckverlust hervorgebracht wird.

§. 166.

Widerstände beim Fließen des Wassers durch Schieber, Klappen, Ventile und Hähne.

Beim Fließen des Wassers durch vorbenannte Organe (Regulirungsvorrichtungen) entstehen Geschwindigkeitsverluste durch mehr oder weniger gleichzeitige Ursachen, insbesondere durch Querschnitts- und Richtungsveränderungen, sowie durch Stromzertheilungen und Reibungswiderstände.

Diese Verluste auf rein theoretischem Wege abzuschätzen, ist bei dem gegenwärtigen Zustande der Hydrodynamik geradezu unmöglich, weshalb man auch hier gezwungen ist, bei betreffenden practischen Rechnungen Hand in Hand mit der Erfahrung zu gehen.

Weisbach hat auch hier das große Verdienst, der rationellen Praxis durch zuverlässige und zahlreiche Versuche die entsprechenden Hülfsmittel geliefert zu haben und sind die betreffenden Ergebnisse im Nachstehenden für den Zweck gegenwärtigen Buches zusammengestellt[1]).

Eins der nächst wichtigsten Ergebnisse dieser Versuche ist die durch dieselben nachgewiesene Veränderlichkeit der Contractions- und Ausflußcoefficienten, wonach dieselben von 0,6 bis 1,0

---

sich Luft im Scheitel ansammelt, dadurch eine Verengung, folgeweise eine Geschwindidkeitsvermehrung und ein großer Verlust an Druckhöhe erzeugt und selbst der ganze Abfluß unterbrochen werden kann. Man umgeht diesen Uebelstand, wenn man an der convexen Scheitelstelle sogenannte Windstöcke (ventouses) anbringt, welche Luft entweichen lassen, ohne daß dabei Wasser mit entweicht. Abbildungen bei Darcy, a. a. O., Pag. 409.

[1]) Weisbach stellte die betreffenden Versuche im Jahre 1841 an und veröffentlichte dieselben 1842 in dem schätzbaren Werke: „Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile".

wachsen, wenn das Verhältniß zwischen dem Querschnitte der Mündung (Verengung) und dem der ebenen Wand, worin diese sich befindet, von 0 bis 1,0 zunimmt. Deshalb giebt auch die Theorie ganz unbrauchbare Resultate, wenn sie auf diese Veränderlichkeit nicht Rücksicht nimmt.

Mit Hülfe dieser Weisbach'schen Versuche läßt sich, unter rechter Benutzung der §. 83, Zusatz 1, entwickelten Formel

$$z = \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}, \text{ oder } z = \eta_0 \frac{v^2}{2g}, \text{ wenn } \eta_0 = \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$$

gesetzt wird, d. h. unter η_0 mit Weisbach der Widerstandscoefficient verstanden wird, der Druckhöhenverlust z berechnen. Unter a wird hier der Querschnitt der Röhre und unter a_1 der Inhalt der Verengung, so wie unter αa_1 der Querschnitt der größten Verengung verstanden.

Für den Fall, daß η_0 derjenige Widerstandscoefficient ist, welcher allein der Querschnittsveränderung Fig. 81, S. 225, entspricht, hat Weisbach folgende Tabelle berechnet (Ing.-Mechanik, Bd. 1, 5. Auflage, S. 1036):

$\frac{a_1}{a} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\alpha =$	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1,00
η_0	225,9	47,77	17,51	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,00

Wichtig ist weiter die Bemerkung Weisbach's, daß die in den folgenden Tabellen angegebenen Zahlenwerthe nur für den Fall gelten, daß das Wasser nach dem Durchgange durch die Verengung den Rohrquerschnitt wieder ausfüllt, so wie endlich, daß das Rohr eine um so beträchtlichere Länge haben muß, je stärker die Verengung ist, damit der volle Ausfluß wieder eintreten kann.

I. Durchgang des Wassers durch Schieber in gehörig verlängertem Rohre.

Das Rohr CD, Fig. 184^c, hatte bei einer Versuchsreihe einen Kreisquerschnitt und einen Durchmesser $d = 0^m,04032$, einen

Fig. 184c.

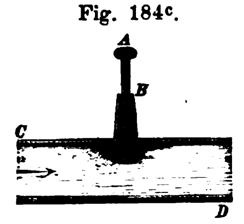


Fig. 184d.

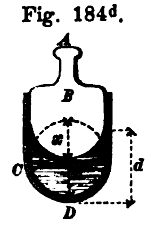
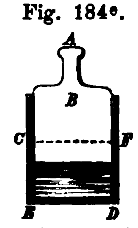


Fig. 184e.



Radius $r = 0^m,02016$, also einen Querschnitt $a = 12,768$ Quadratcentimeter. Bei einer anderen Versuchsreihe war der Rohrquerschnitt rectangulär, wie Fig. 184^e erkennen läßt und betrug dessen Breite $\overline{ED} = \overline{CF} = 0^m,05$, während seine Höhe $\overline{CE} = \overline{DF} = 0^m,025$ war.

Der Ausfluß erfolgte dann durch einen mondförmigen Querschnitt $\overline{CD}$, Fig. 184[d], von der Ausschnitthöhe $= x$ und der Sichelhöhe $= h$, d. i. wobei $d = x + h$, oder $x = d - h$ und die relative Stellhöhe des Schiebers $= \frac{h}{d} = \frac{h}{2r}$ ist[1]).

Nach diesen Erörterungen und mit Bezug auf die untenstehende Note, bedürfen folgende Tabellen keine besonderen Erläuterungen.

Tabelle A. *Cylindrisches Rohr, kreisförmiger Schieber.*

a. Direct nach Weisbach[2]).

$\frac{h}{2r}$	$\frac{32}{32}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{30}{32}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{28}{32}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{26}{32}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{24}{32}$	$\frac{23}{32}$	$\frac{22}{32}$
$\frac{a_1}{a}$	1,000	0,993	0,981	0,966	0,948	0,928	0,905	0,881	0,856	0,829	0,800
η	0,000	0,008	0,016	0,033	0,066	0,100	0,151	0,202	0,255	0,344	0,453
$\frac{h}{2r}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{20}{32}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{18}{32}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{14}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{11}{32}$
$\frac{a_1}{a}$	0,771	0,740	0,709	0,677	0,643	0,609	0,574	0,539	0,503	0,466	0,429
η	0,642	0,860	1,087	1,390	1,757	2,210	2,871	3,661	4,707	6,128	7,693

Fig. 184[f].

[1]) Bezeichnet man in Fig. 184[f] den $\angle LGF$ mit φ, den Radius der Röhre $MD = LG$ . . mit r, so ist, wegen

$$\overline{BD} = \overline{GM} = h,\ \cos \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\frac{1}{2}GM}{LG} = \frac{h}{2r} = \frac{h}{d}$$

und der Inhalt der Verengung, d. i. der Mondsichelfläche

$$LBFD = a_1 = (\pi - \varphi + \sin \varphi)\, r^2.$$

Ist dann beispielsweise $\frac{h}{2r} = \frac{h}{d} = \frac{3}{4}$, oder wegen $x = 2r - h$ auch $\frac{x}{d} = 1 - \frac{h}{2r} = \frac{1}{4}$, so berechnet sich $\frac{\varphi}{2} = 41^0\, 24\tfrac{1}{2}'$ und $\varphi = 82^0\, 49'$, $\pi - \varphi = 180 - 82^0\, 49' = 97^0\, 14'$. Da ferner der Rohrhalbmesser $r = 2{,}016$ Centimeter ist, so erhält man $a_1 = 10{,}925$ Quadratcentimeter, daher

$$\frac{a_1}{a} = \frac{10{,}925}{12{,}768} = 0{,}856$$

und folglich stimmend mit der Tabelle für $\frac{h}{2r} = \frac{24}{32}$ oder für $\frac{x}{d} = \frac{1}{4} = \frac{8}{32}$.

[2]) Versuche etc. Erste Abtheilung, S. 14.

b. Nach Grashof aus Weisbach'schen Versuchen[1]).

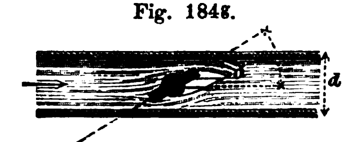
$\frac{x}{d} = \frac{x}{2r}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
$\pi - \varphi$	122° 5′	97° 11′	77° 22′	60° 0′	44° 3′	28° 58′	14° 22′
$\frac{a_1}{a}$	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
η_1	0,070	0,260	0,808	2,057	5,524	16,967	97,803

Tabelle B. *Rectanguläre Schieber im parallelepipedischen Rohre.*[2])

$\frac{a_1}{a}$	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,2	0,1
η_2	0,093	0,387	0,948	2,079	4,021	8,116	17,844	44,473	192,94

II. Durchgang des Wassers durch Drosselventile (Drehklappen).

Fig. 184g.



Das Rohr, in welchem sich bei den Versuchen das betreffende Drosselventil, Fig. 184g, befand, hatte auch hier die vorher angegebenen Querschnitte und Dimensionen, d. h. es hatte in der einen Versuchsreihe (Kreisquerschnitt) den Flächeninhalt $a = 12{,}768$ Quadratcentimeter und bei der anderen Versuchsreihe (Rechteckiger Querschnitt) einen Flächeninhalt von $a = 12{,}435$ Quadratcentimeter.

Setzt man den Radius der kreisförmigen Röhre von d inneren Durchmesser $= r$, so hat man $a = r^2\pi$. Da nun bei δ^0 (Fig. 184g) Stellung der Drehklappe, die Projection der Klappe winkelrecht zur Achse des Rohres eine Ellipse vom Inhalte $r^2\pi \sin\delta$ ist, so erhält man für den Inhalt der beiden mondförmigen Durchgänge $a_1 = r^2\pi - r^2\pi \sin\delta$, d. i. $a_1 = r^2\pi (1 - \sin\delta) = a (1 - \sin\delta)$, also $\frac{a_1}{a} = 1 - \sin\delta$.[3])

Letzterer Werth gilt übrigens auch für die rectanguläre Drehklappe im parallelepipedischen Rohre.

[1]) Theoretische Maschinenlehre, Bd. 1, S. 502.

[2]) Versuche etc. Erste Abtheilung, S. 11.

[3]) Beachtet muß werden, daß Weisbach auf die Dicke der Klappe nicht Rücksicht genommen hat. Man sehe deshalb die erste Abtheilung (S. 57) des bereits genannten Werkes „Untersuchungen aus dem Gebiete der Mechanik und Hydraulik". 1842.

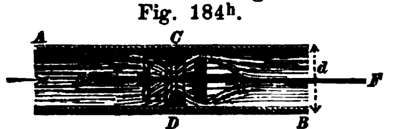
Tabelle C[1]),
worin η_1 *den Widerstandscoefficienten des Drosselventils für das cylindrische Rohr und* η_2 *den für das Rohr mit rectangulärem Querschnitt bezeichnet.*

δ	η_1	η_2	δ	η_1	η_2	δ	η_1	η_2
5°	0,241	0,284	30°	3,913	3,538	55°	60,18	42,67
10°	0,518	0,448	35°	6,220	5,722	60°	115,83	77,42
15°	0,897	0,771	40°	10,844	9,29	65°	266,47	158,6
20°	1,539	1,339	45°	18,30	14,73	70°	1076,9	368,5
25°	2,513	2,162	50°	32,37	24,90	75°	?	1012,4

III. Durchgang des Wassers durch Ventile.[2])

1) Kegelventile. Die Anordnung des Ventiles zu den Versuchen stellt im Längendurchschnitte Fig. 184^h dar. Das Messingrohr AB, worin sich das Ventil befand, war $27\frac{1}{2}$ Centimeter lang und hatte 4 Centimeter Durchmesser, also einen Querschnitt $a = 12{,}566$ Quadratcentimeter.

Fig. 184^h.



Der im Rohre festgeschraubte Ventilring mit dem sogenannten Sitze, hatte eine freie Durchgangsöffnung (Apertur) von 2,386 Centimeter Durchmesser, also von 4,471 Quadratcentimetern Inhalt. Der Hals des Ventiles wurde durch zwei Kegel und durch eine schmale Cylinderfläche gebildet. Die nach E hin zugerichtete Kegelfläche hatte einen Convergenzwinkel von 65 Graden, die nach F (dem Ausfluß) hin gerichtete aber einen solchen von 90 Grad.

Die 18,5 Centimeter lange und 0,38 Centimeter dicke Ventilstange EF ruhte in galgenförmigen Gestellen, so daß nur eine Verschiebung in der Achsenrichtung möglich war. Dieser lange Ventilstab war nöthig, um das Ventil von außen in beliebigen Entfernungen einstellen zu können. Der größte zulässige Ventilschub, d. h. der größte Abstand des Ventiles von der Sitzfläche, betrug 2,53 Centim.

Bei einiger Aufmerksamkeit bemerkt man recht bald, daß das durch das geöffnete Ventil strömende Wasser drei verschiedene Querschnitte passiren muß, nämlich die kreisförmige Durchflußmündung $= a_1$ im Ventilringe, die ringförmige Durchflußöffnung $= a_2$ und die cylindrische Durchflußöffnung zwischen Ventil und Ventilsitz $= d\pi h = a_3$, sobald h den Ventilschub bezeichnet.

Weisbach brachte das Verhältniß $\frac{a_1}{a} = \frac{4{,}471}{12{,}566} = 0{,}356$ in Rechnung, während $\frac{a_2}{a} = \frac{5{,}096}{12{,}566} = 0{,}406$, der mittlere relative Inhalt also 0,381 war[3]).

---

[1]) Weisbach, Versuche etc. Erste Abtheilung, S. 66 und 61.

[2]) Ebendaselbst, S. 68.

[3]) Der mittlere relative Inhalt beider Aperturen ist daher auch = 0,381, wonach $\eta = 11$ und der Ausflußcoefficient $\alpha = 0{,}608$ wird. In der 5. Auflage

Bei vollständiger Oeffnung des Ventiles fand Weisbach den Widerstandscoefficienten

$$(1)\quad \eta = \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2 = 10{,}61,\text{[1]}$$

welcher Werth sich nicht viel ändert, so lange der Ventilschub nicht kleiner als der Halbmesser der Apertur ist, daß dagegen η bedeutend wächst, wenn sich das Ventil weniger ausschieben läßt, oder einen geringeren Hub hat.

Nachstehende Tabelle D. giebt über letzteren Umstand entsprechenden Aufschluß:

Tabelle D.

Ventilschub in Centim.	2,53	2,28	2,02	1,77	1,52	1,26	1,01	0,76	0,63	0,51	0,38	0,25
Relativ. Abstand	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,25	0,20	0,15	0,10
η	10,61	10,61	10,71	10,79	11,06	11,42	12,36	12,93	18,19	27,46	55,08	150,98

Für einen anderen Fall, wo das Verhältniß $\frac{a_1}{a}$ nicht 0,356, sondern anders, allgemein $\frac{\omega_1}{\omega}$ ist, so daß also

$$(2)\quad \eta_1 = \left(\frac{\omega}{\alpha_1 \omega_1} - 1\right)^2$$

sein würde, nimmt Weisbach für beide Fälle α constant, setzt $\alpha = \alpha_1$ und eliminirt mittelst $\frac{1}{\alpha} = \frac{a_1}{a}(1 + \sqrt{\eta})$ den Werth α_1 aus (2), so daß schließlich erhalten wird:

$$\eta_1 = \left[-1 + \frac{\omega}{\omega_1}\,\frac{a_1}{a}\,(1 + \sqrt{\eta})\right]^2,$$

oder, wenn man obige Zahlenwerthe

$$\left(\frac{a_1}{a} = 0{,}356 \text{ und } \eta = 10{,}61\right)$$

substituirt:

$$(3)\quad \eta_1 = \left[1{,}515\,\frac{\omega}{\omega_1} - 1\right]^2.\text{[2]}$$

2) Klappenventile. Länge und Durchmesser (d) der cylindrischen Röhre AB, Fig. 184[i], waren dieselben, während der innere Durchmesser der Apertur im Ventilringe $d_1 = 2{,}925$ Centimeter betrug, also

$$\frac{a_1}{a} = \left(\frac{2{,}925}{4}\right)^2 = 0{,}5347 \text{ war.}$$

---

der Ingenieur-Mechanik, Bd. 1, S. 1054, wird mit letzterem Werthe gerechnet. Grashof (Theoret. Maschinenlehre, Bd. 1, S. 507) setzt

$$\eta = \left(1{,}537\,\frac{a}{a_1} - 1\right)^2 \text{ für Teller- und Kegelventile.}$$

[1]) Weisbach, Versuche etc. S. 70.

[2]) Ebendaselbst, S. 87.

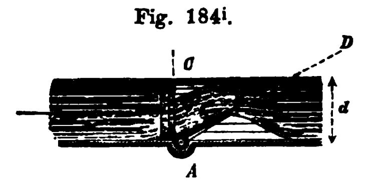


Fig. 184i.

Die kreisrunde Klappe AB hatte 3,55 Centimeter im Durchmesser und betrug bei größtmöglichster Oeffnung der Winkel

$$CAD\ (=\delta) = 73\tfrac{1}{2}\ \text{Grad}.$$

Für den betreffenden Widerstandscoefficienten $= \eta_1$, wenn man in (2) $\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{a_1}{a}\ (1 + \sqrt{\eta})$, d. i. nach vorstehendem Zahlenwerthe

$$\frac{1}{\alpha_1} = 0{,}5347\ (1 + \sqrt{\eta}) = x, \text{ setzt:}$$

$$\eta_1 = \left(x\,\frac{\omega}{\omega_1} - 1\right)^2.$$

Die Werthe von x für verschiedene Oeffnungswinkel δ sind dann aus folgender, von Grashof[1]) berechneten Tabelle E. zu entnehmen:

Tabelle E.

δ	η	x	δ	η	x	δ	η	x
15°	90	5,61	35°	20	2,93	55°	4,6	1,68
20°	62	4,75	40°	14	2,54	60°	3,2	1,49
25°	42	4,00	45°	9,5	2,18	65°	2,3	1,35
30°	30	3,47	50°	6,6	1,91	70°	1,7	1,23

IV. Durchgang des Wassers durch Hähne.

Weisbach hat auch hier, übereinstimmend mit den vorher erörterten Versuchen, den Durchgang des Wassers durch Hähne im cylindrischen und im parallelepipedischen Rohre, Fig. 184k, den Versuchen unterworfen, die Kegelgestalt der Hähne jedoch

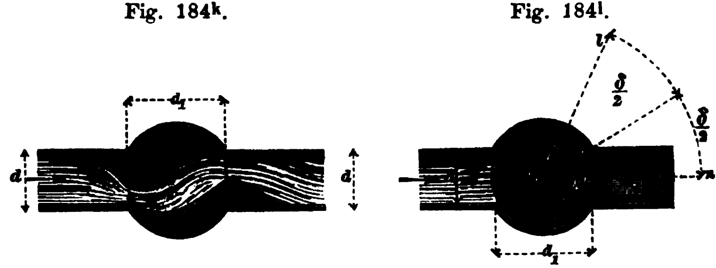


Fig. 184k. Fig. 184l.

dadurch umgangen, daß er einen mittleren Hahnhalbmesser, beim Hahne mit runder Bohrung im cylindrischen Rohre $r_1 = 3{,}085$ Centimeter, oder $d_1 = 6{,}170$ Centimeter, so wie auch den Rohrhalbmesser $r = 2{,}027$ Centimeter, oder $d = 4{,}054$ Centimeter in die betref-

[1]) Theoretische Maschinenlehre, Bd. 1, S. 507.

fenden Rechnungen einführte. Der sogenannte Absperrwinkel δ, Fig. 184[1], d. h. der Drehwinkel, bei welchem der Abschluß eintritt, ergab sich demgemäß aus der Gleichung:

$$\sin \tfrac{1}{2}\,\delta_1 = \frac{\overline{pq}}{\overline{nm}}, \text{ oder}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\,\delta_1 = \frac{d}{d_1} = \frac{4054}{6170} = 0{,}657050, \text{ d. i.:}$$

$$\tfrac{1}{2}\,\delta_1 = 41^0\ 4\tfrac{1}{2}' \text{ und } \delta_1 = 82^0 9'.$$ [1])

Für den Hahn mit vierkantiger (rectangulärer) Bohrung im parallelepipedischen Rohre, wobei das Rechteck des Rohrquerschnittes 5 Centimeter hoch und 2½ Centimeter weit war, ferner der mittlere Hahnhalbmesser sich zu 2,415 Centimeter berechnete[2]), ergab sich der Absperrwinkel zu $\delta_1 = 60^0\ 49'$.[3])

Weisbach berechnete (in umständlicher, jedoch zum Nachstudiren sehr empfehlenswerther Weise) das Verhältniß $\frac{a_1}{a}$. In Bezug auf den betreffenden Contractionscoefficienten in dem Werthe $\frac{a}{\alpha a_1}$ ist zu beachten, daß das Wasser in gegenwärtigem Falle, außer der plötzlichen Querschnittsveränderung, eine zweimalige Richtungsveränderung erleidet, hierfür jedoch nur ein α, d. h. ein solches ermittelt werden konnte, was jene drei Widerstände zusammenfaßt.

Grashof[4]) hat in sinniger, einfach practischer Weise, zur Ermittlung der jedesmaligen Widerstandscoefficienten überhaupt, besonders aber für den Fall einen empfehlenswerthen Weg eingeschlagen, wo der betreffende Hahn andere Dimensionen hat, wie der der Weisbach'schen Versuche.

Grashof stellte zunächst aus den Weisbach'schen Versuchen folgende Tabelle F. zusammen:

Tabelle F.

δ	η_0	η_1	η_2	δ	η_0	η_1	η_2
5°	0,02	0,05	0,05	40°	8,72	17,3	20,7
10°	0,15	0,29	0,31	45°	15,40	31,2	41,0
15°	0,39	0,75	0,88	50°	27,90	52,6	95,3
20°	0,85	1,56	1,84	55°	53,90	106,0	275,0
25°	1,62	3,10	3,45	60°	113,0	206,0	?
30°	2,89	5,47	6,15	65°	276,0	486,0	?
35°	5,05	9,68	11,20				

Hierbei ist η_1 der jedesmalige Widerstandscoefficient für den

[1]) Weisbach, Versuche etc. Erste Abtheilung, S. 39.
[2]) Ebendaselbst S. 17.
[3]) Desgleichen S. 21.
[4]) Theoret. Maschinenlehre, Bd. 1, S. 503 ff.

Hahn im cylindrischen, η_2 im parallelepipedischen Rohre und η_0 ist derjenige Widerstandscoefficient, welcher sich berechnet, sobald die plötzliche Querschnittsvergrößerung von $\alpha_1 a$ bis a die einzige Ursache des in Rede stehenden Widerstandes ist[1]).

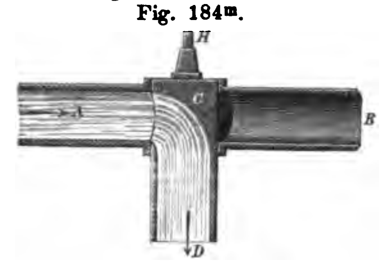
Vorstehende Tabelle kann nun dazu dienen, den einem gewissen Stellwinkel δ entsprechenden Widerstandscoefficienten η_n auch für einen solchen Hahn, annäherungsweise, zu finden, dessen Absperrwinkel von dem des Weisbach'schen Versuchshahns $\delta_1 = 82^\circ 9'$ (oder rund 82°, wie Grashof annimmt) verschieden ist. Man hat nämlich zu berücksichtigen, daß der Bestandtheil η_0 von η_1 nur vom Querschnittsverhältnisse $\frac{a_1}{a}$,. also von dem Verhältnisse $\frac{\delta}{\delta_1}$, abhängt, dagegen der andere Bestandtheil, d. i. $\eta_1 - \eta_0$, hauptsächlich nur von δ abhängig ist. Soll z. B. geschätzt werden für $\delta = 50^\circ$ bei $\delta_1 = 75^\circ$, so hat man für $\delta = \frac{50}{75} \cdot 82 = 54\frac{2}{3}^\circ$, so liefert die Grashof'sche Tabelle mittelst Interpolation $\eta_0 = 52$. Für $\delta = 50$ liefert dagegen die Tabelle $\eta_1 - \eta_0 = 52{,}6 - 27{,}9 = 24{,}7$, so daß also der gesuchte Widerstandscoefficient ist:

$$\eta_n = 52 + 24{,}7 = 76{,}7.$$

V. Ausfluss des Wassers durch den krumm gebohrten Hahn.

Um auch dem in der Praxis, Fig. 184m, vorkommenden Falle zu entsprechen, wo das durch den Hahn fließende Wasser um einen rechten Winkel abgelenkt wird, hat Weisbach ebenfalls Versuche angestellt[2]). Zu letzterem Zwecke wurde in das Rohr AB ein Hahn CD eingesetzt, auf dessen Kopf H (wie bei den in IV. erörterten Hähnen) die eingetheilte Kreisscheibe geschraubt, um die Größen der Drehwinkel δ ablesen zu können, dessen ein Knie bildende Bohrung abgerundet und polirt war.

Fig. 184m.



Nachstehende Werthe, der größeren Tabelle Weisbach's entlehnt, werden für gegenwärtigen Zweck ausreichen:

δ°	0°	$2\frac{1}{2}^\circ$	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
$\frac{a_1}{a}$	1,0	0,964	0,926	0,850	0,692	0,535	0,385	0,250	0,137	0,052
η	0,0	0,01	0,038	0,191	0,989	2,944	9,516	28,816	100,53	624,81

[1]) Man sehe hierzu S. 517 und insbesondere die dort beigegebene Tabelle Weisbach's.

[2]) Versuche etc. Erste Abtheilung, S. 47 und 48.

Zu beachten ist noch, daß die Werthe η der Tabelle nur den Widerstand in sich fassen, welcher der Hahnverengung entspricht, der Krümmungswiderstand (S. 512) aber noch unberücksichtigt ist. Ist beispielsweise $\delta = 20^0$, so liefert unsere Tabelle den Coefficienten der Verengung $\eta = 0{,}989$. Der Coefficient des Krümmungswiderstandes (der Ablenkung) ist aber $\eta_0 = 0{,}410$, daher der Coefficient für den Totalwiderstand $= \eta_n$:

$$\eta_n = \eta_0 + \eta = 0{,}410 + 0{,}989 = 1{,}399.$$

Beim gerade gebohrten Hahne würde sich, nach der Tabelle unter IV. (S. 523) für $\delta = 20^0$ der Widerstandscoefficient ergeben haben zu $\eta_1 = 1{,}56$.

Weisbach[1]) knüpft hieran den Schluß, daß bei dem krumm gebohrten Hahne (mit einer Verengung) der Widerstand immer kleiner ist als beim, zwei Verengungen bildenden, geradgebohrten Hahne.

Nachfolgende Beispiele mögen zu ferneren Erläuterungen sämmtlicher in diesem Paragraphen erörterten Fälle dienen.

Beispiel 1.[2]) In einem horizontal liegenden, cylindrischen Rohre von 26,15 Centimeter Weite und 7,53 Meter Länge tritt eine Schieberverengung bis zur Mitte der Röhre ein, während die Druckhöhe constant 1,25 Meter beträgt. Es fragt sich, wie groß die secundliche, durch diese Röhre fließende Wassermenge ist und wie groß letztere sein würde bei völlig geöffnetem Schieber, d. h. ohne jede Verengung der Röhre?

Auflösung. Beachtet man, daß der betreffende Widerstandscoefficient für die zur Hälfte verschlossene cylindrische Röhre, nach Tabelle A. (S. 519), $\Sigma\eta_n = 2{,}057$ ist, so hat man erst nach S. 513:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \eta_1 + \eta\frac{l}{d} + 2{,}057}} \text{ und}$$

$$Q = \frac{d^2\pi}{4}v.$$

Daher, wenn man die gegebenen Zahlenwerthe substituirt:

$$v = \sqrt{\frac{2\,.\,9{,}81\,.\,1{,}25}{1{,}505 + 0{,}025\frac{7{,}53}{0{,}2615} + 2{,}057}}, \text{ d. i.:}$$

$$v = \sqrt{\frac{24{,}625}{4{,}282}} = 2^m{,}36.$$

Folglich, da $\frac{d^2\pi}{4} = 0\square^m{,}05369$ ist, ergiebt sich

$$Q = 0{,}05369\,.\,2{,}36 = 0{,}1267 \text{ Cubikmeter.}$$

Bei völlig geöffnetem Schieber würde man, unter sonst gleichen

---

[1]) Versuche etc. Erste Abtheilung, S. 49.

[2]) Bornemann, Hydrometrie, S. 211.

Umständen, erhalten haben:

$$v = 3{,}32 \text{ Meter und}$$

$$Q = 0{,}05369 \,.\, 3{,}32 = 0{,}1782 \text{ Cubikmeter.}$$

Beispiel 2.[1]) Eine kreisrunde Wasserleitungsröhre von 0,15 Meter Durchmesser liefert pro Minute 3 Cubikmeter Wasser. Es fragt sich, wie man einen in derselben befindlichen Schieber einstellen muß, damit in derselben Zeit nur 2 Cubikmeter Wasser durch die Röhre fließen?

Auflösung. Es berechnet sich die secundliche Geschwindigkeit, womit sich das Wasser in der Röhre bewegt, in dem ersteren Falle zu $v_1 = 2^m{,}82$ und im zweiten Falle zu $v_2 = 1^m{,}88$. Die Geschwindigkeit im ersten Falle ist hiernach $\frac{282}{188} = \frac{3}{2}$ mal so groß als die bei der kleineren Ausflußmenge, deshalb ist die Geschwindigkeitshöhe $= (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ mal so groß als diese und folglich die zu erzeugende Widerstandshöhe

$$\eta \,.\, \frac{v^2}{2g} = (\tfrac{9}{4} - 1)\frac{v^2}{2g} = \tfrac{5}{4}\frac{v^2}{2g},$$

demnach der Widerstandscoefficient $\eta = \frac{5}{4} = 1{,}25$. Für letzteren Widerstandscoefficienten findet sich in Weisbach's Tabelle A. (S. 518) für $\frac{h}{2r}$ kein berechneter Werth. Wohl aber ein größerer 1,390, welcher $\frac{h}{2r} = \frac{18}{32}$ und ein kleinerer 1,087, welcher $\frac{h}{2r} = \frac{19}{32}$ entspricht. Durch Interpolation (S. 312) erhält man jedoch:

$$\frac{h}{2r} = \frac{18 + \frac{1{,}390 - 1{,}250}{1{,}390 - 1{,}087}}{32} = \frac{18 + \frac{140}{303}}{32} = 0{,}577.$$

Da nun $2r = 0^m{,}15$ ist, so ergiebt sich die gesuchte Schieberstellung zu

$$h = 0{,}577 \,.\, 2r = 0{,}577 \,.\, 0{,}15 = 0^m{,}08655.$$

Hätte der Schieber anfänglich schon auf der Höhe von $11\frac{1}{4}$ Centimeter gestanden, wäre also $\frac{h}{2r} = \frac{1125}{1500} = \frac{3}{4} = \frac{24}{32}$ gewesen, so würde, da für diese Stellung die Weisbach'sche Tabelle den Widerstandscoefficienten $\eta = 0{,}255$ giebt, für den Widerstandscoefficienten

$$\eta_1 = 1{,}25 + \eta = 1{,}25 + 0{,}255 = 1{,}505$$

die Stellhöhe des Schiebers auszumitteln sein.

Durch Interpolation findet man auch hier

$$\frac{h}{2r} = \frac{17{,}688}{32} = 0{,}554, \text{ also}$$

$$h = 0{,}554 \,.\, 2r = 0{,}554 \,.\, 0{,}15 = 0^m{,}0831.$$

Beispiel 3.[2]) Welche mechanische Arbeit geht verloren, wenn bei einer einfach wirkenden Wassersäulenmaschine, die in einem geraden

---

[1]) Weisbach, Versuche etc. Erste Abtheilung, S. 88.

[2]) Ebendaselbst, S. 88.

rundgebohrten Hahne bestehende Tagepiepe um 50 Grad gedreht ist und der Hahn die nämlichen Dimensionsverhältnisse hat wie der, welcher den Weisbach'schen Versuchen (S. 522) zu Grunde lag?

Die Einfallsröhren sind $d = 0{,}20$ Meter, der Treibcylinder $D = 0{,}50$ Meter weit und der Treibkolben macht bei $H = 2$ Meter Hub pro Minute 10 Spiele.

Auflösung. Die mittlere Geschwindigkeit $= v$ des Wassers im Treibcylinder ist $v = \frac{10 \, . \, 2}{60} = \frac{1}{3}$ Meter, folglich die v_1 in den Einfallsröhren: $v_1 = v \left(\frac{D}{d}\right)^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{12} = 2^m{,}083$.

Nach Tabelle F. (S. 523) entspricht dem Stellwinkel $\delta = 50^0$, der Widerstandscoefficient $\eta_1 = 52{,}6$, daher ergiebt sich ein Verlust an Druckhöhe von

$$z = \eta_1 \frac{v_1^2}{2g} = 52{,}6 \, . \, 0{,}2211 = 11^m{,}63.$$

Da ferner pro Hub ein Wasserverbrauch statt hat von

$$\frac{D^2 \pi}{4} \, . \, H = 0{,}785 \, (0{,}5)^2 \, . \, 2 = 0{,}3925 \text{ Cubikmeter},$$

pro Secunde also von $\frac{1}{6} \, . \, 0{,}3925 = 0{,}0654$ Cubikmeter $= 65{,}4$ Kilogramm, so ergiebt sich ein secundlicher Arbeitsverlust von

$$65{,}4 \, . \, 11{,}63 = 760{,}50 \text{ Meterkilogramm},$$

oder von

$$\frac{760{,}50}{75} = 10{,}14 \text{ Maschinenpferden}.$$

Weisbach[1]) reiht hieran den richtigen und für die Praxis wichtigen Schluß, daß dieses zum Reguliren des Ganzen nöthige, dem Bremsen der Lokomotiven ähnliche Krafttödten bei Wassersäulenmaschinen eine bekannte und nachtheilige Eigenthümlichkeit dieser Maschinen sei, welche den Wasserrädern nicht zukomme.

Beispiel 4. Bei einer Druckpumpe, welche einer Steigröhre von $d = 0{,}1$ Meter Weite hat und bei jedem 3 Secunden dauernden Spiele 0,03 Cubikmeter (pro Secunde also $Q = 0{,}01$ Cubikmeter) liefert, ist der relative Querschnitt der Apertur im Ringen des Kegelventiles, am Fuße der Steigröhre, 0,4. Es fragt sich, welcher Arbeitsverlust der Durchgang des Wassers durch dies Ventil allein veranlaßt?

Auflösung. Die secundliche Geschwindigkeit $= v_1$ des Wassers in der Steigröhre berechnet sich aus

$$v_1 = \frac{Q}{\frac{1}{4} d^2 \pi} = \frac{4Q}{d^2 \pi} = 4 \, . \, 0{,}3183 \, . \, \frac{Q}{d^2} = 1{,}2732 \, . \, \frac{Q}{d^2} \, .$$

Da nun $Q = 0{,}01$ und $d = 0{,}1$ ist, so ergiebt sich $v_1 = 1{,}2732$ und die entsprechende Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{v_1^2}{2g} = (1{,}2732)^2 \, . \, 0{,}051 = 0{,}08267 \text{ Meter}.$$

---

[1]) Versuche etc., a. a. O., S. 88. Weisbach berechnet den obigen Arbeitsverlust etwas größer, nämlich zu $10\frac{1}{2}$ Maschinenpferden, was daran liegt, daß wir den betreffenden Widerstandscoefficienten der Grashof'schen Tabelle entlehnten.

Nun liefert aber die Formel 2 (S. 521) $\eta = \left(1{,}515\,\frac{\omega}{\omega_1} - 1\right)^2$, daher hier $\frac{a}{a_1} = \frac{10}{4}$ gesetzt, $\eta = 7{,}770$. Die erzeugte Widerstandshöhe z ist daher $z = \eta\,.\,\frac{v^2}{2g} = 7{,}770\,.\,0{,}08267 = 0^m{,}642$.

Da die secundlich gelieferte Wassermenge ein Gewicht von 10 Kilogramm hat, so erhält man für den fraglichen Arbeitsverlust $= \mathfrak{A}$:

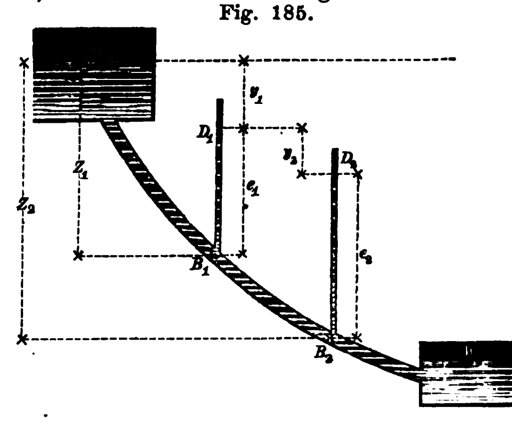
$$\mathfrak{A} = \gamma Q z = 10\,.\,0{,}642 = 6^{mk}{,}42.$$

§. 167.

Druck des Wassers gegen die Wände der Röhrenleitung.

Die zuerst von Daniel Bernoulli entdeckten und mathematisch dargestellten Gesetze über den Druck des Wassers gegen Röhrenwände, wurden bereits §. 79 erörtert und dabei hauptsächlich in Erfahrung gebracht, daß der hydraulische Druck stets geringer sei, als der unter sonst gleichen Umständen stattfindende hydrostatische Druck. Noch geringer ist jedoch dieser Druck in Röhren der unmittelbar vorher betrachteten Art, d. h. wo auf Widerstände wegen Adhäsion, Cohäsion, Richtungs- und Geschwindigkeitsänderung Rücksicht zu nehmen ist.

Fig. 185.



Für die Druckhöhe $\frac{\Pi_1}{\gamma}$ an einem Punkte B_1, Fig. 185, welcher um Z_1 unter dem Wasserspiegel im Speisebassin A liegt, erhält man nämlich jetzt:

$$\frac{\Pi_1}{\gamma} = Z_1 + \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} - \eta\,\frac{l_1}{d}\,\frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\,.\,\Sigma\eta_1;$$

eben so für einen Punkt B_2, der um Z_2 unter A sich befindet:

$$\frac{\Pi_2}{\gamma} = Z_2 + \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} - \eta\frac{l_2}{d}\,\frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\,\Sigma\eta_2.$$

Daher auch ferner:

$$(1)\quad \frac{\Pi_2}{\gamma} - \frac{\Pi_1}{\gamma} = Z_2 - Z_1 - \eta\,\frac{v^2}{2g}\left(\frac{l_2}{d} - \frac{l_1}{d}\right) - \frac{v^2}{2g}\,(\Sigma\eta_2 - \Sigma\eta_1).$$

Bringt man nun in B_1 und B_2 (ähnlich wie S. 214, Fig. 73) verticale Röhrchen B_1D_1 und B_2D_2 an, welche unterhalb mit der Leitung communiciren, oberhalb aber in die freie Luft münden, so wird man offenbar durch die Höhen, auf welche sich das Wasser darin erhebt, die Drücke an den betreffenden Stellen der Röhre

messen können. Aus letzterem Grunde giebt man diesen Röhrchen den Namen Piezometer[1]).

Bezeichnet man nun die Piezometerstände bei B_1 und B_2 beziehungsweise mit e_1 und e_2 und beachtet, daß die den Atmosphärendruck messende Wassersäule $10^m,333$ Höhe hat, so ergiebt sich:

$$\frac{\Pi_1}{\gamma} = 10{,}333 + e_1 \text{ und } \frac{\Pi_2}{\gamma} = 10{,}333 + e_2,$$

und daher aus (1), $l_2 - l_1 = l$ gesetzt:

$$(2) \quad e_2 - e_1 = Z_2 - Z_1 - \eta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} \Sigma\eta_n.$$

Beachtet man endlich, daß der Fig. 185 nach

$$Z_2 = y_1 + y_2 + e_2 \text{ und } Z_1 = y_1 + e_1$$

ist, so erhält man aus (1):

$$(3) \quad y_2 = \eta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} \cdot \Sigma\eta_n.$$

Hieraus folgt aber der Satz, „daß der Widerstand, welchen eine Leitung, dem Wasser zwischen zwei von einander entfernten Punkten entgegengesetzt, unmittelbar durch den Höhenunterschied der Oberflächen der an diesen aufgesetzten Piezometer angegeben wird“.

Zugleich erkennt man, daß nach dem Stande zweier auf einander folgenden Piezometer die Widerstände zu beurtheilen sind, welche zwischen den betreffenden Punkten regelmäßig oder zufällig auftreten.

Aus der bekannten (gemessenen) Differenz der Piezometerstände zweier nicht zu naher und doch innerhalb regelmäßiger Strecken einer Leitung liegender Punkte, läßt sich annäherungsweise die Geschwindigkeit berechnen, womit das Wasser in der Röhre fließt und folglich auch das Wasserquantum, sobald der Durchmesser der Röhre bekannt ist.

Reducirt man (3) auf v und ersetzt letztere Größe durch den gleichgeltenden Werth $\frac{4Q_2}{d^2\pi}$ (mit Q_2 die secundliche Wassermenge bezeichnet), so erhält man:

$$(4) \quad Q_2 = \frac{d^2\pi}{4} \sqrt{\frac{2gy_2}{\eta \frac{l}{d} + \Sigma\eta_n}}.$$

so wie, wenn man $\Sigma\eta_n$ vernachlässigen kann:

$$(5) \quad Q_2 = \frac{d^2\pi}{4} \sqrt{2gy_2 \frac{d}{\eta l}}.$$

Für eine und dieselbe Röhre sind die Größen d und l als constant und innerhalb gewisser Grenzen auch η so anzusehen, weshalb man findet, wenn $\frac{d^2\pi}{4} \sqrt{2g \frac{d}{\eta l}} = \varepsilon$ gesetzt wird: $Q_2 = \varepsilon \sqrt{y_2}$.

---

[1]) πιέζω, drücken, pressen.

Einer anderen Differenz $= y_1$ der Piezometerstände entspricht eine andere Wassermenge $= Q_1$, so daß $Q_1 = \varepsilon \sqrt{y_1}$ ist. Hiernach verhält sich:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}}{\sqrt{y_2}},$$

wonach eine betreffende Scala berechnet werden kann.

Beispiel. An der großen Fontaine zu Herrenhausen bei Hannover verlangte man seiner Zeit (1852), eines Umbaues wegen, die Bestimmung der Wassermenge, welche pro Secunde in der Röhrenleitung, aus zwei Strängen bestehend, jeder von 0,292 Meter Durchmesser, zugeführt wurde. Zu diesem Ende brachte man an zwei Punkten der Leitung, die um 519,5 Meter von einander abstanden, Piezometer (Manometer nach Bourdon) an, wobei das der Wasserkunst nahestehende 3,7 Atmosphären, das nahe der Fontaine 3,56 Atmosphären Spannung (als Mittelwerthe) zeigte. Wie berechnet sich hiernach die Wassermenge?

Auflösung. Die Piezometerdrücke auf Wassersäulen in Metern reducirt, giebt:

$$y_2 = 10{,}333\,(3{,}70 - 3{,}56) = 1^m{,}4462.$$

Rechnet man dann einmal die Geschwindigkeitshöhe für den Widerstand in den geringen vorhandenen Krümmungen, so erhält man aus (3):

$$1{,}4462 = \frac{1}{33} \cdot \frac{519{,}5}{0{,}292} \cdot \frac{v^2}{2\,.\,9{,}81} + \frac{v^2}{2\,.\,9{,}81} \text{ und deshalb:}$$

$$1{,}4462 = \frac{519{,}5}{9{,}636} \cdot 0{,}051\, v^2 + 0{,}051\, v^2, \text{ d. i.}$$

$$1{,}4462 = 0{,}051\,(54{,}91)\,.\,v^2, \text{ oder auch}$$

$$1{,}4462 = 2{,}80\, v^2, \quad \text{d. i.}$$

$$v = \sqrt{\frac{1{,}4462}{2{,}80}} = \sqrt{0{,}5166} = 0^m{,}718.$$

Hiernach war also die in beiden Röhren pro Secunde fortfließende Wassermenge:

$$Q = 2\,.\,\frac{d^2\pi}{4}\,.\,v = 2\,.\,(0{,}067)\,0{,}718 = 0{,}0962 \text{ Cubikmeter.}$$ [1]

Zusatz. D'Aubuisson[2]) scheint der erste gewesen zu sein, welcher Piezometer dazu benutzte, den Zustand einer Röhrenleitung zu jeder Zeit beurtheilen zu können. In letzterer Beziehung zeigte Weisbach[3]), daß sich die Widerstände, welche durch Regulirungsapparate, wie Hähne, Schieber u. s. w. erzeugt werden, sich ebenfalls durch Piezometerstände ausdrücken lassen. Bornemann[4]) dürfte ebenso der erste gewesen sein, welcher darauf hinwies, daß die Piezometer auch zum Wassermessen, d. i. zur Angabe der Wassermengen, welche Röhren

[1]) Der etwas großen Schwankungen des Manometers wegen, welches nahe der Wasserkunst aufgestellt war, ist diese Berechnung weniger genau, als eine später folgende, denselben Gegenstand betreffend.

[2]) Hydraulique, §. 213.

[3]) Ingenieur-Mechanik. Bd. 1, 5. Auflage, S. 1030.

[4]) Hydrometrie. Freiberg 1849, §. 36.

abführen, benutzt werden können. Die letzteren Formeln gegenwärtigen Paragraphens lassen in der That erkennen, daß die Wassermengen den Quadratwurzeln aus den Piezometerständen proportional sind, demzufolge auch ein graduirtes Piezometer sehr leicht als Wasserscala zu benutzen sein wird.

Die ausgedehnteste Verwendung der Piezometer hat Darcy bei der Wasserleitung in Dijon gemacht, worüber in dem bereits wiederholt citirten Werke: „Les Fontaines publiques de la ville de Dijon" ausführlich berichtet wird. Von letzterer Arbeit lieferte Bornemann[1]) in der unten notirten Zeitschrift einen übersichtlichen Auszug.

Der Verfasser benutzte seiner Zeit (1852) Piezometer zur Bestimmung der Wassermenge, welche in geeigneten Röhren der großen Fontaine der Herrenhäuser Wasserkünste zugeführt wird und worüber schon in der ersten, 1857 erschienenen Auflage seiner Hydrodynamik, S. 413 und S. 431 ff. berichtet wurde.[2]) In allerjüngster Zeit hat Dr. Lampe[3]) die Piezometer zu Druckmessungen an der großen Danziger Wasserleitung benutzt, aus denen er mit Hülfe einer von ihm berechneten Tabelle das durch das dortige Hauptrohr (von 0,4185 Meter Durchmesser) in 24 Stunden fließende Wasserquantum bestimmt.

Die Uebereinstimmungen mit den directen Messungen sind recht befriedigend, wie folgende Zusammenstellung erkennen läßt:

Beobachtetes relatives Gefälle $\left(\frac{h}{l}\right)$	Wasserquantum in rhein. Cubikfußen pro 24 Stunden	
	berechnet	beobachtet
0,001630	317800	317400
0,001376	290200	290500
0,0005915	184700	184700

Zweites Capitel.

Wasserleitungssysteme.

§. 168.

In den meisten Fällen der Praxis hat man es bei vorkommenden Rechnungen nicht mit einer einzigen Röhrenleitung von unveränderlichem Durchmesser, sondern in der Regel mit einer Hauptröhre zu thun, welche das Wasser einem ganzen Systeme von Neben- und Zweigröhren zuführt.

Um in einem solchen Falle die Auflösung betreffender Aufgaben, z. B. die Berechnung der verschiedenen Röhrendurchmesser, im vollen Umfange der mathematischen Anforderungen zu bewirken,

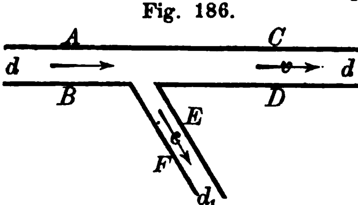
[1]) Der Civilingenieur. Bd. 4 (1858), S. 124.
[2]) Man beachte das Beispiel auf der vorigen Seite.
[3]) Der Civilingenieur. Bd. 19 (1873), S. 4 und S. 106.

gelangt man zu verwickelten Rechnungen, die fast ohne practischen Werth sind[1]).

Um den Anforderungen der Ausführungen zu genügen, nimmt man daher zu Annäherungsrechnungen seine Zuflucht, die aufgeführt werden sollen, sobald vorher auf einige besondere, bisher nicht erwähnte Umstände aufmerksam gemacht worden ist.

Wenn nämlich vom Hauptrohre AD, Fig. 186, einer Leitung ein Zweigrohr EF abgeht, so findet an letzterer Stelle begreiflicher Weise sowohl eine Veränderung der Querschnitte, als auch der Richtung der bewegten Schichten statt, wodurch offenbar Druckhöhenverluste bewirkt werden, deren Größe von der Geschwindigkeit der Bewegung, dem Durchmesser und dem Richtungswinkel abhängen wird, worüber jedoch zur Zeit die Theorie mindestens keine bestimmte Auskunft zu ertheilen vermag.

Fig. 186.



Glücklicher Weise sind diese Verluste bei den verhältnißmäßig geringen Geschwindigkeiten, womit sich das Wasser in den gewöhnlichen Leitungen bewegt, sehr gering, und wird man sich daher bis auf Weiteres für practische Rechnungen mit den Resultaten einiger deshalb von Mallet und Génieys[2]) an den Pariser Wasserleitungen angestellten Beobachtungen begnügen können, wonach der Verlust an Druckhöhe, der durch eine solche Verzweigung (érogation) herbeigeführt wird, ungefähr gleich zweimal der Höhe ist, welche der Geschwindigkeit in der Nebenröhre EF entspricht.

Ist z die durch ein Piezometer gemessene Niveausenkung beim Uebergange von AC nach EF, ist ferner c die Geschwindigkeit in der Abzweigung und v die der Hauptröhre, so hat man nach letzterer Regel:

$$z = \frac{c^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} + 2\frac{c^2}{2g} = 3\frac{c^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}.$$ [3])

Anmerkung. Eine andere Frage, ob nämlich eine Verschiedenheit der Pressungen in der Hauptröhre bei AB oberhalb und bei CD unterhalb der Abzweigung EF stattfindet, hat d'Aubuisson, durch Beobachtung von Piezometern an den betreffenden Stellen, mit Nein beantwortet, d. h. er hatte die betreffenden Piezometerstände bei AB und CD einander gleich gefunden[4]). Indeß läßt die Genauigkeit, womit diese Beobachtungen angestellt wurden, mancherlei zu wünschen übrig.

---

[1]) Unter Andern Eytelwein: „Ueber die Anordnung der Röhrenleitungen mit Verzweigungen und die Bestimmung ihrer Abmessungen unter gegebenen Umständen". Crelle, Journal für die Baukunst. Bd. 15, S. 297.

[2]) d'Aubuisson: Traité d'hydraulique. Nr. 218.

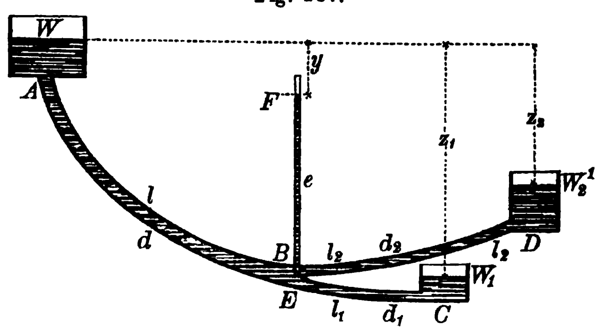
[3]) Man sehe hierüber auch Bresse: „Cours de mécanique appliquée". Seconde Partie, Hydraulique, §. 158.

[4]) d'Aubuisson: Traité d'hydraulique. Nr. 219. — Von diesen Gegenständen, so wie von dem ganzen Artikel über Bewegung des Wassers in Röhren der d'Aubuisson'schen Hydraulik, hat Crelle eine deutsche Bearbeitung in seinem Journale für die Baukunst, Bd. 17, S. 289, geliefert.

§. 169.

Wir sind nunmehr im Stande, die erforderlichen Rechnungen (für practische Zwecke) zur Anlage eines ganzen Röhrensystemes führen zu können. Als Prototyp hierzu, für den einfachsten Fall, sei *AB*, Fig. 187, das Hauptrohr einer Leitung von der Länge l

Fig. 187.



und dem Durchmesser d, von welchem Rohre bei B zwei Zweige BC und BD abgeführt werden, deren Längen beziehungsweise l_1 und l_2 mit den Durchmessern d_1 und d_2 sind. Die Abstände der Wasserspiegel der Behälter C und D, in welche die Zweigröhren münden, von der Wasseroberfläche im Hauptbehälter AW, möge beziehungsweise mit z_1 und z_2 bezeichnet werden, während der Piezometerstand bei E, d. i. $BF = e = H - y$ sein mag, wobei H die Tiefe von B unter dem Wasserspiegel in A und y den Verlust an Druckhöhe darstellt, welcher auf der Strecke von A bis E stattfindet. Werden endlich für die drei Röhrenabtheilungen AE, EC und ED die Geschwindigkeiten beziehungsweise mit v, v_1 und v_2, die Wassermengen mit Q, Q_1 und Q_2 bezeichnet, so ergeben sich, nach dem Früheren, ohne Weiteres folgende Gleichungen:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$y = \eta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \text{ und } Q = \tfrac{1}{4} \pi d^2 v;$$

$$z_1 - y = \eta \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} \quad " \quad Q_1 = \tfrac{1}{4} \pi d_1^2 v_1;$$

$$z_2 - y = \eta \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \quad " \quad Q_2 = \tfrac{1}{4} \pi d_2^2 v_2.$$

Sind nun beispielsweise die Wassermengen Q, Q_1 und Q_2, die Höhen z_1 und z_2, so wie die Längen l, l_1 und l_2 gegeben, und sollen die Durchmesser d, d_1 und d_2 berechnet werden, so hat man es mit 7 Unbekannten (außer den Durchmessern mit y, v, v_1 und v_2) zu thun, während überhanpt nur 6 Gleichungen vorhanden sind, weshalb die Aufgabe im mathematischen Sinne eine Unbestimmte ist.

Für den practischen Fall, welcher hier verfolgt werden soll, kann man jedoch im Voraus eine der Unbekannten, z. B. die

Geschwindigkeit für die Hauptröhre annehmen, oder auch für y einen geeigneten Werth einführen, in welchem Falle man nur zu beachten nöthig hat, daß y sowohl kleiner wie z_1 als auch wie z_2 gewählt werden muß.

Nach der ersten Annahme berechnet man also:

$$d^2 = \frac{4Q}{\pi . v}, \text{ findet } y = \frac{l}{d^5}\left(\frac{Q}{20}\right)^2 \text{ u. s. w.,}$$

während nach der zweiten Annahme erhalten wird:

$$d = \sqrt[5]{\frac{l}{y}\left(\frac{Q}{20}\right)^2};\ d_1 = \sqrt[5]{\frac{l_1}{z_1 - y}\left(\frac{Q_1}{20}\right)^2};\ d_2 = \sqrt[5]{\frac{l_2}{z_2 - y}\left(\frac{Q_2}{20}\right)^2}.$$

Beispiel. Es sei für einen besonderen Fall $Q = 0^{cbm},137$; $Q_1 = 0^{cbm},103$ und $Q_2 = 0^{cbm},034$, ferner sei $l = 300^m$, $l_1 = 200^m$ und $l_2 = 600^m$, so wie endlich $z_1 = 12^m$, $z_2 = 6^m$, wie berechnen sich hiernach die verschiedenen Röhrendurchmesser?

Auflösung. Für $v = 1^m$, folgt zunächst $d = 0^m,417$. Sodann aber:

$$y = \frac{300}{(0,417)^5}\left(\frac{0,137}{20}\right)^2 = 1^m,116, \text{ worauf weiter folgt:}$$

$$d_1 = \sqrt[5]{\frac{200}{10,884}\left(\frac{0,103}{20}\right)^2} = 0^m,2175 \text{ und}$$

$$d_2 = \sqrt[5]{\frac{600}{4,884}\left(\frac{0,034}{20}\right)^2} = 0^m,2042.$$

§. 170.

Ein anderes Verfahren und für die Praxis in den meisten Fällen völlig ausreichend, zur Berechnung der Durchmesser eines Röhrensystemes, ist nachstehendes, wozu wir, des werthvollen Vergleiches wegen, ein Beispiel d'Aubuisson's wählen und dabei unseren höchst einfachen Rechnungsgang den Haupttext bilden lassen, den umständlicheren des genannten Hydraulikers aber in correspondirenden Noten beifügen.

Beispiel. Aus dem Sammelbehälter A, Fig. 188, einer sogenannten Wasserkunst will man Wasser mittelst Röhren an verschiedene Punkte a, b, c, B, C, D etc. einer Stadt, und zwar in Summa pro Secunde 0,060407 Cubikmeter[1]) schaffen; es fragt sich, wie man die

---

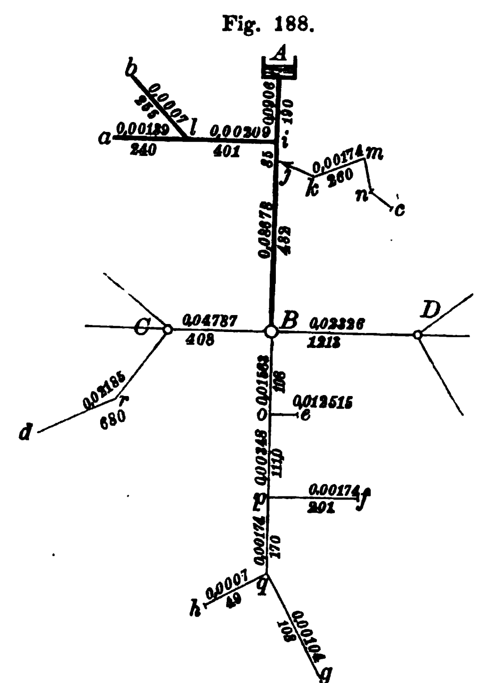
[1]) In Darcy's Werke: „Fontaines Publiques", Pag. 530 und Pag. 556, welches 1856 (also vor 24 Jahren) erschien, wird noch die Quantität Wasser als täglicher Bedarf pro Kopf der Einwohner angegeben:

in London	90 Liter	in Bordeaux	170 Liter
„ Paris	84 „	„ Nantes	60 „
„ Brüssel	80 „	„ Besançon	246 „
„ Lyon	85 „	„ Dijon	240 „

Später rechnete man für London 171 Liter (bei $3\frac{3}{4}$ Millionen Einwohner), für Paris 215 Liter, für Berlin 141 Liter, für Dresden 166 Liter (300000 Einwohner angenommen) etc.

Ingenieur Thiem in seiner Schrift: „Das Wasserwerk der Stadt Nürnberg",

Fig. 188.



Durchmesser der betreffenden Röhren zu nehmen hat, wenn die Wassermengen der einzelnen Stränge so verlangt werden, wie die nachstehende Tabelle und überdies zur Ergänzung die Figur erkennen läßt, wenn ferner die Längen der einzelnen Röhrenzweige (in der Figur durch ganze Zahlen notirt), so wie die Gefälle durch ein entsprechendes Nivellement in nebenbemerkter Weise gegeben und ermittelt sind?

Auflösung. Zuerst werde bemerkt, daß wir (nach §. 162) die zu vertheilende Wassermenge um die Hälfte größer nehmen, also in die Rechnung das Quantum einführen: 0,060407 + 0,030203 = 0,09061 Cubikmeter pro Secunde. Weitere Anhaltspunkte und Angaben folgen aus der Tabelle:

Ausgußtiefe unter dem Wasserspiegel in *A* (Meter)		Auszugießende Wassermenge pro Sec. (Cubikmet.)	Röhrenlängen (Meter)	Bemerkungen
a	8,10	0,00139	$\overline{AB}$ = 757	Bei *d* soll eine Fontaine von $7^m,5$ Sprunghöhe angeordnet werden.
b	10,30	0,00070	$\overline{ia}$ = 641	
c	16,80	0,00174	$\overline{lb}$ = 255	
C	2,90	0,02604	*jc* = 260	
d	11,80	0,02185	*BC* = 405	
D	3,20	0,02326	*Cd* = 680	Bei *e* eine andere, ein Strahlenbouquet aus 7 Zweigen von $5^m,8$ üb. d. Straßenpflaster daselbst.
e	8,30	0,01215	*BD* = 1213	
f	8,80	0,00174	*Bo* = 108	
g	9,80	0,00104	*op* = 281	
h	9,50	0,00070	*pf* = 201	
	Summe:	0,09061	*qg* = 108	
			qh = 49	

Leipzig 1879, theilt S. 5 mit, daß für deutsche Städte, von und über 100000 Einwohnern, der Maximalconsum, wonach neue Anlagen zu entwerfen sind, pro Tag und Kopf zu 150 Liter anzunehmen sei.

Beim neuen Wasserwerke der Stadt Hannover hat man einen Consum von 25000 Cubikmeter in 24 Stunden angenommen; setzt man daher auch hier den täglichen Bedarf pro Kopf = 150 Liter, so würde dies einer Einwohnerzahl von ca. 170000 genügen. Ausführliches hierüber enthält Ingenieur Grahn's 1878 erschienenes Werk: „Die städtischen Wasserversorgungen".

Außerdem hat man dem Hauptrohre von A bis B 1 Meter Gefälle zugetheilt, dem Zweige $\overline{BC}$ ein Gefälle von 1,90 Meter und dem von Cd ein Gefälle von 1,40 Meter. Der Punkt d liegt 11,80 Meter unter dem Wasserspiegel im Sammelbehälter A. Die Hauptrohrstrecke Ai (Fig. 188) hat, wie in der Figur angegeben, 190 Meter Länge, so daß für diese Strecke

$$\frac{h}{l} = 1^m,0\,\frac{190}{757} = 0^m,251 \text{ ist etc.}$$

Die Krümmungswinkel der einzelnen Bogenstücke sind bei l: 130°, bei k: 140°, bei m: 110°, bei n: 75°, bei r: 90°, während die Krümmungshalbmesser überall $3^m,0$ betragen.

I. Durchmesser des Hauptstranges $\overline{AB}$. Mit Bezug auf die Formel des §. 162, nämlich $d = \sqrt[5]{\frac{l}{h}\left(\frac{Q}{20}\right)^2}$ ist hier $l = 757$, $h = 1,0$, $Q = 0,09061$, also $d = \sqrt[5]{\frac{757}{1}\left(\frac{0,09061}{20}\right)^2} = 0^m,4348$ [1]).

II. Berechnung der Zweigröhre ia. Um nicht Röhren von zu verschiedenem Durchmesser zu erhalten, wird man auf diese ganze Strecke eine Weite wählen, welche dem Theile il entspricht. Hierzu hat der Theil Ai des Hauptrohres ein Gefälle von $\frac{190}{757} = 0^m,251$

---

[1]) d'Aubuisson rechnet hier folgendermaßen:

Mit besonderer Beachtung der Versuche Couplet's (S. 499) setzt dieser Hydrauliker:

$$h_1 = 0,051\,.\,v^2 + 0,00137\,.\,\frac{l}{d}\,(v^2 + 0,055\,.\,v),$$

so wie, wenn $v = \frac{4Q}{d^2\pi}$ gesetzt wird:

$$h_1 = 0,08264\,\frac{Q^2}{d^4} + 0,002221\,\frac{l}{d^5}\,(Q^2 + 0,0432\,.\,Q\,,d^2),$$

oder genau genug:

$$h_1 = 0,002221\left(\frac{Q^2}{d^5} + \frac{0,0432\,.\,Q}{d^3}\right).\,l.$$

Daher nach Setzung obiger Werthe:

$$h_1 = \frac{0,0138}{d^5} + \frac{0,00658}{d^3}.$$

Hierzu ist aber rechts noch der Verlust $= h_2$ an Druckhöhe zu fügen, welcher dadurch entsteht, daß beim Herabsteigen der Hauptröhre von A in die Horizontale ein Bogen mit zwei Anprallungswinkeln, jeder von 22° 30', gebildet wird, und weshalb nach I^a, §. 165, ist:

$$h_2 = 0,02\,\frac{Q^2}{d^4}\,\Sigma\,(\sin\varphi^2) = \frac{0,0000481}{d^4}.$$

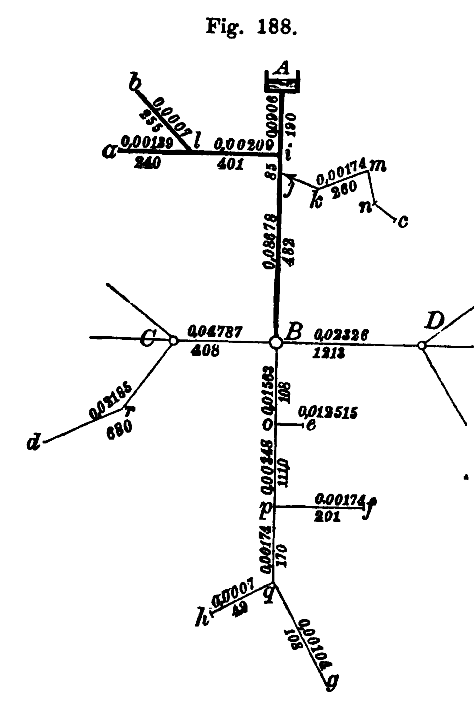
Sonach, weil $h_1 + h_2 = 1^m,0$ auch:

$$1 = \frac{0,0138}{d^5} + \frac{0,00658}{d^3} + \frac{0,0000481}{d^4}.$$

Eine erste Annäherungsrechnung liefert $d = 0^m,431$, woraus sodann, nach und nach, in bekannter Weise, endlich gefunden wird:

$$d = 0^m,432.$$

Fig. 188.



und a liegt $8^m,1$ unter A, so daß als wirksame Druckhöhe verbleibt: $8,1 - 0,251 = 7^m,849$. Berechnet man hiernach mittelst der unter I. gebrauchten Formel einen Röhrendurchmesser und sodann die Geschwindigkeit, womit sich das Wasser in der Röhre bewegt, so ergiebt sich $v = 0^m,669$ u. daher $\frac{v^2}{2g} = 0,02282$. Wegen der Abzweigung bei A und der Geschwindigkeitserzeugung ziehen wir nach §. 168, S. 532, die dreifache Geschwindigkeitshöhe, das ist $3 . 0,02282 = 0,06846$ von $7,849$ ab, so daß als Druckhöhe noch übrig bleibt: $7^m,78$. Da nun der Ausguß bei a durch einen kurzen cylindrischen Ansatz von $\delta = 0^m,04$ Durchmesser erfolgen soll (Ausflußcoefficient $\mu = 0,82$), so liefert die Gleichung III, S. 507:

$$d = 0,3018 \sqrt[5]{\frac{l Q^2}{7,78 - 0,082 \frac{Q^2}{\mu^2 \delta^4}}},\ d = 0,3018 \sqrt[5]{\frac{l Q^2}{7,78 - 0,208}} = 0,3018 \sqrt[5]{\frac{641\,(0,00209)^2}{7,572}},$$

d. i.: $d = 0^m,06212$.[1])

III. Nebenzweig lb. Es liegt b bekanntlich $10^m,30$ unter A. Hiervon ab das Gefälle von A bis i, d. i. $0^m,251$, bleiben übrig:

$$10^m,30 - 0^m,251 = 10^m,049.$$

---

[1]) d'Aubuisson berechnet:

für Röhrenwiderstände eine Druckhöhe $= 0^m,2502$ \
wegen des Winkels bei l: $= 0^m,0014$ } $= 0^m,2516$.

Ferner:

zur Erzeugung der Geschwindigkeit in der Röhre: $0^m,0195$,

" " " Austrittsgeschwindigkeit: $0^m,0210$.

Veranschlagt den Verlust wegen der Vertheilung bei i zu: $\frac{0,000000722}{d^4}$

und setzt endlich:

$$8,1 = 0,3516 + 0,0195 + \left(\frac{0,000006226}{d^5} + \frac{0,000128}{d^3}\right) + \frac{0,000000722}{d^4} + 0,021,$$

woraus er findet: $d = 0^m,0615$.

Ferner betrug das Gefälle von i bis a: 7,85 und daher von i bis l: $\frac{401}{641}$. 7,85 = 4m,91. Für die fragliche Strecke lb verbleiben sonach: 10,049 — 4,91 = 5m,139.

Der Ausguß bei l soll durch einen conisch convergenten Ansatz von δ = 0m,021 Mündungsdurchmesser (Ausflußcoefficient = 0,90) erfolgen, wehalb wir (mit Bezug auf die vorher benutzte Formel) zuerst berechnen:

$$0{,}0820 \frac{Q^2}{\mu^2 \delta^4} = 0{,}255$$

und daher erhalten:

$$d = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{lQ^2}{5{,}139 - 0{,}255}} = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{255\,(0{,}0007)^2}{4{,}884}},$$

d. i.: d = 0m,03644.[1])

IV. Abzweigung $jkmnc$, völlig offen am Ende. Hier soll fortgeführt werden pro Secunde: Q = 0,00174 Cubikmeter Wasser, bei l = 260m und bei einer Druckhöhe, welche sich folgendermaßen finden läßt. Es beträgt das Gefälle:

von A bis i: 0m,2510
von i bis j: 0,1125
Summa: 0,3635.

Es liegt aber c unter A: 16m,8, weshalb sich eine wirksame Druckhöhe für jc ergiebt von: 16,8 — 0,3635 = 16m,4365, und daher sich der Durchmesser d berechnet zu:

$$d = \sqrt[5]{\frac{260}{16{,}436} \left(\frac{0{,}00174}{20}\right)^2} = 0^m{,}04127.^{2)}$$

[1]) d'Aubuisson rechnet hier wie Nachstehend. Nach den Resultaten in der Note unter Nr. II. ergiebt sich für die Strecke von A bis i:

ein Verlust an Druckhöhe		0m,2516	5m,0884
Für il findet er			
Druckhöhenverlust wegen Röhrenwiderstände	4m,7670	=4,8368	
Druckhöhenverlust wegen Vertheilung . . .	0,0503		
Druckhöhenverlust wegen Richtungsveränder.	0,0195		
Höhe zur Erzeugung der Geschwindigkeit in der Nebenleitung .			0,0251
Höhe zur Erzeugung der Ausflußgeschwindigkeit bei b			0,2572
			5m,3707

Daher verbleiben von 10m,3 als wirksame Druckhöhe 10,30 — 5,3707 = 4m,9293, weshalb unter Berücksichtigung von Röhrenwiderstand und Vertheilung bei dem Zweige lb erhalten wird:

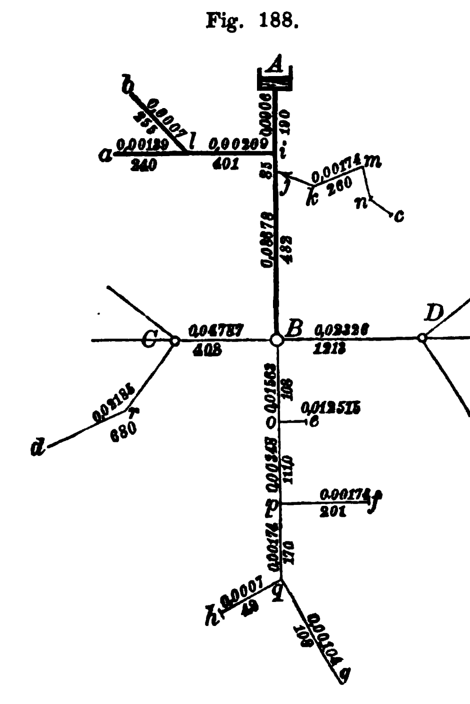
$$4{,}929 - \left(\frac{0{,}0000002788}{d^5} + \frac{0{,}000000081}{d^4} + \frac{0{,}0000171}{d^3}\right) = 0,$$

woraus aber folgt: d = 0m,0362.

[2]) d'Aubuisson rechnet hier wegen Vertheilung und Geschwindigkeitserzeugung die dreifache der Geschwindigkeit v entsprechende Druckhöhe, d. i.: $3 \times 0{,}0826 \frac{Q^2}{d^4}$. Für Gesammtwiderstände von A bis j: 0m,385 und setzt dann:

$$16{,}42 - \left(\frac{0{,}000001748}{d^5} + \frac{0{,}0000434}{d^3} + \frac{0{,}000000751}{d^3} + \frac{0{,}0000000606 \,.\, s^2}{d^4}\right) = 0,$$

Fig. 188.



V. Hauptseitenstrang BC. Hier ist $l = 405^m$, $h = 1^m,9$ und $Q = 0^{cbm},04789$ und daher

$$d = \sqrt[5]{\frac{405}{1,9}\left(\frac{0,04789}{20}\right)^2} = 0^m,2614.\text{ [1]}$$

VI. Seitenzweig Crd: $l = 680^m$, $Q = 0^{cbm},02185$. Das wirksame Gefälle berechnet sich folgendermaßen. Es liegt d unter A: $11^m,80$ und bei d soll sich ein Wasserstrahl $7^m,5$ über das Steinpflaster erheben, weshalb verbleiben $1180 = 7,50 = 4^m,30$. Außerdem ist Gefälle von A bis B: 1^m und von B bis C: $1^m,9$, in Summa also $2^m,90$.

Es ergiebt sich daher überhaupt eine wirksame Druckhöhe von $4^m,30 - 2,90 = 1^m,40$. Da der Durchmesser des Mündungsstückes an der Sprungöffnung (bei d'Aubuisson) nicht weiter bezeichnet ist, alle übrigen passiven Widerstände ihrer Kleinheit wegen vernachlässigt werden können, so berechnet sich der Röhrendurchmesser für diese Strecke ohne Weiteres zu:

$$d = \sqrt[5]{\frac{680}{1,4}\left(\frac{0,02185}{20}\right)^2} = 0^m,2252\text{ [2]}.$$

VII. Hauptstrangtheil BD: $l = 1213^m$, $h = 2^m,2$ und $Q = 0^{cbm},02326$. Hier berechnet sich ohne Weiteres der Röhrendurchmesser zu:

$$d = \sqrt[5]{\frac{1213}{2,2}\left(\frac{0,02326}{20}\right)^2},$$

d. i. zu $d = 0^m,2369$. [3]).

---

wobei das vorletzte Glied der Parenthese den Widerstand wegen Vertheilung etc. bezeichnet, das letzte Glied aber den vorhandenen Reflexionswinkeln entspricht. Durch Vernachlässigung des letzten Gliedes berechnet d'Aubuisson zuerst: $d = 0^m,04078$. Mit Hülfe dieses Durchmessers findet er dann nach bekannter Methode (§. 165), daß die Strecke (wegen $\angle k = 140^0$, $\angle m = 110^0$ und $\angle n = 75^0$) 16 Reflexionswinkel, jeden von $6^0 41'$, enthält und sonach:

$$s^2 = \Sigma \sin \varphi^2 = 16 \,.\, \sin (6^0 41')^2 = 0,2168$$

ist, der Röhrendurchmesser aber sich durch weiteres Rechnen findet:

$$d = 0^m,04078.$$

[1]) d'Aubuisson findet: $d = 0^m,260$.

[2]) d'Aubuison berechnet: $d = 0^m,2250$.

[3]) Nach d'Aubuisson: $d = 0^m,235$.

VIII. Hauptrohrtheil *Bo*, pro Secunde $Q = 0{,}01563$ Cubikmeter Wasser führend, bei $l = 108^m{,}0$.

Da *e* bekanntlich $8^m{,}30$ unter *A* liegt und bei *e* eine Sprunghöhe von $5^m{,}8$ erwartet wird, so verbleiben zunächst: $8{,}30 - 5{,}80 = 2^m{,}50$. Hiervon sind jedoch noch abzuziehen:

das Gefälle von *A* bis *B* . . . . $1^m{,}0$
die Geschwindigkeitshöhe in *AB* . . . . $0^m{,}0195$
die Widerstandshöhe von 7 Ausgüssen bei *e*, jeder von 12^m Länge und $0^m{,}04$ Durchmesser . . . . . $0^m{,}82$,

weshalb die wirksame Druckhöhe folgt:

$$2{,}5 - (1 + 0{,}0195 + 0{,}82) = 0^m{,}66$$

und der Durchmesser der Röhre *Bo* sich berechnet zu:

$$d = \sqrt[5]{\frac{108}{0{,}66}\left(\frac{0{,}01563}{20}\right)^2} = 0^m{,}1584.$$ [1]

IX. Hauptrohrtheil *op*. Dieser Strecke hat man das Gefälle 2,14 Meter zugetheilt, während die Rohrlänge $\overline{op} = 111{,}0$ Meter ist und die secundlich geforderte Wassermenge $0^{cbm}{,}00348$ beträgt. Daher ergiebt sich:

$$d = \sqrt[5]{\frac{111}{2{,}14}\left(\frac{0{,}00348}{20}\right)^2} = 0^m{,}06906.$$ [2]

Letzterer Durchmesser wird zugleich bis *q* beibehalten.

X. Zweigrohr *pf* von 201^m Länge. Bei *f* erfolgt der Ausguß der Wassermenge, $Q = 0^{cbm}{,}00174$ pro Secunde, durch einen conisch convergenten Ansatz von $\delta = 0^m{,}02$ Mündungsdurchmesser ($\mu = 0{,}90$). Die wirksame Druckhöhe berechnet sich leicht also:

Gefälle					
Gefälle von	*A*	bis	*B*:	$1^m{,}00$	Da nun *f* $8^m{,}8$ unter *A* liegt, so ergiebt sich
„ „	*B*	„	*o*:	0,66	$h = 8{,}8 - 3{,}8 = 5{,}0$.
„ „	*o*	„	*p*:	2,14	
				$3^m{,}80$	

Daher:

$$d = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{201 \cdot (0{,}00174)^2}{5 - \frac{(0{,}00174)^2}{(0{,}09)^2 \cdot (0{,}02)^4}}} = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{201 \cdot (0{,}00174)^2}{3{,}071}},$$

d. i.: $d = 0{,}05484.$ [3]

XI. Zweigrohr *qg*. Hier ist $Q = 0^{cbm}{,}00104$, $l = 108^m$. Der Ausguß erfolgt durch ein conisch convergentes Ansatzrohr von $0^m{,}015$ Mündungsdurchmesser ($\mu = 0{,}9$). Das Gefälle von *A* bis *q* beträgt $4^m{,}68$, während *g* um $9^m{,}8$ unter *A* liegt, folglich wirksam bleiben:

$$9{,}8 - 4{,}68 = 5^m{,}12.$$

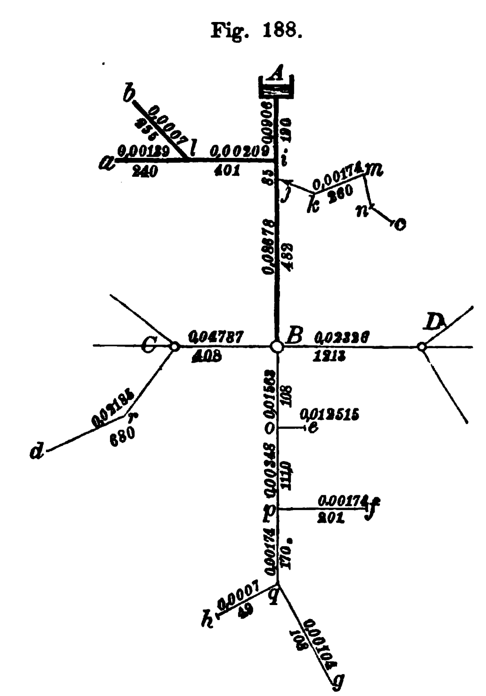
Es berechnet sich demnach, da $0{,}0820 \frac{Q^2}{\mu^2 \delta^4} = 2{,}179$ ist:

$$d = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{108\,(0{,}00104)^2}{5{,}12 - 2{,}179}} = 0^m{,}03953.$$ [4]

---

[1]) Nach d'Aubuisson: $d = 0^m{,}1564$.
[2]) d'Aubuisson findet: $0^m{,}0683$.
[3]) Nach d'Aubuisson: $d = 0^m{,}0544$.
[4]) d'Aubuisson berechnet: $d = 0^m{,}0392$.

Fig. 188.



XII. Zweigrohr qh. Der Ausguß von $Q = 0^{cbm},0007$ pro Secunde erfolgt bei h durch eine dünne Platte von $0^m,014$ Durchmesser ($\mu = 0,62$), ferner ist $l = 49^m,0$ und liegt h unter A: $9^m,50$, weshalb (nach XI) die wirksame Druckhöhe $9,50 - 4,68 = 4^m,82$ ist. Da sich nun berechnet:

$$0,0820 \frac{Q^2}{\mu^2 \delta^4} = 2,715,$$

so findet sich:

$$d = 0,3018 \sqrt[5]{\frac{49 \cdot (0,0007)^2}{4,82 - 2,715}} = 0^m,03091.\text{[1]}$$

Anmerkung. Für den Zweck der practischen Ausführung wird man die Durchmesser der Leitung vorstehenden Beispieles vielleicht am besten nehmen: $0^m,45$, $0^m,30$, $0^m,15$, $0^m,08$ und $0^m,05$.

d'Aubuisson wandte für öffentliche Zwecke nie engere (gußeiserne) Röhren als solche von $0^m,05$ Durchmesser an.

§. 171.

Als zweites practisches Beispiel, zur Berechnung der Dimensionen städtischer Wasserleitungen, benutzt der Verfasser nachstehende Notizen und Daten, welche sich auf die Berechnung der neuen Wasserkunst der Stadt Hannover beziehen und die er der Güte des Herrn Ingenieurs Halbertsma, eines ehemaligen Studirenden der Hannoverschen Technischen Hochschule, verdankt, der bei den betreffenden Entwürfen betheiligt war[2]).

Wie bereits oben (S. 535, Note) erwähnt, wurde dies neue Werk für ein Wasserquantum von 25000 Cubikmetern pro 24 Stunden berechnet[3]).

---

[1]) d'Aubuisson findet: $d = 0^m,0306$.

[2]) Ausführliches über das neue Wasserwerk der Stadt Hannover liefert ein Bericht des Herrn Stadtbaumeisters, Oberbaurath Berg, welcher sich abgedruckt findet in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover. Bd. XXIII (1877), S. 398—406.

[3]) Das aus horizontalen Brunnen (Sammelrohr-Strängen) gewonnene Wasser wird mittelst Dampfpumpen in Röhren von 600 Millimeter Durchmesser und von 2300 Meter Länge auf die Höhe von 48,664 Meter gefördert, wozu die Pumpen zusammen 219 effective Maschinenpferdekräfte entwickeln müssen. Der Sicherheit wegen hat man angenommen, daß die Förderung von 25000 Cubikmetern in 24 Stunden durch zwei Röhrenstränge geschehen kann.

Zuerst wurde hierbei angenommen, daß beim stärksten Consum 7 Procent des ganzen täglichen Wasserquantums in einer Stunde verbraucht werden können, was 1750 Cubikmeter pro Stunde giebt, so daß sich das secundliche Wasserquantum zu $\frac{1750}{3600} = 0{,}486$ Cubikmeter berechnet.

Da nun aus dem Hochreservoir 2 Fallrohre, ein südliches und ein nördliches, hervorgehen sollten (siehe die folgende Fig. 188[a]), wovon jedes eine gleiche Wassermenge abführt, so war der Durchmesser eines jeden dieser Rohre für ein secundliches Wasserquantum von $Q = 0{,}243$ Cubikmeter zu berechnen.

Hierzu wurde als größte secundliche Geschwindigkeit $v = 0{,}86$ Met. angenommen, so daß sich der Durchmesser $= d$ einer Röhre aus der Gleichung ergab:

$$0{,}86 \,.\, \frac{d^2\pi}{4} = 0{,}243,$$

woraus sich ergiebt:

$$d = \sqrt{\frac{243}{675}} = \sqrt{0{,}36} = 0^m{,}6 = 600^{mm}.$$

In letzteren Dimensionen wurden auch die sogenannten Fallröhren und Hauptröhren MN, Fig. 188[a], ausgeführt.

Als mittlere Geschwindigkeit bei dem Maximalverbrauche von 25000 Cubikmeter Wasser pro 24 Stunden, wurde 0,52 Meter festgesetzt.

Die Länge einer Leitung vom Hochreservoir bis zur Stelle M, Fig. 188[a], d. i. bis zur Ecke der großen Packhofstraße und Georgstraße, beträgt 3850 Meter ($= l$), während der Boden des Hochreservoirs (auf dem Lindener Berge) 33 Meter über der Oberkante des Canalschachtes hinter dem Theater liegt und der mittlere Wasserstand im Reservoir 3 Meter ist, so daß die Höhe des mittleren Wasserstandes über dem Steinpflaster bei M (Fig. 188[a]) beträgt $H = 36$ Meter.

Diesen Annahmen entsprechend und ferner unter der Voraussetzung, daß die Weisbach'schen Widerstandscoefficienten (S. 496) um 20 Procent vergrößert wurden, weil W e i s b a c h nur ganz neue (völlig reine) Röhren voraussetzte und die hier erforderlichen Berechnungen eine dauerhafte Gültigkeit erhalten mußten, entwarf Herr H a l b e r t s m a für die Druckhöhenverluste $= z$, mit Hülfe der Weisbach'schen Formel

$$z = \eta \, \frac{l}{d} \, \frac{v^2}{2g},$$

folgende Tabelle:

	η dafür $1{,}2\eta$	$\frac{v^2}{2g}$	z	H	$H - z$
$0^m{,}52$ dafür $0^m{,}50$	0,0278 daf. 0,03336	0,012742	$2^m{,}726$	36^m	$33^m{,}274$
$0^m{,}86$ „ $0^m{,}85$	0,0247 „ 0,02964	0,036825	$6^m{,}995$	36^m	$29^m{,}005$

Fig. 188a.

Altstadt Hannover.

Südl. Fallrohr
600
Gr. Aegidienstrasse
Aegidienplatz
N
400
800
O
600
Georgstrasse
Theater
Packhofstr.
M
Georgstrasse
600
Nördl. Fallrohr
375
graben
Eisen- bahn
350
Schiff-
Am
350
200
Neues Haus
Thiergartenstrasse
200
R
100
S
100
Zoologischer Garten

$H - z$ ist also die Druckhöhe über dem Steinpflaster bei M (Fig. 188[a]), welche daselbst verfügbar bleibt.

Aus der Tabelle erkennt man überdies, daß in den Stunden des stärksten täglichen Consums, noch immer mit Sicherheit auf eine mittlere Druckhöhe von 29 Meter (rund 100 Fuß hannov.) an der Ecke der Packhof- und Georgstraße zu rechnen sein wird. Bei gefülltem Hochreservoir (auf dem Lindener Berge), wo der Wasserstand daselbst 6 Meter beträgt und bei geringem Consum (wie in den Nachtstunden) kann die Druckhöhe über dem Pflaster bei M bis $33 + 6 = 39$ Meter steigen.

Einer sorgfältigen Untersuchung wurde die Frage unterworfen, ob die angenommenen Dimensionen der Hauptstränge auch ausreichten, um für die am ungünstigsten gelegenen Punkte noch eine genügende Druckhöhe, etwa 60 Fuß hannov. = 17,526 Meter, rund 17,50 Meter, zu erzielen, und wenn dies nicht sein sollte, den betreffenden Rohrstrang zu erweitern.

Ein für diesen Fall passendes Beispiel bot der Zoologische Garten, welcher gerade an der entgegengesetzten Seite der Stadt gelegen ist, wie das Hochreservoir auf dem Lindener Berge.

Bei dem Höhenunterschiede von 1 Meter zwischen S und M (Zoologischer Garten und Ecke der Packhofstraße), hatte man zuerst für die Strecken $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ und $\overline{RS}$ beziehungsweise die Röhrendurchmesser zu 225, 175 und 80 Millimeter berechnet und dabei gefunden, daß die Druckhöhe bei S (über Terrain) nur 15,82 Meter betragen haben würde. Da jedoch die Druckhöhe am Zoologischen Garten annähernd 17,50 Meter betragen sollte, so mußten die betreffenden Röhren erweitert werden. Man wählte daher diese Weiten (oder Durchmesser) beziehungsweise zu 250, 200 und 100 Millimeter.

Schließlich gelangte man zu den in folgender Tabelle zusammengestellten Resultaten:

Strecke (Fig. 188[a])	Rohrweite (Durchm.) in Millimet.	Geschwindigkeiten in Metern (abger.)	Verluste auf je 100 Meter Länge (rund)	Längen à 100 Meter	Verluste auf diese Längen (Meter)
N bis O	500	1,10	0,29	1,90	0,551 (=0,29.1,90)
O „ P	275	1,10	0,51	6,90	3,519
P „ Q	250	0,90	0,40	4,50	1,800
Q „ R	200	0,85	0,45	5,50	2,475
R „ S	100	0,70	0,64	5,25	3,360
				Summa:	11,705 Meter
				Hierzu 20 %	2,341 „
					14,046 Meter, oder
				Verlust rund:	14,05 „

Es beträgt aber die Druckhöhe über dem Terrain bei M:	30,16 Met
Der Druckverlust von N bis S ist	14,05 „
Folglich bleibt an Druckhöhe bei S über dem Terrain bei M	16,11 Met.
Da nun das Terrain bei S tiefer liegt als das bei M um	1,00 „
So erhält man als Druckhöhe bei S über dem dortigen Terrain	17,11 Met.

Letzterer Werth differirt so wenig von den gewünschten 17,50 Meter, daß hiermit die Aufgabe, den Bedingungen gemäß, als gelöst betrachtet werden konnte.

§. 172.

Noch ist ein, nach Wissen des Verfassers zuerst von Bresse[1]) erörtertes Verfahren zur Ermittlung des Röhrendurchmessers einer Stadt-Wasserleitung zu erwähnen, welches darin besteht, für jede bestimmte Strecke diese Durchmesser so zu wählen, daß die gesammten Anlagekosten die möglichst Kleinsten werden.

Indem zur erforderlichen Umfangsbeschränkung gegenwärtigen Buches, hinsichtlich der allgemeinen Behandlung dieses Gegenstandes, auf die Hydraulik des vorgenannten Autors, so wie auf desfallsige Arbeiten Grashof's[2]) und Thiem's[3]) verwiesen werden muß, beschränken wir uns auf einen speciellen Fall (auf ein Zahlenbeispiel), nämlich auf die nach diesem Verfahren geführte Rechnung des Bauraths Gerstner zur Ermittlung des Hauptrohrdurchmessers für die Wasserleitung des Großherzogl. Schlosses in Karlsruhe[4]).

Die betreffenden Gesammtkosten $= K$ setzten sich aus folgenden drei zusammen:

1) Aus den Anlagekosten $= A$ der Dampfmaschine, Kessel, Schornstein, Fundamente etc.

2) Aus dem Brennmaterialaufwande $= B$ der Dampfmaschine und Zubehör.

3) Aus den Anlagekosten der Röhrenleitung und den betreffenden Nebenkosten (Verlegung der Röhren etc.).

Es werden demnach die Gesammtkosten dargestellt durch

$$K = A + B + C.$$

Die hierbei in Rechnung zu bringende secundliche Wassermenge betrug $Q = 0{,}75$ Cubikfuß badisch $= 0{,}75 \,.\, 0{,}027 = 0{,}02025$ Cubikmeter. Die zugehörige Röhrenlänge war $l = 3250$ badisch $= 975{,}0$ Meter.

---

[1]) Hydraulique etc., §. 60 und §. 64. An ersterer Stelle wird erwähnt, daß sich die Anlagekosten der Pariser Wasserleitung pro laufenden Meter auf nahezu 100 . d Franken belaufen, wenn d den Röhrendurchmesser in Metern bezeichnet.

[2]) Theoretische Maschinenlehre, Bd. 1, S. 528.

[3]) Thiem, Die Wasserwerke der Stadt Nürnberg. Leipzig 1879, S. 46 etc.

[4]) Großherzogl. Hof-Wasserwerk zu Karlsruhe, entworfen und ausgeführt von Obermüller und Gerstner. Karlsruhe 1871. Groß-Folio, mit 30 Blatt Abbildungen.

Um A als Function des Röhrendurchmessers $= d$ auszudrücken, hat man zuerst nach Dupuit (S. 504) für die zur Ueberwindung der Bewegungshindernisse erforderliche Druckhöhe $= z$:

$$z = \frac{l}{d^5} \frac{Q^2}{400},$$

so wie die correspondirende Zahl von Maschinenpferdekräften $= N$ (à 75 Meterkilogr. pro Secunde):

$$N = \frac{1000}{75} . Q . z = 13{,}33 Qz, \text{ d. i.}$$

$$N = 13{,}33 . \frac{l}{d^5} \frac{Q^3}{400},$$

daher wegen $l = 975$ und $Q = 0{,}02025$

$$(1) \quad N = \frac{0{,}00054}{d^5}.$$

Rechnet man nun (wie in unserer Quelle) die Anlagekosten pro Maschinenpferdekraft zu

$$600 \text{ Gulden rhn.} = 600 . \tfrac{12}{7} = 1028{,}6 \text{ [1]) Mark,}$$

so ergiebt sich:

$$(2) \quad A = \frac{1028{,}6 . 0{,}00054}{d^5} = \frac{0{,}555}{d^5} \text{ Mark.}$$

Veranschlagt man ferner (wiederum mit Gerstner), daß jede Maschinenpferdekraft in 12 Stunden 27 Kreuzer ($2\frac{1}{4}$ Kreuzer pro Stunde) an Brennmaterial bedarf, so macht dies pro Jahr (da die genannte Wasserkunst ununterbrochen in Thätigkeit bleiben muß) $\frac{27 . 365}{60} = 164{,}25$ Gulden, oder 281,57 Mark. Letztere Summe zu 5 % capitalisirt, giebt für N Maschinenpferde $5631 . N$, daher, wegen (1):

$$(3) \quad B = \frac{3{,}04}{d^5} . \text{ Mark.}$$

Werden dann (drittens) die Anlagekosten (inbegriffen alle Nebenkosten) der Leitung einfach dem Rohrdurchmesser proportional gesetzt, und zwar (abermals mit Gerstner) für den laufenden Fuß Leitung bei 1 Zoll Rohrdurchmesser zu 1 Gulden 6 Kreuzer, so erhält man, nach ausgeführter Reduction auf Metermaaß und Mark:[2])

$$(4) \quad C = 204262{,}5\, d \text{ Mark.}$$

---

[1]) 35 Kreuzer rhn. = 1 Mark gerechnet, daher:

$$1 \text{ Gulden rhn.} = \frac{60}{35} = \frac{12}{7} \text{ Mark.}$$

[2]) Es ergiebt sich nämlich:

66 Kreuzer für je 30 Millim., d. i.
22 „ „ „ 10 „ folglich
pro Meter Durchmesser 2200 Kreuzer = 62,85 Mark.

Da nun der badische Fuß = 0,3 ist, so folgt $\frac{62{,}85}{0{,}3} = \frac{628{,}5}{3} = 209{,}5$ Mark pro Meter Länge, also für 975 Meter:

$$975 . 209{,}5 = 204262{,}5 \text{ Mark.}$$

Sodann ergiebt sich:

$$K = \frac{0,555}{d^5} + \frac{3,04}{d^5} + 204262,5 \,.\, d,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$K = \frac{a}{d^5} + \frac{b}{d^5} + c \,.\, d.$$

Dieser Werth wird aber ein Kleinstes für

$$d = \sqrt[6]{\frac{5\,(a+b)}{c}},$$

also in Zahlen ausgedrückt für

$$d = \sqrt[6]{\frac{17,975}{204262,5}} = 0,2114 \text{ Meter}.$$

Die Ausführung dieser Hauptleitung wurde beschafft für

$$d = 0,195 \text{ Meter}$$ [1]).

§. 173.

Bewegung des Wassers durch künstliche Sandfilter [2]).

Bei dem höchst schwachen Fundamente, worauf gegenwärtig die technische Hydrodynamik noch beruht, ist es natürlich, daß die Gesetze der Bewegung des (unreinen) Wassers durch künstliche Sandfilter, zum Zwecke der Reinigung von mechanisch beigemengten Stoffen, zur Zeit noch derartig wenig bekannt sind, daß man sich für practische Anwendungen einfach mit Erfahrungsresultaten und daraus abgeleiteten, also mehr oder weniger empirischen Formeln begnügen muß.

Der bereits wiederholt rühmlich genannte französische Ingenieur Darcy war der erste, der sich bemühte, auf experimentellem Wege die Gesetze für den Durchgang des Wassers durch künstliche Filter aufzufinden [3]).

Darcy gelangte dabei vor Allem zu der Formel:

$$(1) \quad Q = k\,\frac{H}{e}\,.\,F,$$

worin Q die pro Zeiteinheit filtrirte Wassermenge, H die Differenz der Wasserspiegel über und unter dem Filter, also die wirksame Druckhöhe, e die Dicke des Filters und k einen Coefficienten bezeichnet, der von der Durchlässigkeit und Beschaffenheit des Filtermateriales abhängt.

Bezeichnet ferner v die mittlere Geschwindigkeit im Filter und F_1 den effectiven, freien Durchflußquerschnitt im Filter (die Summe

---

[1]) Gerstner, a. a. O., S. 16.

[2]) Allgemeines über den betreffenden Gegenstand findet man insbesondere in nachbemerkten Schriften: 1. Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst. Erster Theil, Bd. 1 (3. Aufl., 1869), S. 235. — 2. E. Grahn und Andreas Meyer, Ueber künstliche centrale Sandfilter. Hamburg 1877. — 3. Sonne, im 3. Bande (Wasserbau) des Handbuches der Ingenieurwissenschaften. Leipzig 1879, S. 59.

[3]) Les Fontaines publiques de la ville de Dijon, Pag. 559 ff.

der Räume, welche die Sandkörner zum Durchfließen des Wassers frei lassen), so hat man ebenfalls nach Darcy:

$$(2) \quad Q = F_1 v.$$

Ist ferner $\frac{F_1}{F} = n$ gehörig ermittelt, so hat man auch:

$$(3) \quad Q = nF \,.\, v,$$

daher, wenn man (1) mit (3) verbindet, erhalten wird:

$$(4) \quad H = \left(\frac{n}{k}\right) ev.$$

Diese Formeln entsprechen hauptsächlich folgenden zwei Gesetzen:

1) Das durch den Filter gegangene Wasserquantum ist der einfachen Druckhöhe H direct und der Filterdicke e umgekehrt proportional.

2) Die beim Durchgange eines gewissen Wasserquantums mit einer Geschwindigkeit v durch eine Filtermasse von e Dicke verlorene Druckhöhe H ist proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit, ferner proportional der Weglänge (Höhe des Filters) und einem von der Natur des Materiales abhängigen Coefficienten.

Von den Versuchen[1]), aus welchen Darcy überhaupt vorstehende Gesetze ableitete, enthalten nachstehende Tabellen 3 Reihen. Das Filtermaterial bestand hierbei aus Flußsand und zwar aus

einer 0,58 Meter starken Lage Sand von 0,77 Millim. Siebgröße
„ 0,13 „ „ „ „ „ 1,10 „ „
„ 0,12 „ „ „ „ „ 2,00 „ „
0,17 „ feiner Kies, Muschelschalenstücke etc.

Die Zwischenräume betrugen ungefähr 38 Procent, so daß n in vorstehenden Formeln $= 0,38$ war, folglich gesetzt werden mußte:

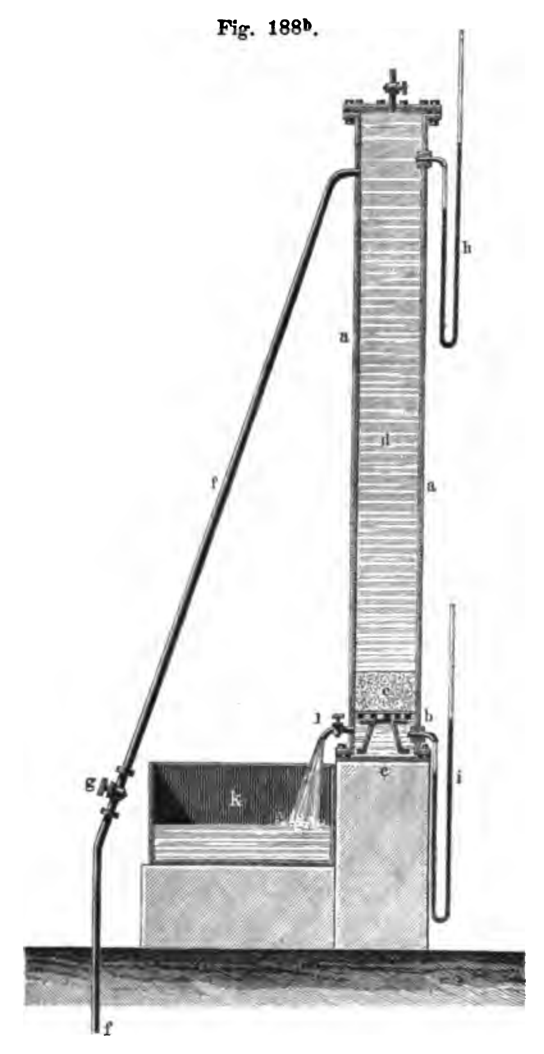
$$(5) \quad Q = 0{,}38\, Fv.$$

Darcy benutzte zu seinen Versuchen den in Fig. 188[b] abgebildeten Apparat, der aus einem vertical gestellten Kreiscylinder a bestand, bei 35 Centimeter Durchmesser (im Lichten) und 3,5 Meter Höhe. In 20 Centimeter Abstand vom Boden b war ein eiserner Rost aus 7 Millimeter starken prismatischen Stäben und mit eben so großen (freien) Zwischenräumen gebildet, darauf rechtwinklig ein zweiter Rost aus Drähten von 5 Millimeter Dicke und eben so großen Zwischenräumen angebracht, über welchen man endlich ein Metallsieb mit Löchern von 2 Millimeter Weite gelegt hatte. Das zu filtrirende Wasser wurde in einer Röhre f zugeführt, die man von dem Hauptstrange der Dijoner Wasserleitung abgezweigt hatte. Mit Hülfe von Hähnen g und l stellte man ziemlich constante Ausflüsse her. Das durch den Filter gegangene Wasser wurde von einem gehörig geaichten Gefäße k aufgenommen. Zum Messen der Druckhöhen dienten an beiden Enden angebrachte Quecksilbermanometer i.

---

[1]) Auszugsweise auch (von Bornemann) im Civilingen., Bd. 4 (1858), S. 125.

Fig. 188b.



Beim Versuche wurde der Cylinder *a* zuerst mit Wasser *d* gefüllt, hierauf Sand eingeschüttet, um zu verhüten, daß die Sandzwischenräume Luft enthalten, und endlich wurde die Höhe des Sandes erst am Ende jeder Versuchsreihe gemessen, nachdem ihn das durchfließende Wasser zusammengedrückt hatte[1]).

Einige Ergebnisse der im October und November 1855 in Dijon ausgeführten Versuche zeigt nachstehende Tabelle:

[1]) Man sehe hierüber auch Bornemann's Uebersetzung im Civilingenieur, Bd. IV (1858), S. 125, und eine beachtenswerthe Abhandlung von Weiß, ebenfalls im Civilingenieur, Bd. XI (1865), S. 190, welche die Ueberschrift trägt: „Studien über die Filtration des Wassers im Großen und Theorie derselben".

Nr. des Darcy'schen Versuches	Filterquantum pro Minute pro 0□m,0962 Querschnitt in Litern	Filterquantum pro Secunde pro 0□m,0962 Querschnitt in Litern	Filterquantum pro Secunde pro 1□m Querschnitt in Litern	Filterquantum $=Q$ pro Secunde, pro 1□m in Cubikmetern	Druckhöhe $=H$ in Metern	$\varepsilon = \frac{Q}{H}$	Coefficient k in der Formel $Q = k\frac{H}{e}$	Secundliche Geschwindigkeit $= v$ in Metern $\left(v = \frac{Q}{0,38}\right)$
Erste Versuchsreihe: $e = 0^m,58$.								
1	3,6	0,060	0,6237	0,0006237	1,11	0,562	0,000326	0m,00164
5	15,2	0,253	2,6300	0,00263	5,02	0,524	0,000304	0,0069
10	29,4	0,490	5,0936	0,0050936	10,89	0,468	0,000271	0,0134
						Mittelwerth	= 0,00030	
Zweite Versuchsreihe: $e = 1^m,14$.								
1	2,66	0,0443	0,4605	0,0004605	2,60	0,1771	0,0002019	0,00121
2	4,28	0,0713	0,7411	0,0007411	4,70	0,1577	0,0001798	0,00195
3	6,26	0,1043	1,0842	0,0010842	7,71	0,1406	0,0001603	0,00285
4	8,60	0,1433	1,4890	0,001489	10,34	0,1440	0,0001642	0,003918
5	8,90	0,1483	1,5410	0,0015410	10,75	0,1433	0,0001634	0,004055
6	10,40	0,1733	1,8010	0,0018010	12,34	0,1459	0,0001664	0,00474
						Mittelwerth	= 0,0001726	
Dritte Versuchsreihe: $e = 1^m,71$.								
1	2,13	0,0355	0,3690	0,0003690	2,57	0,1436	0,000246	0,000971
2	3,90	0,0650	0,6756	0,0006756	5,09	0,1327	0,000227	0,001778
3	7,25	0,1208	1,2557	0,0012557	9,46	0,1327	0,000227	0,003304
4	8,55	0,1425	1,4812	0,0014812	12,35	0,1199	0,000205	0,003898
						Mittelwerth	= 0,000226	

Nach dem Mittelwerthe (der ersten Versuchsreihe) erhält man für die pro Secunde gefilterte Wassermenge Q in Cubikmetern $Q = 0{,}00030 \frac{H}{e}$, daher, weil $n = 0{,}38$, auch

$$\frac{n}{k} = \frac{0{,}38}{0{,}0003} = 1266, \text{ also aus (4):}$$

$$(5) \quad H = 1266 ev.$$

Da sich ferner aus der Gleichsetzung von (1) und (2) ergiebt:

$$(6) \quad v = \frac{k}{n} \cdot \frac{H}{e},$$

so erhält man, wenn zugleich $H = e$ gesetzt wird:

$$v = \frac{k}{n},$$

d. i. für vorstehenden speciellen Versuchsfall:

$$v = \frac{0{,}0003}{0{,}38} = 0^m{,}0008.$$

Soll daher eine Sandschicht von obenbezeichneter Art und von 1 Meter Dicke bei ebenfalls 1 Meter Druckhöhe durchlaufen werden, so braucht das Wasser nur eine Geschwindigkeit von 0,8 Millimeter anzunehmen [1]).

Dupuit, in seinem S. 452 notirten Werke, bemüht sich, wie nachstehend, den theoretischen Nachweis vorstehender Formeln Darcy's zu liefern.

Von der Prony'schen Gleichung II, S. 396 ausgehend,

$$\frac{h}{l} = \frac{p}{a}(Av + Bv^2),$$

vernachlässigt er, wegen der Kleinheit von v, das mit der zweiten Potenz dieser Größe ausgestattete Glied, setzt zur Abkürzung $\frac{p}{a} A = \mu$ und schreibt (wie wir von S. 450 ab) i statt $\frac{h}{l}$, so daß folgt:

$$(7) \quad i = \mu v.$$

Da nun bei dieser Auffassung i nichts anderes als $\frac{H}{e}$ darstellen kann, so folgt

$$\frac{H}{e} = \mu v, \text{ oder}$$

$$(8) \quad v = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{H}{e},$$

d. i. die Darcy'sche Gleichung (6), so daß zugleich

$$\frac{1}{\mu} = \frac{k}{n}, \text{ oder}$$

$$\mu = \frac{n}{k} \text{ ist.}$$

---

[1]) Der Verfasser entlehnte dies Beispiel absichtlich dem wiederholt erwähnten Werke Darcy's: „Études etc. sur le mouvement des eaux“, 2e Edit., Pag. 233, indem daselbst die Deutlichkeit der Darstellung Einiges zu wünschen übrig läßt.

Statt (1) erhält man sodann:

$$(9)\quad Q = \frac{n}{\mu} \cdot \frac{H}{e} \cdot F,$$

woraus auch noch folgt:

$$(10)\quad \mu = \frac{n}{Q} \cdot \frac{H}{e} \cdot F.$$

Darcy berechnet hiernach für $n = 0{,}3$, $Q = 4^{cbm},5$ pro 24 Stunden $= 24 \,.\, 3600$ Secunden und für $H = e$, so wie $F = 1$ Quadratmeter vorausgesetzt:

$$\mu = \frac{0{,}3 \,.\, 24 \,.\, 3600}{4{,}5} = 5760.$$ [1]

Darcy[2]) leitet auch noch das Gesetz ab, nach welchem der Wasserspiegel über dem Filter sinkt, wenn kein Wasser mehr zuströmt, also die Druckhöhe über dem Filter veränderlich ist.

Wir setzen hierzu $H = h + e$, so daß man nach (1) erhält:

$$(11)\quad Q = k \frac{h+e}{e} F.$$

Ist dann dh die unendlich kleine Höhe, um welche der Wasserstand in der Zeit dt sinkt, so erhält man für die betreffende Geschwindigkeit $= v$ den Werth $v = -\frac{dh}{dt}$. Aus (2) folgt aber außerdem $v = \frac{Q}{F} = k \frac{h+e}{e}$, so daß man erhält:

$$-\frac{dh}{dt} = k \frac{h+e}{e}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{dh}{h+e} = -\frac{k}{e} dt.$$

Hieraus ergiebt sich aber durch Integration, die betreffende Constante mit C bezeichnet:

$$\text{Lgnt}\,(h + e) = C - \frac{k}{e} t.$$

Entspricht einer bestimmten Zeit t_0 der Widerstand h_0, so hat man:

$$\text{Lgnt}\,(h_0 + e) = C - \frac{k}{e} t_0,$$

folglich auch:

$$(12)\quad \text{Lgnt}\,(h + e) = \text{Lgnt}\,(h_0 + e) - \frac{k}{e}(t - t_0).$$

Ersetzt man nun noch $h + e$ und $h_0 + e$ beziehungsweise durch $\frac{Qe}{kF}$ und durch $\frac{Q_0 e}{kF}$, so ergiebt sich überdies die Gleichung:

$$(13)\quad \text{Lgnt}\, Q = \text{Lgnt}\, Q_0 - \frac{k}{e}(t - t_0).$$

Vorstehende Gesetze werden jetzt gewöhnlich die Darcy-

---

[1]) a. a. O., Pag. 233.

[2]) Les Fontaines Publiques etc., Pag. 594.

Dupuit'schen genannt. Es ist werth, hervorzuheben, daß ihre Grundlage darauf beruht, daß die Wassergeschwindigkeit in den Filtern nicht der Quadratwurzel aus der Druckhöhe (also nicht dem Toricelli'schen Theorem), sondern der einfachen Druckhöhe (also dem Hagen-Poiseuille'schen Gesetze)[1]) proportional ist.

Nach Darcy-Dupuit stützte zuerst Thiem[2]) auf dieselbe Theorie Untersuchungen über die Ergiebigkeit von Filtergallerien, artesischen Bohrlöchern und Schachtbrunnen, und bemühte sich um die Verallgemeinerung derselben dadurch, daß er die betreffenden Formeln auch für Filter von veränderlichem Querschnitte brauchbar machte[3]).

Hagen[4]) fand nach eigenen, mit Sandfiltern angestellten Versuchen, daß das Darcy-Dupuit'sche Gesetz nur dann mit der Erfahrung stimmende Resultate lieferte, wenn er die Druckhöhe um eine bestimmte constante Größe verminderte.

Für die in der Zeiteinheit durch den Sandfilter gehende Wassermenge $= Q$ findet dann Hagen die Gleichung:

$$Q = m \frac{h + e - c}{e},$$

wo m und c entsprechende Constanten sind.

Außerdem glaubt Hagen, daß jede Erwärmung des Wassers um 1 Grad eine Steigerung der Ergiebigkeit des Filters um nahe 4 Procent veranlaßt.

Ebenfalls unter Zugrundelegung des Darcy-Dupuit'schen Gesetzes, hat neuerdings der französische Ingenieur Havrez Versuche mit Filtern aus feinem und grobem Sand und aus Wolle angestellt, wobei er auch die jedesmalige Temperatur $= t$ der Filterflüssigkeit in Betracht gezogen hat[5]).

Die hierbei erhaltenen Formeln haben folgende Gestalt (unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen):

$$\frac{Q}{F} = \left[\alpha + \beta t\right] e + \left[\gamma + \frac{\delta + \varepsilon t}{e}\right] H.$$

Hierin sind α, β, γ, δ und ε Constanten, die von der Durchlässigkeit und Beschaffenheit des Filtermateriales abhängen[6]).

Offenbar wird man sich bis auf Weiteres mit dem Darcy-

---

[1]) S. 502 und 503.

[2]) Journal für Gasbeleuchtung etc. von Dr. Schilling. XIII. Jahrgang (1870), S. 451.

[3]) Man sehe auch Thiem's „Kritische Bemerkungen" etc. im vorher notirten Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung, Jahrg. XII (1869), S. 515, so wie ebendaselbst (S. 518), eine Abhandlung, welche die Ueberschrift trägt: „Die Ergiebigkeitsbestimmung eines artesischen Brunnens".

[4]) Hagen, Wasserbaukunde. Erster Theil. Erster Band, S. 256 (Dritte Aufl.).

[5]) Cuyper's Revue universelle des mines etc. des traveaux publiques etc., Tome XXXV (1874), Pag. 469, und Lacroix's Annales du génie civil, 14e Année de la Publication (1875), Pag. 144. An beiden Stellen unter der Ueberschrift: „Lois de la Filtration".

[6]) Auch der Bemühungen Grashof's (im 1. Bande der Theoretischen Maschinenlehre, S. 540) muß anerkennend gedacht werden, eine Theorie des Gegenstandes, in einer für die Praxis brauchbaren Weise, anzubahnen.

Dupuit'schen Gesetze für Filter zu begnügen haben, die betreffenden Erfahrungscoefficienten aber für jedes neue Filtermaterial (für jeden besonderen Fall) bestimmen müssen.

Zusatz. Während Darcy, Dupuit und Thiem die vorerwähnten Gesetze nicht nur auf Filter, sondern auch auf die Bewegung des sogenannten Grundwassers, der Schachtbrunnen und der artesischen Brunnen für anwendbar halten, wird dies in jüngster Zeit von einem Ingenieur Oscar Smreker entschieden bestritten und dafür eine ganz neue Theorie aufgestellt, die unter der Ueberschrift: „Das Grundwasser und seine Verwendung zu Wasserversorgungen" in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XXIII (1879), S. 347,[1]) enthalten ist.

Bemerkt zu werden verdient überdies, daß sich Herr Smreker bereits früher, in derselben Zeitschrift, um die Entwicklung eines Gesetzes für den Widerstand bei der Bewegung des Grundwassers, unter Benutzung eigener Versuche, verdient gemacht hat, jedoch leider damit noch zu keinem bestimmten Abschlusse gelangt ist.

Anmerkung. Zur Feststellung der Begriffe Grundwasser, Quellwasser und Brunnenwasser, von welchen im Vorstehenden wiederholt die Rede war, mögen folgende Bemerkungen dienen.

Die gesammten auf der Erdoberfläche entstehenden Niederschläge (vorzugsweise Regen, Schnee und Hagel) theilen sich in vier Theile. Ein Theil verdunstet, ein zweiter Theil wird von Pflanzen aufgesogen, ein dritter Theil versickert in den Boden (bildet das sogenannte Grundwasser) und ein vierter Theil fließt an der Erdoberfläche (als Tagewasser) direct ab, bildet Bäche, Flüsse und Ströme[2]).

Hierzu noch Folgendes zur weiteren Erläuterung:

Grundwasser sammelt sich unter der Erdoberfläche, bewegt sich (in der Regel) auf Bodenschichten, welche für Wasser undurchdringlich sind und wird von durchdringlichen Schichten überlagert. Hat hierbei der den betreffenden Erdkörper durchströmende Fluß ein durchlassendes Bett, so können zwei Fälle eintreten, je nachdem der Grundwasserspiegel über oder unter dem Flusse liegt. Im ersten Falle strömt das Grundwasser dem Flusse zu, im zweiten Falle tritt das Flußwasser in den Untergrund, d. h. es wird wieder zu Grundwasser.

Bei einem völlig undurchlässigen Flußbette hören die hervorgehobenen Beeinflussungen auf. In solchen Fällen eignet sich jedoch das Grundwasser (da es in der Regel sehr reines Wasser ist) ganz

---

[1]) Es werde die Gelegenheit benutzt, auf einen Versuch Gerstner's (des Ingenieurs der Karlsruher Hof-Wasserleitung) in dem bereits S. 545 besprochenen Werke aufmerksam zu machen, dahin gehend, die Theorie der Grundwasserbewegung so aufzufassen, als passirte dasselbe hohle Räume von Kugelsystemen, die pyramidal gelagert sind.

[2]) Ohne genauere Begründung nimmt man gewöhnlich an, daß ungefähr $\frac{1}{3}$ der gesammten atmosphärischen Niederschläge verdunstet, $\frac{1}{3}$ in den Boden versickert und das letzte Drittheil oberflächlich ablaufe (Handbuch der Ingenieur-Wissenschaften, Bd. III, S. 18, §. 7). Man vergleiche hier die bereits S. 429 gemachten Angaben.

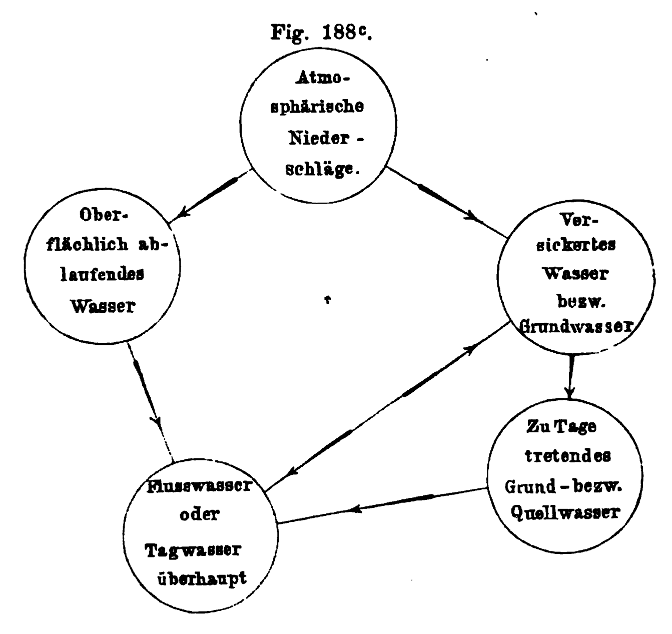
besonders zur Wasserversorgung der Städte und wird dann am Besten in geeigneten Sammelröhren gewonnen [1]).

Quellwasser ist natürlich zu Tage tretendes Grundwasser, was wieder Tagewasser wird.

Brunnenwasser endlich ist Quellwasser, welches auf seinem Wege zur Thalniederung (zum Flusse, Strome) künstlich abgefangen wird.

Nachstehende Skizze [2]), Fig. 188c, kann als bildliche Darstellung der vorbemerkten Wasserverhältnisse dienen.

Fig. 188c.



Dem Zwecke gegenwärtigen Buches entsprchend, schließt der Verfasser hiermit den betreffenden Gegenstand und benutzt dabei nur noch die Gelegenheit, auf zwei neuere Arbeiten des Herrn Ingenieurs Thiem in München aufmerksam zu machen, worin sich höchst werthvolle An-

---

[1]) Für die Wasserversorgung der Stadt Hannover hat man derartige Sammelröhren von 800mm Weite und 904 Meter Länge, mit offenen Schlitzen in den Wanden, 7,7 Meter tief in ein gehörig (5 Meter) starkes Kies- und Sandlager des Leinegebietes (stromaufwärts bei Ricklingen) gelegt. In 24 Stunden lassen sich hier circa 47000 Cubikmeter reines Wasser gewinnen. Die secundliche Geschwindigkeit, womit das Grundwasser durch die Schlitze des Sammelrohrstranges tritt, wird in unserer Quelle zu 2,60 Millimeter angegeben und dabei bemerkt, daß die thunlichste Langsamkeit des Zuflusses als eine Hauptsache bei einer solchen Anlage anzusehen sei, weil dadurch die Zuführung von Sand etc. vermieden und das Wasser des Grundwasserstromes in keinerlei gewaltsame Bewegung gesetzt wird. (Nach Oberbaurath Berg in der Zeitschrift des Hannov. Archit. und Ingen.-Vereins, Jahrg. 1877, S. 400.)

[2]) Der schätzbaren, vorher citirten Abhandlung (a. a. O., S. 351) des Ingen. Smreker entnommen, welche hier überhaupt mit benutzt wurde.

gaben über Grundwasserbewegung, Filtergallerien, Schachtbrunnen etc. vorfinden.

Die erste dieser Schriften (im Mai 1878 erschienen) ist betitelt: „Die Wasserversorgung der Stadt Leipzig", während die zweite (im Februar 1879 erschienen) die Ueberschrift trägt: „Das Wasserwerk der Stadt Nürnberg".

Drittes Capitel.

Springende Wasserstrahlen.

§. 174.

Die Geschwindigkeit v, womit sich Wasser in einer Röhrenleitung von l Länge, d Durchmesser und Ω Querschnitt bewegt, deren Ausflußöffnung durch eine Mündung ω verengt wird, ist nach §. 165, S. 513:

$$\text{I.} \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 + \eta \frac{l}{d} + \Sigma\eta_n}},$$

wobei $\Sigma\eta_n$ die Summe der Widerstandscoefficienten bezeichnet, welche den vorhandenen Querschnitts- und Richtungsveränderungen der Röhre entsprechen.

Ferner ist die Geschwindigkeit c, womit das Wasser aus der Mündung ω tritt:

$$\text{II.} \quad c = v \frac{\Omega}{\mu\omega}.$$

Giebt man daher der Mündung ω eine solche Lage, daß das Wasser in verticaler Richtung, aufwärts, aus derselben tritt, so müßte sich der hervortretende Strahl zu einer Höhe Z erheben, welche durch die Gleichung ausgedrückt wird:

$$\text{III.} \quad Z = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2.$$

Diese Höhe wird indeß nicht erreicht, weil Luftwiderstand und zurückfallende Wassertheilchen dem Aufsteigen neue Widerstände bereiten, die im Vorstehenden nicht berücksichtigt worden sind.

Zur Zeit fehlt es noch an einem für alle Fälle brauchbaren mathematischen Ausdruck, um die wirkliche Steighöhe S eines Wasserstrahles aus der theoretischen Sprunghöhe Z berechnen zu können. Höchst wahrscheinlich ist es jedoch, daß diese Steighöhe in einem zusammengesetzten Verhältnisse der Geschwindigkeitshöhe Z abnimmt und im geraden Verhältnisse des einfachen Strahlendurchmessers wächst.

Anmerkung. Bemerkenswerthe Versuche über den Einfluß des Luftwiderstandes auf die Höhe springender Strahlen haben zur Zeit

nur Mariotte[1]), Bossut[2]), Baumgarten[3]) und Weisbach[4]) angestellt, von denen zur Zeit die letzteren als die brauchbarsten zu betrachten sind.

Die wichtigsten Resultate der Versuche Mariotte's sind Folgende: Die Ausflußöffnung der vertical aufwärts springenden Strahlen war in dünner Wand in der horizontal gelegten Mündung eines nach oben gekehrten Röhrenendes angebracht.

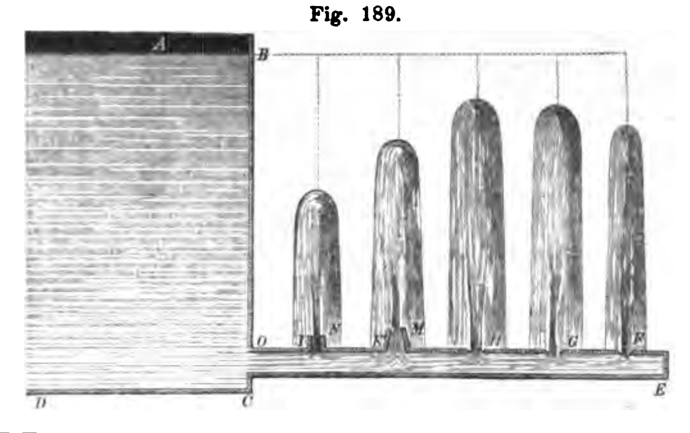
	Durchmesser der Mündung					Durchm. der Münd.	
	6 pariser Linien					3‴	4‴
Druckhöhe	5′6″	12′4″	24′ 5″	26′ 1″	34′11½″	34′11½″	34′11½″
Strahlhöhe	5′3″11‴	12′0″	22′10″	24′2½′	31′ 8½′	28′ 0″	30′ 0″

Aus diesen Versuchen schloß Mariotte (S. 328 a. a. O.), daß zu einer Strahlhöhe von $5 \,.\, n$ Fußen, allemal eine Druckhöhe von $5n + \frac{1}{12} n^2$ Fußen gehöre. Setzt man daher die Strahlhöhe $5n = S$ und die Druckhöhe $= Z$, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} Z = S + \frac{1}{12}\,\frac{S^2}{25} \\ \hline Z = S + \frac{S^2}{300} \end{array}\right. \text{(pariser Fuß), oder}$$

$$S = -\,150 + \sqrt{300 \,.\, Z + 22500}.$$

Fig. 189.



[1]) Oeuvres de H. Mariotte, T. II à Leyde, 1717. Deutsch von Meining (Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik). 4. Theil, S. 331 etc. Leipzig 1723.

[2]) Traité d'hydrodynamique, T. II, Pag. 104.

[3]) Darcy: Fontaines publiques, Pag. 436.

[4]) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1861, S. 113.

Bei Aufstellung dieser Regeln hat Mariotte weder auf die Gestalt noch Größe der Sprungmündung, noch auf die Länge der Leitung Rücksicht genommen, in welcher die Ausflußöffnung angebracht war.

Von den Versuchen Bossut's verdienen nachstehende besondere Erwähnung.

Bei einer constanten Druckhöhe $OB = 11$ Fuß, Fig. 189, über der oberen Wand OF im Gefäße $ABCD$ von 9 Quadratfuß Querschnitt, wobei die Röhre OE eine Weite von 3 Zoll 8 Linien hatte, erhoben sich die Strahlen auf folgende Höhen:

Etwas geneigter Strahl	Verticaler Strahl	Mündung in dünner Wand
10′ 4″ 6‴	10′ 0″ 10‴	F: 2 Linien Durchmesser
10′ 7″ 6‴	10′ 5″ 10‴	G: 4 " "
10′ 8″ 0‴	10′ 6″ 6‴	H: 8 " "
9′ 8″ 6‴	9′ 6″ 4‴	Kegelmündung KM von 70‴ Höhe, 9‴ untern und 4‴ obern Durchmesser.
7′ 3″ 6‴	7′ 1″ 6‴	Cylindrischer Ansatz JN von 70‴ Höhe und 4‴ Durchmesser.

Bei der verhältnißmäßig geringen Länge (6 Fuß) der Röhre OE, konnte der Einfluß des Röhrenwiderstandes vernachlässigt und überhaupt geschlossen werden, daß auch hier die Sätze des §. 110 Bestätigung fanden, die Steighöhe, unter sonst gleichen Umständen, für eine Oeffnung in dünner Wand am größten, für den cylindrischen Ansatz am kleinsten war, ferner auch (wie bei Mariotte) die Steighöhe mit der Strahldicke zunahm.

Die Versuche Baumgartens, worüber, wie schon in einer vorhergehenden Note erwähnt, Darcy a. a. O., Pag. 235 berichtet, wurden beim Ausflusse des Wassers durch eine Mündung in dünner Wand von 5 Centimeter Durchmesser und unter dem Drucke von höchstens 12 Meter angestellt. Wegen des hierbei stattfindenden kleinen Verhältnisses der Steighöhe zur Strahldicke waren diese nicht zur Begründung eines neuen Gesetzes über das Aufsteigen der Wasserstrahlen geeignet und zwar um so weniger, als bei derselben die Druckhöhe wegen ihrer mittelbaren Bestimmung noch viel Unsicherheit zurückließ.

d'Aubuisson[1]) leitete aus 6 Versuchen Mariotte's und aus einem Versuche Bossut's für die Berechnung der Strahlhöhe S aus der Druckhöhe $= Z$ an der Mündung die Formel ab:

$$\left.\begin{aligned} S &= Z - 0{,}01 \,.\, Z^2 \text{ oder} \\ Z &= 50 + \sqrt{2500 - 100\,S} \end{aligned}\right\} \text{(Metermaaß).}$$

Hierbei wird letzterer Werth schon imaginär, wenn die Strahlhöhe 25 Meter übersteigt. Welches Vertrauen hiernach diese Formeln verdienen, versteht sich von selbst.

---

[1]) Traité d'hydraulique, Pag. 274.

§. 175.

Die Weisbach'schen Versuche über die Steighöhe springender Wasserstrahlen[1]) übertreffen Alles, was vorher in dieser Beziehung unternommen wurde und beantworten namentlich entschieden und bestimmt die Hauptfragen:

„Wie wächst die Steighöhe mit der Druckhöhe im Ausflußreservoir und in welcher Abhängigkeit ist die Steighöhe von der Form und Weite der Mundstücke?"

Die Versuche wurden bei Druckhöhen von $\frac{1}{2}$ bis 21 Meter und mit verschieden geformten Mundstücken von 4 bis 25 Millimeter Mündungsweite angestellt.

Die allgemeinen Ergebnisse sämmtlicher Versuche waren folgende:

1) Der Widerstand der Luft ist bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten von $1\frac{1}{2}$ bis $7\frac{1}{2}$ Meter so klein, daß hier die Sprunghöhe fast ganz der Geschwindigkeitshöhe des ausströmenden Wassers gleich gesetzt werden kann. Bezeichnet daher (in diesem Falle) s die Steighöhe (Sprunghöhe) des Strahles und h die theoretische Druck- oder Geschwindigkeitshöhe, so hat man:

$$s = \frac{h}{1 + \eta},$$

sobald η den Widerstandscoefficienten des Mundstückes bezeichnet.

2) Die Steighöhe s wächst nicht in einem Verhältnisse mit der Druck- oder theoretischen Geschwindigkeitshöhe h; es läßt sich jedoch innerhalb gewisser Grenzen, namentlich wenn h nicht sehr groß ist, annähernd setzen:

$$s = \frac{h}{\alpha + \beta h + \gamma h^2},$$

wobei α, β und γ für jede Mündung besonders bestimmte Erfahrungszahlen sind.

3) Bei gleicher Druckhöhe wächst die Steighöhe mit der Dicke des Strahles oder der Weite der Mündung. Der Widerstand der Luft ist bei dicken Strahlen kleiner als bei dünnen; große Steighöhen erfordern daher nicht allein eine große Druckhöhe, sondern auch eine große Strahldicke.

4) Unter übrigens gleichen Verhältnissen springen die Wasserstrahlen mit kreisförmigem Querschnitte höher, als die aus quadratischen oder anders geformten Mündungen aufsteigenden Wasserstrahlen.

Die Mundstücke, aus welchen bei den Weisbach'schen Versuchen[2]) die springenden Strahlen aufstiegen, lassen nachstehende

---

[1]) Diese Versuche wurden im Jahre 1856 (für größere Druckhöhen) im Hofraum des ehemaligen Amalgamirwerkes zu Halsbrücke, und 1859 (bei kleineren Druckhöhen) im Hofe des Bergacademiegebäudes in Freiberg, bei ganz ruhigem Wetter ausgeführt. Ausführlich berichtet hierüber eine von Weisbach selbst geschriebene Abhandlung im 5. Bande (Jahrg. 1861), S. 113 der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

[2]) Die betreffenden Versuchsapparate sind in unserer Quelle ausführlich beschrieben und der Apparat für kleine Sprunghöhen in schöner Abbildung dargestellt.

Fig. 189a.

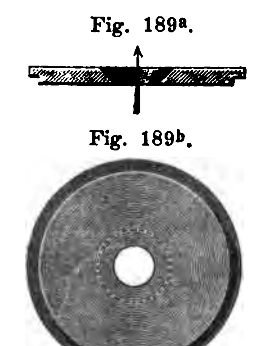


Fig. 189b.

(in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Größe dargestellten) Abbildungen, Fig. 189a bis mit Fig. 189i, erkennen.

Von kreisförmigen Mündungen in dünner Wand, wie Fig. 189a und 189b, kamen 5 Stück in Anwendung und zwar für Mündungsdurchmesser = δ von 4, 7, 10, 14 und 25,5 Millimeter Durchmesser.

Wie sich aus diesen Versuchen die Werthe der Coefficienten α, β und γ ergaben, erkennt man aus nachstehenden Gleichungen, indem Weisbach für die Hauptformel fand:

Bei der Kreismündung in dünner Wand, wenn

$$\delta = 7^{mm},1:\ s = \frac{h}{1 + 0{,}010348\,h + 0{,}0011851\,h^2};$$

$$\delta = 10^{mm}:\ s = \frac{h}{1 + 0{,}011578\,h + 0{,}00058185\,h^2};$$

$$\delta = 14^{mm},1:\ s = \frac{h}{1 + 0{,}007782\,h + 0{,}00060377\,h^2}.$$

Tabelle I. [1])

Resultate der Rechnungen mittelst der aufgestellten Formeln.

Kreismündung in dünner Wand von 10^{mm} Durchmesser				Kreismündung in dünner Wand von $14{,}1^{mm}$ Durchmesser		
Druckhöhe = h in Metern	Steighöhe = s in Metern	Verhältniß $\frac{h}{s}$	Verhältniß $\frac{s}{h}$	Steighöhe = s in Metern	Verhältniß $\frac{h}{s}$	Verhältniß $\frac{s}{h}$
1	0,99	1,012	0,988	0,99	1,008	0,992
2	1,95	1,025	0,976	1,96	1,018	0,982
3	2,89	1,040	0,962	2,92	1,029	0,972
4	3,79	1,056	0,947	3,84	1,041	0,961
6	5,50	1,090	0,917	5,62	1,068	0,936
8	7,08	1,130	0,885	7,26	1,101	0,908
10	8,53	1,173	0,853	8,79	1,138	0,879
12	9,82	1,223	0,818	10,16	1,180	0,847
14	10,98	1,276	0,784	11,41	1,227	0,815
16	12,00	1,334	0,750	12,51	1,279	0,782
18	12,88	1,397	0,716	13,48	1,336	0,749
20	13,66	1,464	0,683	14,32	1,397	0,716
21	14,00	1,500	0,667			
22	14,32	1,536	0,651			
23	14,63	1,573	0,636			
24	14,88	1,612	0,620			

[1]) In nachstehenden Tabellen, deren Zahlenwerthe genau den Weisbach'schen Angaben entsprechen, erhält man sowohl für $\frac{h}{s}$ als $\frac{s}{h}$, beim Nachrechnen, nicht überall (genau) die vom Experimentator verzeichneten Resultate.

Tabelle II.

zur Beurtheilung der Uebereinstimmung von Beobachtung mit Rechnung.

Mündung von 10^{mm} Durchmesser				Mündung von $14,1^{mm}$ Durchmesser			
h Meter	s Meter	$\frac{h}{s}$ beobachtet	$\frac{h}{s}$ berechnet	h Meter	s Meter	$\frac{h}{s}$ beobachtet	$\frac{h}{s}$ berechnet
1,8828	1,8577	1,013	1,024	0,9162	0,9060	1,011	1,009
2,5721	2,5175	1,021	1,034	1,7110	1,6870	1,014	1,017
4,210	3,936	1,070	1,059	2,6967	2,6518	1,017	1,029
5,975	5,456	1,095	1,090	5,384	5,089	1,058	1,059
7,891	7,011	1,131	1,128	7,333	6,673	1,099	1,090
12,440	10,061	1,236	1,234	9,275	8,372	1,108	1,124
15,834	11,885	1,332	1,329	15,113	11,883	1,272	1,256
21,769	14,297	1,523	1,528	17,925	13,444	1,338	1,333

Fig. 189c.

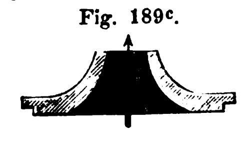
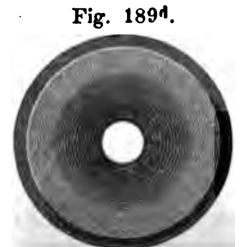


Fig. 189d.



Ferner wurden zu den Versuchen verwendet ein kurzes conoidisches Mundstück, Fig. 189c und 189d, von 10 Millimeter Weite in der Ausmündung. Für diesen Fall ergab sich:

$$s = \frac{h}{1,0272 + 0,000476\, h + 0,00095614\, h^2}.$$

Zu entsprechenden Beurtheilungen und Vergleichen dienen hier die folgenden Tabellen III und IV:

Tabelle III.

Rechnungsresultate. Conoidisches Mundstück von 10^{mm} Mündungsweite.

Druckhöhe $= h$ in Metern	Steighöhe $= s$ in Metern	Verhältniß $\frac{h}{s}$	Verhältniß $\frac{s}{h}$	Druckhöhe $= h$ in Metern	Steighöhe $= s$ in Metern	Verhältniß $\frac{h}{s}$	Verhältniß $\frac{s}{h}$
1	0,97	1,029	0,972	10	8,87	1,128	0,887
2	1,94	1,032	0,969	12	10,26	1,170	0,855
3	2,89	1,037	0,964	14	11,47	1,221	0,819
4	3,83	1,044	0,958	16	12,50	1,280	0,781
6	5,64	1,064	0,940	18	13,39	1,345	0,744
8	7,33	1,092	0,916	20	14,10	1,419	0,705

Tabelle IV.
Vergleich von Beobachtung mit Rechnung. Conoidisches Mundstück von 10mm Mündungsweite.

h Meter	s Meter	$\frac{h}{s}$ beobachtet	$\frac{h}{s}$ berechnet	h Meter	s Meter	$\frac{h}{s}$ beobachtet	$\frac{h}{s}$ berechnet
1,1929	1,1654	1,023	1,029	8,064	7,434	1,085	1,093
2,1911	2,1315	1,028	1,033	13,852	11,382	1,217	1,217
5,389	5,100	1,057	1,058	17,776	13,281	1,338	1,338

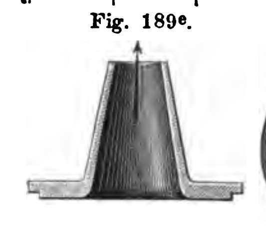


Fig. 189e. Fig. 189f.

Weiter fanden folgende Mundstücke Verwendung:

a. **Eine kurze conische Ansatzröhre** mit innerer Abrundung, wie Fig. 189e und 189f, von 40 Millimeter Länge und 10 Millimeter Weite in der Ausmündung.

Für diesen Fall wurde erhalten:

$$s = \frac{h}{1,0162 + 0,007107\,h + 0,000406\,h^2}.$$

Auch hier dienen die nachstehenden Tabellen V und VI zu geeigneten Beurtheilungen und Vergleichen.

Tabelle V.
Rechnungsresultate.

Druckhöhe $= h$ in Metern	Steighöhe $= s$ in Metern	Verhältniß $\frac{h}{s}$	Verhältniß $\frac{s}{h}$	Druckhöhe $= h$ in Metern	Steighöhe $= s$ in Metern	Verhältniß $\frac{h}{s}$	Verhältniß $\frac{s}{h}$
1	0,98	1,024	0,977	15	12,36	1,214	0,824
3	2,88	1,041	0,961	18	14,11	1,276	0,784
6	5,59	1,073	0,932	20	15,14	1,321	0,757
9	8,08	1,113	0,898	22	16,06	1,369	0,730
12	10,34	1,160	0,862	24	16,90	1,421	0,704

Tabelle VI.
Vergleich von Beobachtung mit Rechnung.

Druckhöhe $= h$ in Met.	Steighöhe $= s$ in Met.	$\frac{h}{s}$ beobachtet	$\frac{h}{s}$ berechnet	Druckhöhe $= h$ in Met.	Steighöhe $= s$ in Met.	$\frac{h}{s}$ beobachtet	$\frac{h}{s}$ berechnet
1,2864	1,2570	1,023	1,027	8,895	8,030	1,107	1,112
2,4698	2,4176	1,022	1,036	12,793	10,795	1,185	1,174
4,543	4,330	1,049	1,057	15,509	12,451	1,246	1,224
6,138	5,704	1,076	1,075	20,519	15,653	1,311	1,333



Fig. 189g.

b. Das längere düsenförmige Mundstück, Fig. 189g und Fig. 189i, von 10 Millimeter Mündungsweite, 145 Millimeter Länge und $5\frac{3}{4}$ Grad Seitenconvergenz.

Für diesen Fall ergab sich:

$$s = \frac{h}{1,0453 + 0,000373\,h + 0,000859\,h^2}.$$

Zur Beurtheilung und zum Vergleiche dienen hier die Tabellen VII und VIII.



Fig. 189i.

Tabelle VII.

Rechnungsresultate.

Druckhöhe $= h$ in Metern	Steighöhe $= s$ in Metern	Verhältniß $\frac{h}{s}$	Verhältniß $\frac{s}{h}$	Druckhöhe $= h$ in Metern	Steighöhe $= s$ in Metern	Verhältniß $\frac{h}{s}$	Verhältniß $\frac{s}{h}$
1	0,96	1,047	0,955	12	10,24	1,173	0,853
3	2,85	1,054	0,949	14	11,48	1,219	0,820
5	4,68	1,068	0,936	16	12,59	1,271	0,787
7	6,43	1,089	0,918	18	13,54	1,330	0,752
9	8,05	1,118	0,894	20	14,32	1,396	0,716

Tabelle VIII.

Vergleich von Beobachtung mit Rechnung.

Druckhöhe $= h$ in Met.	Steighöhe $= s$ in Met.	$\frac{h}{s}$ beobachtet	$\frac{h}{s}$ berechnet	Druckhöhe $= h$ in Met.	Steighöhe $= s$ in Met.	$\frac{h}{s}$ beobachtet	$\frac{h}{s}$ berechnet
0,5065	0,4781	1,060	1,045	8,466	7,660	1,105	1,109
1,3097	1,2490	1,049	1,047	10,575	9,200	1,149	1,145
2,3571	2,2775	1,035	1,051	14,058	11,516	1,221	1,220
4,650	4,357	1,067	1,066	18,075	13,573	1,332	1,333

Fig. 189h.



c. Das vorige düsenförmige Mundstück um 40 Millimeter abgekürzt, so daß das Mundstück, Fig. 189h, von 14,1mm Mündungsweite zurückblieb.

Hier ergab sich:

$$s = \frac{h}{1{,}0216 + 0{,}002393h + 0{,}00032676h^2}.$$

Zur Beurtheilung und zum Vergleiche dienen hier die folgenden Tabellen IX und X.

Tabelle IX.
Rechnungsresultate.

Druckhöhe = h in Metern	Steighöhe = s in Metern	Verhältniß $\frac{h}{s}$	Verhältniß $\frac{s}{h}$	Druckhöhe = h in Metern	Steighöhe = s in Metern	Verhältniß $\frac{h}{s}$	Verhältniß $\frac{s}{h}$
1	0,980	1,024	0,977	10	9,280	1,078	0,928
3	2,910	1,032	0,969	12	10,930	1,097	0,911
5	4,800	1,042	0,960	14	12,520	1,119	0,894
7	6,640	1,054	0,949	16	13,980	1,144	0,874

Tabelle X.
Vergleich von Beobachtung mit Rechnung.

Druckhöhe = h in Met.	Steighöhe = s in Met.	$\frac{h}{s}$ beobachtet	$\frac{h}{s}$ berechnet	Druckhöhe = h in Met.	Steighöhe = s in Met.	$\frac{h}{s}$ beobachtet	$\frac{h}{s}$ berechnet
0,5200	0,5096	1,020	1,023	7,591	7,198	1,054	1,059
1,4340	1,4079	1,019	1,026	9,809	9,163	1,070	1,077
2,1704	2,0919	1,038	1,028	11,309	10,444	1,083	1,090
4,4980	4,2770	1,051	1,039	13,542	12,068	1,122	1,114

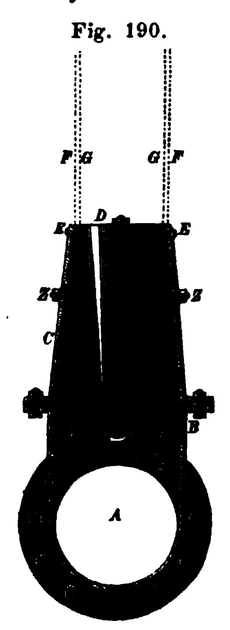
Vorstehende Auszüge aus der Weisbach'schen sehr ausführlichen Arbeit müssen genügen, um deren Werth zu bemessen. Der wackere Experimentator hebt selbst ausdrücklich hervor, daß für größere Druckhöhen (als 25 Meter) und für Mündungsweiten über $2\frac{1}{2}$ Centimeter, durchaus noch Versuche erforderlich sind.

Von beachtenswerthen Bemühungen um die mathematische

Theorie der springenden Wasserstrahlen verdienen besonders notirt zu werden: Scheffler (Oberbaurath in Braunschweig) im Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Jahrg. 1862, S. 143, unter der Ueberschrift: „Die Berechnung der Fontaine zu Herrenhausen bei Hannover", und Grashof in seiner theoretischen Maschinenlehre, Bd. 1, S. 821, unter der Ueberschrift: „Versuch einer theoretischen Entwickelung". In letzterer Quelle wird die Sache mit folgenden Worten eingeleitet, die bei der hohen Bedeutung dieses Schriftstellers im Gebiete der rationellen Mechanik von besonderem Werthe sind:

„Die Steighöhe eines springenden Wasserstrahles wird offenbar durch so mannigfache und complicirte Einflüsse bedingt, daß eine im befriedigten Maaße zutreffende Analyse und mathematische Formulirung kaum zu gewärtigen ist".

Fig. 190.



Anmerkung. Bei hohlen Strahlen, wie z. B. an der großen Fontaine zu Herrenhausen, sind alle vorbemerkten Regeln zur Bestimmung von S aus Z unbrauchbar, wie sich der Verfasser durch in Herrenhausen angestellte Versuche überzeugte.

Um anderweite betreffende Mittheilungen hierüber zu machen, zeigen die Figuren 190 bis mit 192 die Sprungöffnung des Herrenhausener großen Strahles, wobei A das 16 Zoll (hannov.) oder 388 Millimeter weite Zuführrohr und B ein cylindrischer Aufsatz ist, auf welchen man den Hohlkegel CE geschraubt hat. Im Innern des Hohlkegels befindet sich in umgekehrter Lage ein zweiter massiver Kegel D, welcher auf Stegen Y ruht und durch die Schrauben Z justirt werden kann.

Der äußere Durchmesser EE der Mündung mißt 11 Zoll (hannov.) oder 267,63 Millimeter, der innere $10\frac{5}{8}$ Zoll oder 258,51 Millimeter, so daß die Wanddicke FG des Hohlstrahles nur $\frac{3}{16}$ Zoll oder 4,56 Millimeter beträgt.

Sorgfältige, vom Verfasser bei ruhigem Wetter angestellte Versuche und gleichzeitige Messungen der Strahlhöhe lieferten folgende Resultate:

Druck in Atmosphären nahe der Mündung (über dem äußern Luftdrucke)	Druckhöhe an der Mündung $= Z$ in Fußen (hannov.)	Sprunghöhe $= S$ in Fußen (hannoversch)	$\frac{S}{Z}$
$3\frac{1}{2}$	123,65	102,75	0,83
$3\frac{1}{4}$	114,90	99,40	0,86

Die Werthe der ersten Verticalreihe wurden mit Hülfe sogenannter

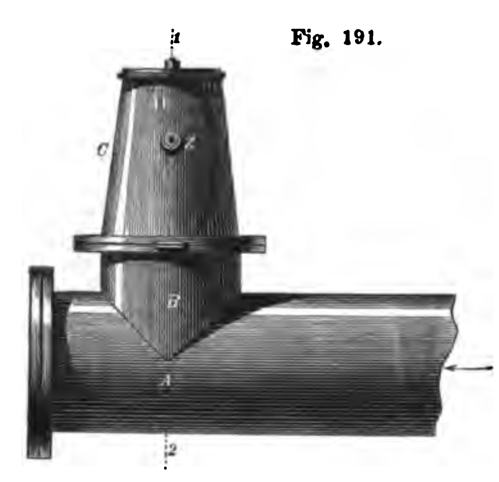


Fig. 191.

Etalon-Manometer von Bourdon in Paris, die man so nahe wie möglich an der Sprungöffnung anbrachte, ermittelt.

Da zur Zeit der Versuche, eines Umbaues wegen, es wünschenswerth wurde, die Wassermenge des Strahles möglichst genau zu kennen (wenigstens genauer, als dies durch die Dimensionen und Hubzahlen der vorhandenen 40 Pumpen an der sogenannten Wasserkunst[1]) möglich war), so wurde der betreffende Ausflußcoefficient μ ermittelt und zu $\mu = 0{,}96$ gefunden[2]).

Die betreffende Rechnung geschah mittelst zwei verschiedener Formeln. Einmal wählte man nach V, §. 163:

$$Q = 20 \sqrt{\frac{hd^5}{l + 33 \frac{d^5}{\mu^2 \delta^4}}}$$

[1]) Die betreffenden Versuche (man sehe auch §. 167, S. 530) wurden am 4. November 1858 angestellt. Der vollständige Neubau des Pumpwerkes (wobei ihm die gegenwärtige Gestalt und Anordnung ertheilt wurde, u. a. 4 große doppelwirkende Pumpen, statt der früheren 40 einfach wirkenden) begann im Jahre 1860. Ausführlich hierüber berichtet der betreffende Maschineningenieur, Herr Baurath Hagen, in der Zeitschr. des Hannov. Archit.- und Ingenieur-Vereins, Jahrg. 1864, S. 423. Auszugsweise mit Abbildungen begleitet in des Verfassers Allgemeiner Maschinenlehre, Bd IV, S. 718.



Fig. 192.

[2]) Man bediente sich hierzu eines Ausflußapparates nach Herrn Bergrath Weisbach, welchen derselbe für die hiesige technische Hochschule anfertigen zu lassen die Güte gehabt hatte. Dabei war der Formel I, §. 87, nämlich $\mu = \frac{2A(\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{a \cdot t \cdot \sqrt{2g}}$ entsprechend:

$A = 80089\,\square^{mm}$, $a = 18\,\square^{mm},064$, $h = 811^{mm}$, $h_1 = 697^{mm}$, $\sqrt{2g} = 140^{mm},06$, $\sqrt{h} - \sqrt{h_1} = 2{,}076$, und daher: $\mu = \frac{131{,}43}{t}$, wonach folgende kleine Tabelle berechnet wurde:

t	135 Sec.	137	137	138	137
μ	0,973	0,959	0,959	0,952	0,959.

und fand, da $h = 3{,}5 \times 10{,}336 = 36^m{,}176$
$l = 25^m{,}5$
$d = 0{,}4130$ (berechnet, da zwei Röhren von je $0^m{,}292$ Durchmesser das Wasser zuführten)
$\delta = 0^m{,}06928$

$$Q = 20 \sqrt{\frac{36{,}176 \,.\, (0{,}4130)^5}{18698{,}9}} = 0{,}09643 \text{ Cubikmeter.}$$

Ein zweites Mal rechnete man mit Zuziehung der Prony'schen Formel, §. 161, S. 499, unter Einführung der von Weisbach berechneten Coefficienten, und beachtete dabei die Richtungsveränderung (neunzig Grad) nahe der Mündung bei AB, Fig. 191, setzte, wenn c die Mündungsgeschwindigkeit bezeichnet:

$$\frac{M}{2}\left(\frac{c^2}{\mu^2} - v^2\right) + \tfrac{1}{2} Mv^2 = gMh - \frac{Mlp}{a}(\alpha v + \beta v^2)$$

$$\frac{c^2}{\mu^2 \,.\, 2g} = h - \frac{l}{d}(Av + Bv^2) \text{ oder wegen } c = \frac{2vd^2}{\mu\delta^2}\ ^{1)}$$

$$\frac{4v^2d^4}{\mu^4 \,.\, 2g \,.\, \delta^4} = h - \frac{l}{d}(Av + Bv^2), \text{ d. i.}$$

$$\frac{4d^4}{\mu^4 \,.\, 2g\delta^4} \,.\, v^2 = h - \frac{l}{d}(0{,}00022915 \,.\, v - 0{,}00092627 \,.\, v^2) \text{ Metermaaß.}$$

Da nun: $h = 3\frac{1}{2} \times 10{,}336 = 36^m{,}176$, $l = 25^m{,}50$, $\mu = \psi = 0{,}96$, $d = 0^m{,}292$ und $\delta = 0^m{,}06928$, $2g = 19^m{,}617$ ist, so folgt:

$$75{,}75 \,.\, v^2 = 36{,}176 - 87{,}32\,(0{,}00022915 \,.\, v + 0{,}00092627 \,.\, v^2)$$

$$75{,}75 \,.\, v^2 = 36{,}176 - 0{,}02 \,.\, v - 0{,}081 \,.\, v^2$$

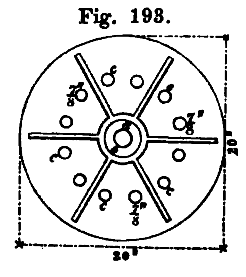
$$v^2 + 0{,}000264 \,.\, v = 0{,}477.$$

$$v = 0^m{,}69.$$

Daher die Wassermenge $= Q$ pro Secunde:

$$Q = 2 \,.\, \frac{d^2\pi}{4} \,.\, v = 2 \,.\, 0{,}067 \,.\, 0{,}69 = 0{,}09246 \text{ Cubikmeter}^{2)}.$$

Fig. 193.



Schließlich noch folgende nicht unwichtige Bemerkung. Auch bei der Herrenhausener großen Fontaine hat man es als einen Uebelstand bemerkt, daß hohle Strahlen, wegen des sich im Innern bildenden luftverdünnten Raumes, unangenehme Zusammenziehungen und Störungen der Bewegung hervorbringen. Diesem Uebel wird man jedoch anders abzuhelfen suchen müssen, wie dies bei dem berühmten Casseler Strahle und bei der Sanssouci-Fontaine[3]) bei Potsdam geschehen ist.

[1]) d bezeichnet hier den Durchmesser ($= 0^m{,}292$) einer der beiden Leitungsröhren.

[2]) Dieser Werth ist ein wenig kleiner als der vorher und bereits S. 530 aus beobachteten Piezometerständen berechnete. Die ersten beiden (fast ganz gleichen) Werthe sind die richtigeren.

[3]) Der Fontainenbau in Sanssouci. Erbkam, Zeitschrift für Bauwesen, II. Jahrg. (1852), S. 372 und S. 460.

Die Mündung des Strahles der Casseler Hauptfontaine ist im Grundriß, Fig. 193, abgebildet und hat dabei die Mündung des mittleren vollen Strahles $ab = 1\frac{11}{16}$ Zoll (preuß.) Durchmesser, während jede der zwölf Seitenstrahlen $\frac{7}{8}$ Zoll Durchmesser besitzt[1]).

§. 176.

Geneigte Strahlen.

Zur Beurtheilung gegen den Horizont geneigter Strahlen kann man, unter der Voraussetzung, daß die Bahn sowohl für den aufsteigenden, wie absteigenden Ast eine gemeine Parabel ist[2]), von den Sätzen über Wurfbewegung im luftleeren Raume eine nützliche Anwendung machen.

Bezeichnet daher c die Anfangsgeschwindigkeit und α den Neigungswinkel des Achsenwasserfadens gegen den Horizont, so erhält man als Beziehung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y:

$$y = x.. \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha^2}, \text{ oder}$$

wenn man $c = \psi \sqrt{2gS}$, also $\frac{g}{c^2} = \frac{1}{2 \cdot \psi^2 \cdot S}$ einführt:

$$(1) \quad y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{4\psi^2 \cdot S \cdot \cos \alpha^2}.$$

Für die Culminationshöhe $= e$ erhält man daher:

$$(2) \quad e = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha^2}{2g} = \psi^2 \cdot S \sin \alpha^2,$$

so wie für die Sprungweite $= w$:

$$(3) \quad w = \frac{c^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = 4 \cdot \psi^2 \cdot S \sin \alpha \cos \alpha.$$

Endlich folgt aus der Division von (3) in (2):

$$(4) \quad \frac{e}{w} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

In practischen Fällen erhält man in der Regel ein gewisses Wasserquantum, was unter gegebenem Drucke auf vorgeschriebene Höhe und Weite getrieben werden soll und wozu Neigungswinkel, Art und Durchmesser der Mündung zu bestimmen sind. Hierzu sind aber auch vorstehende Formeln völlig ausreichend.

Interessante, nützliche Versuchsresultate Weisbach's über sogenannte Strahlenbüschel bei Fontainen finden sich mitgetheilt im XIII. Jahrgang der Zeitschrift „Civilingenieur", so wie auch in der 5. Auflage, Bd. 1, S. 120, §. 42 der „Ingenieur-Mechanik" desselben Autors.

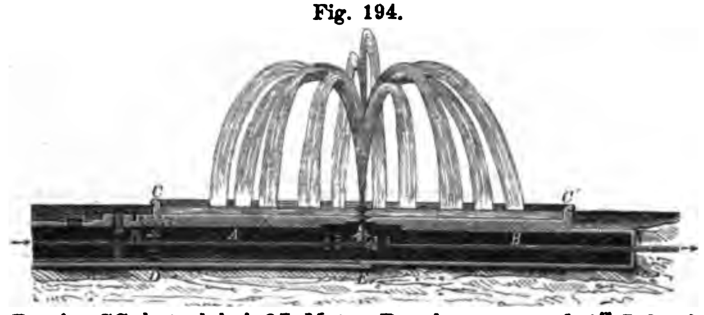
---

[1]) Näheres über die Casseler Fontaine findet sich in des Verfassers Allgem. Maschinenlehre, Bd. 4, S. 717 (Note).

[2]) Bei den hier vorkommenden geringen Anfangsgeschwindigkeiten ist diese Voraussetzung, für den fraglichen Zweck, als genau zutreffend für den aufsteigenden Ast und als hinlänglich annähernd für den absteigenden Ast zu betrachten.

Anmerkung. Eine Aufgabe letzterer Art ist in folgendem Beispiele gelöst, worauf sich auch unsere Figuren 194 bis mit 197 beziehen, welche die Fontainenanlage auf dem Petersplatze zu Dijon darstellen [1]).

Fig. 194.



Das Bassin *CC* hat dabei 27 Meter Durchmesser und $0^m,7$ Tiefe, der Röhrenstrang *A*, welcher das Speisewasser zuführt, ist $0^m,19$ weit und verzweigt sich über *E* in drei Aeste, wovon der eine den im Rohre *m* aufsteigenden Mittelstrahl *aa*, Fig. 195, speist, der andere im Rohre *n* das Wasser zu den größeren und kleineren Seitenstrahlen liefert und dabei den ringförmigen Raum *p* füllt, eine Anordnung, wodurch der Centralstrahl von den Seitenstrahlen ganz unabhängig wird. Ein drittes Rohr *B* kann die Wässer zu anderen Zwecken weiter führen, wenn die Strahlen bei *E* nicht springen, so wie ferner über *D* ein Abfallrohr für das Bassin *C* angeordnet ist, und endlich links von *E* sich Stellschieber vorfinden, um das aufzuwerfende Wasserquantum und den Effect der Strahlen verändern zu können.

Der Mittelstrahl ist in dünner Wand angebracht, für die Seitenstrahlen sind dagegen conisch convergente Ansätze *rr*, Fig. 197, vorhanden, welche in Oeffnungen *b*, *b* und *c*, *c* der gekrümmten Decke *kk*, Fig. 196, geschraubt werden können.

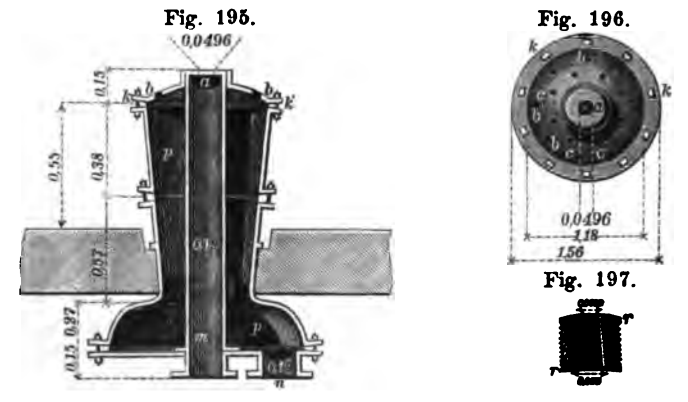


Fig. 195. Fig. 196. Fig. 197.

Beispiel. Es ist die Anordnung zu einer Fontainenanlage, wie Fig. 194 bis 197, unter folgenden gegebenen Bedingungen zu treffen.

---

[1]) Darcy: Fontaines publiques, Planche 19.

Nach Abzug aller passiven Widerstände steht unmittelbar vor der Mündung eine Druckhöhe von 11 Meter zu Gebote, während die zur Disposition stehende Wassermenge von 0,017742 Cubikmeter pro Secunde in folgender Weise vertheilt werden soll.

Für den Mittelstrahl *aa* den zehnten Theil	0^{cbm},0017742
„ 8 Seitenstrahlen *bb* des ersten Ranges die Hälfte	0,0088710
„ 8 Seitenstrahlen *cc* des zweiten Ranges vier Zehntheile	0,0070968
	0,0177420

Ferner ist vorgeschrieben, daß sich die Seitenstrahlen des ersten Ranges auf 9 Meter Höhe erheben und 8^m,5 Sprungweite annehmen, die des zweiten Ranges sich aber auf 8 Meter Höhe und 9^m,5 Sprungweite erstrecken.

Auflösung. Für den Durchmesser d des Mittelstrahles in der dünnen Wand (Ausflußcoefficient $\mu = 0,62$), erhält man ohne Weiteres, wenn $0,0017742 = q$ und $11,0 = h$ gesetzt wird:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot q}{\mu \cdot \pi \cdot \sqrt{2gh}}}, \text{ d. i.:}$$

$$d = \sqrt{\frac{0,0017742}{0,62 \cdot 0,785 \cdot 4,42 \sqrt{11}}} = 0^m,0157.$$

Im Falle, daß alles Wasser durch den Mittelstrahl ausgegossen werden soll, hat man hiernach der Mündung einen Durchmesser von $d\sqrt{10} = 0,0157 \cdot \sqrt{10} = 0^m,0496$ zu geben.

Die Richtung der Mundstückachse für die Seitenstrahlen ersten Ranges *bb* erhält man, nach (4) der vorstehenden Formeln, zu $\alpha = 76^\circ 43'$, indem

$$\text{tg} \cdot \alpha = \frac{4 \cdot e}{w} = \frac{4 \cdot 9,0}{8,5} = \text{tg} \cdot 76^\circ 43' \text{ ist.}$$

Hiernach berechnet sich aus (2) der Geschwindigkeitscoefficienten ψ zu:

$$\psi = \sqrt{\frac{e}{S \cdot \sin \cdot \alpha^2}}, \text{ d. i.}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{9}{11 \cdot (0,9732)^2}} = 0,9294.$$

Hierzu gehört, nach S. 287, der Convergenzwinkel des conisch convergenten Ansatzes $5^\circ 26'$ und der Ausflußcoefficient $\mu = 0,930$, daher sich der Durchmesser d_1 einer der Mündungen berechnet, wegen

$$d_1 = \sqrt{\frac{q_1}{\mu \cdot 0,785 \cdot 4,42 \sqrt{h_1}}} = \sqrt{\frac{q_1}{11,508 \cdot \mu}}, \text{ d. i., da } q_1 = \frac{0,0088710}{8} \text{ ist, zu}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{0,001109}{11,508 \cdot 0,930}},$$

$$d_1 = 0,01018.$$

Als Länge der Ansätze wird man 0^m,03 annehmen können.

Für die Seitenstrahlen zweiten Ranges ist:

$$tg\,.\,\alpha = \frac{4\,.\,8}{9{,}5} = tg\ 73^{0}28', \text{ daher}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{e}{S\,.\,\sin\,.\,\alpha^{2}}} = \sqrt{\frac{8}{11\,.\,(\sin 73^{0}28')^{2}}} = 0{,}889.$$

Letzterer Werth entspricht (genau genug) einem Convergenzwinkel von $3^{0}10'$ und einem Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}895$, daher erhält man für einen der Durchmesser d_2 der 8 kleineren Seitenstrahlen, weil hier $q_2 = \frac{0{,}0070968}{8} = 0{,}0008871$ ist,

$$d_2 = \sqrt{\frac{q_2}{11{,}508\,.\,\mu}} = \sqrt{\frac{0{,}0008871}{11{,}508\,.\,0{,}895}}, \text{ d. i.}$$

$$d_2 = 0^{m}{,}00928.$$

Vierter Abschnitt.

Kraft bewegten Wassers und Widerstand, welchen feste Körper erfahren, die in ruhendem Wasser bewegt werden.

§. 177.

Setzt man in Bewegung begriffenem Wasser irgend ein Hinderniß derartig entgegen, daß die Wasserelemente zu einer Ablenkung, Richtungsveränderung veranlaßt werden, oder Richtung und Geschwindigkeit zugleich eine Veränderung erfahren; so wirkt dieser Veränderung das Beharrungsvermögen der flüssigen Masse entgegen, wodurch Kräfte (Drücke) gegen das Hinderniß hervorgerufen werden, die man hydraulische Drücke, oder je nach den Verhältnissen und Umständen, unter welchen sie auftreten, Stoß des Wassers oder Reaction des Wassers zu nennen pflegt.

Bewegen sich feste Körper in ruhendem (oder bewegtem) Wasser, so sind ebenfalls Drücke zu überwinden, die man mit dem Namen Widerstand des Wassers bezeichnet und deren Gesetze, wenigstens im Allgemeinen, wesentlich nicht verschieden sind von denen des Wasserstoßes.

Erstes Capitel.

Stoß des Wassers.

§. 178.

Der Stoß des Wassers gegen feste Körper ist verschieden von dem Stoße, welcher zwischen festen Körpern unter sich stattfinden kann, weil im ersteren Falle, wenn der Beharrungszustand eingetreten ist, der passive feste Körper von den betreffenden Wassertheilchen ohne Unterbrechung gedrückt wird, während beim Stoße fester Körper unter sich, die dabei hervorgerufene Wirkung die Sache eines Augenblicks ist, nach dessen Verlauf der stoßende Körper seine ganze Bewegungsgröße abgegeben hat. Man sollte daher (richtiger) stets vom Drucke, nicht aber vom Stoße bewegten Wassers reden. Indeß folgen wir im Nachstehenden dem Sprachgebrauche, behalten die Benennung „Wasserstoß“ bei und

gedenken nur zur rechten Zeit der wahren Auffassung des Gegenstandes.

Für die Praxis ist es wichtig, bei den Untersuchungen über den Stoß des Wassers folgende Unterscheidungen festzustellen:

1. Stoß eines (isolirten) bestimmt begrenzten Wasserstrahles, dessen Querschnitte kleiner sind, als die des gestoßenen Körpers.

2. Stoß unbegrenzten Wassers, wenn die bewegte Wassermasse den gestoßenen festen Körper überall umgiebt und das Wasser zu beiden Seiten des letzteren mit gehöriger Leichtigkeit und Geschwindigkeit ausweichen kann.

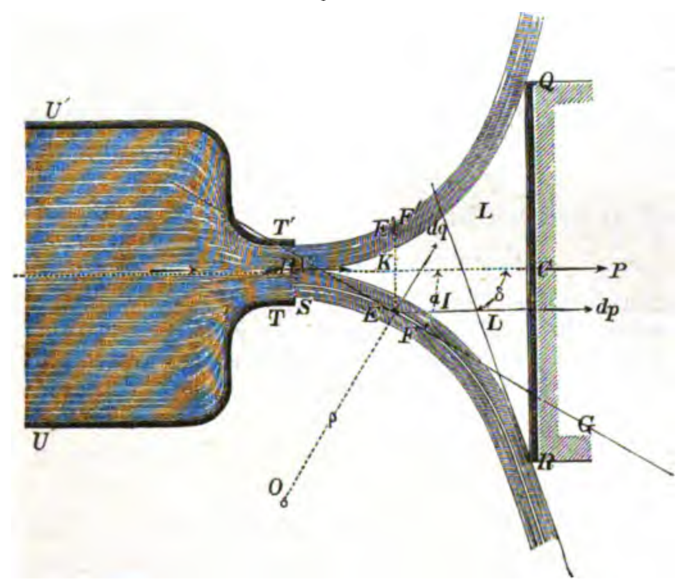
Ferner unterscheidet man noch in beiden Fällen geraden und schiefen Stoß, je nachdem die Achse des stoßenden Strahles auf der Fläche, welche getroffen wird, normal oder schiefwinkelig steht.

§. 179.

Gerader Stoß eines isolirten Wasserstrahles.

Aus einem beständig voll erhaltenen Gefäße UU', Fig. 198, fließe, nach Eintritt des Beharrungszustandes aus einer Mündung TT'

Fig. 198.



in horizontaler Richtung ein Wasserstrahl mit der Geschwindigkeit $V = \sqrt{2gH}$, dessen ursprüngliche Richtung $\overline{BC}$ ist. Durch eine feste unbewegliche Ebene QR, die rechtwinklig auf $\overline{BC}$ steht, werden die Wasserfäden von der geraden Richtung ihrer Bewegung abgelenkt und breiten sich, in Curven ausweichend, symmetrisch derartig um $\overline{BC}$ herum aus, daß alle Meridianschnitte die Form

wie Fig. 198, d. h. die eines ebenen Wasserstrahles haben, sämmtliche Schnitte aber unter einander ähnlich gleich sind. Dabei kann ferner angenommen werden, es flösse das Wasser in vielen kleinen Canälen (Wasserfäden) wie $BEFR$ von überall gleicher Weite oder Dicke mit unveränderter Geschwindigkeit fort und die bewegte Wassermasse bilde einen conoidischen Trichter, dessen innerer Raum LL anzusehen ist, als wäre er mit ruhender, im Gleichgswichte befindlicher Flüssigkeit gefüllt.

Es sei nun a der Querschnitt eines dieser Wassercanäle $= \overline{SR}$ von äußerst geringer Weite und $\overline{EF} = ds$ ein unendlich kleines Längenstück eines solchen Canales, so wie $\overline{OE} = \varrho$ der Krümmungshalbmesser eines Punktes E der betreffenden Canalachse und endlich α der Winkel, unter welchem die allgemeine Tangente $\overline{FG}$ bei E (gehörig verlängert) die ursprüngliche Strahlachse $\overline{BC}$ schneidet.

Bezeichnet dann γ die Dichte der strömenden Flüssigkeit und g die Erdacceleration, so entsteht, vermöge der erzwungenen Krümmung der Wasserfäden, eine in der Richtung des Halbmessers $\overline{OE}$ wirkende Ablenkungskraft $= dq$, die nach bekannten Sätzen der Mechanik ist:

$$dq = \frac{\gamma}{g}\, a ds \frac{V^2}{\varrho}\,.$$

Zerlegt man nun dq normal zu $\overline{BC}$ und in die Richtung dieser Geraden, so verbleibt als Druck gegen die Ebene $\overline{QR}$, die Composante $\overline{EJ} = dp$, während sich, durch die gleiche Zerlegung am diametral gegenüber liegenden Elemente $E'F'$, die Composanten $\overline{EK}$ aufheben. Es ist also

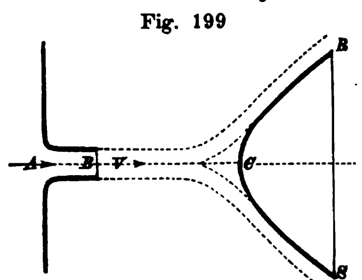
$$dp = \frac{\gamma}{g}\,.\, a ds \,.\, \frac{V^2}{\varrho}\,.\, \sin\alpha,$$

oder weil $ds = \varrho \,.\, d\alpha$ ist:

$$dp = \frac{\gamma}{g}\, a \,.\, V^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, d\alpha.$$

Genau derselbe Werth ist aber für jeden der n Wasserfäden nachzuweisen, in welche man den Strahl vom Querschnitte A zerlegt denken kann, so daß sich für den Gesammtdruck $= P$ ergiebt, welchen die Fläche $\overline{QR}$ auszuhalten hat:

Fig. 199



$$P = \frac{\gamma}{g} A V^2 \int_0^\delta d\alpha \sin\alpha, \text{ d. i.}$$

$$\text{I.}\quad P = \frac{\gamma}{g} A V^2 (1 - \cos\delta).$$

Letzterer Werth entspricht auch dem hydraulischen Drucke eines isolirten Strahles gegen ein convexes Conoid CRS, Fig. 199, von solcher Ausdehnung und Form, daß alle Wasserfäden am Umfange desselben mit der ursprünglichen Strahlrichtung $\overline{BC}$ den Winkel δ einschließen.

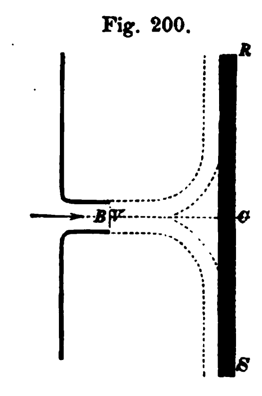


Fig. 200.

Für $\delta = 90^\circ$, d. h. wenn die Ausdehnung der Ebene $\overline{QR}$ so groß ist[1]), daß alles Wasser parallel zu derselben, wie Fig. 200 zeigt, abfließen muß, wird:

$$\text{II.} \begin{cases} P = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot V^2 = \gamma A \cdot 2\left(\frac{V^2}{2g}\right), \text{ oder} \\ P = \gamma \cdot A \cdot 2H. \end{cases}$$

Hiernach ist der hydraulische Druck, oder der Stoß eines isolirten Wasserstrahles, gegen eine ebene, unbewegliche (feste) Fläche, gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche die gedrückte Fläche zur Basis und zur Höhe die doppelte der Geschwindigkeit des fließenden Wassers entsprechende Höhe hat.

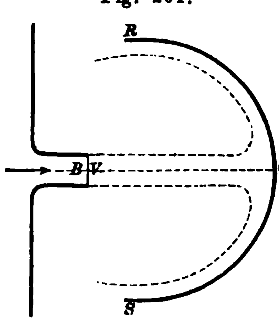


Fig. 201.

Wird das Wasser ähnlich wie Fig. 201 genöthigt, in der genau entgegengesetzten Richtung abzufließen, in welcher es ankam, so wird in I. $\delta = 180$ und daher:

$$\text{III.} \quad P = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot 2V^2 = \gamma \cdot A \cdot 4H,$$

d. h. man erhält einen doppelt so großen hydraulischen Druck wie unter II.

Führt man in I. die pro Secunde zuströmende Wassermenge $Q = AV$ ein, so folgt:

$$\text{IV.} \quad P = \frac{\gamma}{g} QV(1 - \cos\delta).$$

Bewegt sich endlich die feste Ebene $\overline{QR}$ mit der Geschwindigkeit v in derselben Richtung oder in der genau entgegengesetzten des ankommenden Wassers, so wird zur Bestimmung des entsprechenden hydraulischen Druckes nur nöthig sein, in IV. statt V die relative Geschwindigkeit $V \mp v$ einzuführen, so daß sich überhaupt ergiebt:

$$\text{V.} \quad P = \frac{\gamma}{g} Q(V \mp v)(1 - \cos\delta).$$

§. 180.

Geschichtliche Notizen.

Abgesehen von der höchst unvollkommenen Erklärung Newton's[2]) über den Stoß des Wassers isolirter Strahlen, behandelte zuerst Daniel Bernoulli 1736 in den Commentarii acad. scient. imp. Petropol.,

[1]) Nach S. 585 mindestens vierfacher Strahlquerschnitt.

[2]) Newtoni: Philosophiae naturalis principia mathematica. Propos. XXXVI. Probl. VIII, Coriol. II (erste Ausgabe 1687, zweite von 1714), enthält hierüber

T. VIII, Pag. 113 diesen Gegenstand in der diesem Hydrauliker eigenen selbstständigen und scharfsinnigen Weise, indem er die Schätzung der Kraft unternahm, die einen bewegten Körper von seiner ursprünglichen Bahn ablenkt.

Die vollständige Auflösung giebt Bernoulli, §. 12 a. a. O. (zweiter Theil), woselbst er zu der Formel gelangt:

$$P = \frac{\gamma A}{g} \cdot V^2 \left(1 - \cos\delta \cdot \sqrt{\frac{h}{H}}\right).$$

Hierin bezeichnen H und h Geschwindigkeitshöhen, erstere die von V, letztere die, welche der Geschwindigkeit an der Stelle entspricht, wo der Tangentenwinkel der durch die Ablenkung gebildeten Curve mit der ursprünglichen Strahlachse der Größte $= \delta$ und wobei selbstverständlich $h < H$ ist.

Für $H = h$ ergeben sich unsere vorher abgeleiteten Formeln[1]).

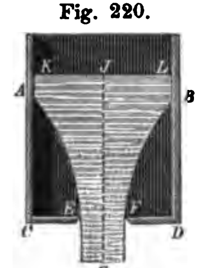
Mit noch mehr Klarheit entwickelte dieselbe Gleichung 1745 Leonhard Euler in seiner Uebersetzung von Robin's „Grundsätze der Artillerie" (Anmerkungen, Pag. 451 und 458) aus dem Englischen, indem er dabei ebenfalls die Kraft aufsucht, welche zur Veränderung der Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit aller Theile der flüssigen Masse erforderlich ist, wenn sie nach ihrem Austritte aus einer Gefäßmündung, zur Wirkung gegen eine unveränderliche feste Ebene veranlaßt wird.

Höchst wahrscheinlich, ohne Bernoulli's und Euler's Theorien zu kennen, behandelte Lagrange die Aufgabe (Mém. de l'académie royale des sciences de Turin. Prem. Partie 1784 et 1785, Pag. 95) in ähnlicher Weise, wie oben §. 179 geschah, jedoch unter den Voraussetzungen, daß die Geschwindigkeit der Wasserelemente während ihrer ganzen Ablenkung dieselbe bleibe und die dabei gebildeten Curven Kreisbogen wären.

Nach genannten Männern haben sich mit der wissenschaftlich theoretischen Behandlung der ganzen Wasserstoß-Aufgabe insbesondere beschäftigt: Coriolis in seinem Werke: „Du Calcul sur l'effet des machines". Paris 1829, Pag. 59 (dabei Lagrange's Principien benutzend) und Navier in den „Résumé des Leçons" etc., Deuxième

---

Fig. 220.



Folgendes: „Die Kraft, wodurch die ganze Bewegung des aus ($\overline{EF}$, Fig. 202) strömenden Wassers hervorgebracht werden kann, ist gleich dem Gewichte einer cylindrischen Wassersäule, deren Basis die Oeffnung EF und deren Höhe $2 \cdot \overline{GJ}$ oder $2 \cdot \overline{CK}$ ist. Denn das heraustretende Wasser kann in der Zeit, wo es dieser Wassersäule gleich kommt, seine Ausflußgeschwindigkeit dadurch erreichen, daß sein Gewicht von der Höhe $\overline{GJ}$ herabfällt".

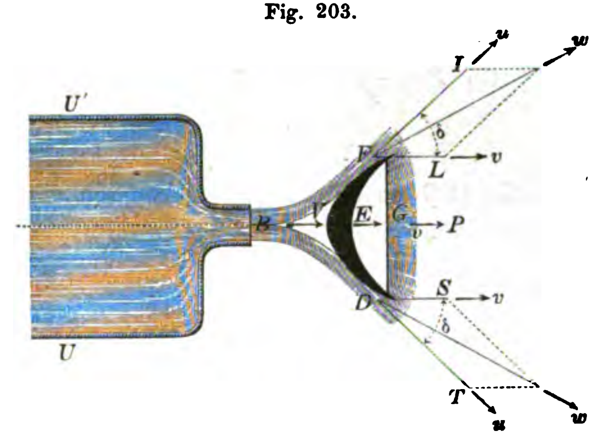
Dabei dachte sich Newton das Gefäß in den Umgebungen über der Mündung EF voll Eis, so daß das Wasser gleichsam wie durch einen Trichter $AEFB$ hindurch gehen müßte, das Eis aber noch in Ruhe verbliebe, selbst wenn es in fließendes Wasser aufgelöst sei etc.

[1]) Der Verfasser ist hier der von Euler und Lagrange gemachten Annahme gefolgt, weil es bis jetzt noch Niemand gelungen ist, das Abhängigkeitsgesetz der Größe h von der Höhe H zu entdecken.

Partie, Nr. 160, Paris 1838, indem er dabei von Bestimmung des Gesammtdruckes bewegter Flüssigkeit gegen Gefäßwände ausgeht, so wie endlich, von 1846 ab, Weisbach in seiner „Ingenieur-Mechanik" und in seinem 1855 erschienenen Buche „Die Experimental-Hydraulik", woselbst dieser, in seiner Art fruchtbare Schriftsteller und Experimentator, die Theorie des Wasserstoßes, gestützt auf das Princip von der Erhaltung der Kraft, einfach und bündig auffaßte und durchführte.

Zusatz. Die erwähnte Theorie Weisbach's[1]) nimmt auch Rücksicht auf den Reibungswiderstand, welchen das Wasser am Mantel eines Conoids (einer Rotationsfläche) *DEFG*, Fig. 203, erfährt, gegen

Fig. 203.



welches dasselbe aus einem Gefäße UU_1, mit der constanten Geschwindigkeit V in der Richtung (der geometrischen Achse) *GE* strömt. Es dürfte für manche Leser von Interesse sein, die betreffende Entwickelung kennen zu lernen, weshalb wir sie hier, in möglichster Kürze, folgen lassen.

Vorausgesetzt wird, daß das Conoid *DEFG* in der Richtung *BEG* (mit der von V zusammenfallend) ausweicht und zwar mit der Geschwindigkeit v. Ferner sei u die relative Geschwindigkeit des Wassers gegen die Conoidfläche, w die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser den Rand *DGF* des Conoids überall verläßt und zwar unter dem Ablenkungswinkel $= \delta = \angle FBE \angle JFL = \angle SDT$.

Ohne Beachtung der Reibung würde das aus der Mündung B tretende Wasser mit der relativen Geschwindigkeit $u = V - v$ am Conoidmantel hinfließen, wogegen mit Beachtung dieses Widerstandes gesetzt werden kann:

$$(1) \quad V - v = u\sqrt{1 + k} \text{ oder auch } (2) \ (V - v)^2 = u^2 + ku^2.$$

Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen liefert dann das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte die Gleichung:

$$(3) \quad \tfrac{1}{2} M (w^2 - V^2) = Pv - \tfrac{1}{2} Mku^2,$$

worin $M = \frac{\gamma A V}{g}$ und $w^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos \delta$ ist.

[1]) Die Experimental-Hydraulik. Freiberg 1855, S. 256 ff.

Demnach erhält man aus (3):

$$(4)\quad Pv = \frac{\gamma A V}{2}\left[1 - \frac{\cos\delta}{\sqrt{1+k}}\right](V - v) \text{ und folglich auch:}$$

$$(5)\quad P = \frac{\gamma A V}{g}\,[1 - n\cos\delta]\,(V - v),$$

wenn man mit Grashof $\frac{1}{\sqrt{1+k}} = n$ setzt[1]).

Für $v =$ Null folgt ferner aus (5):

$$(6)\quad P = \frac{\gamma A}{g}\,(1 - n\cos\delta)\,V^2,$$

so wie für $\delta = 90^0$:

$$(7)\quad P = \frac{\gamma A}{g}\,V^2 = 2\gamma A\left(\frac{V^2}{2g}\right).$$

§. 181.

Schiefer Stoß eines isolirten Wasserstrahles.

Es wird kaum besonderer Erwähnung bedürfen, daß die in den vorigen Paragraphen entwickelten Ausdrücke für den geraden Stoß eines isolirten Wasserstrahles hauptsächlich als practische Aushülfsmittel beim Mangel eines Besseren angesehen werden müssen, die in einigen besonderen Fällen verhältnißmäßig gut mit der Erfahrung übereinstimmen, nicht aber als mathematische Theorien, welche die betreffenden Naturgesetze unter allen Umständen darzustellen im Stande sind.

Noch schwieriger wird deshalb auch die Auflösung des Problems über die Wirkung eines Wasserstrahles, welcher ursprünglich schief gegen die Ebene gerichtet ist, die er stößt[2]). Ohne uns unter diesen Umständen auf nicht durchaus haltbare Hypothesen zu stützen, wählen wir zur Herleitung brauchbarer Ausdrücke für practische Zwecke ein ganz einfaches Verfahren (nach Langsdorf und Eytelwein).

Es sei $\overline{BD}$, Fig. 204, die unbeweglich feste Ebene, gegen welche der Wasserstrahl vom Querschnitte $= A$ in der Richtung $\overline{AC}$ trifft, wobei seine Achse mit der Ebene einen Winkel $ACB = \alpha$ bildet und die Wasserelemente sämmtlich die Geschwindigkeit V

---

[1]) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1863 (Bd. VII), S. 240 und „Theoretische Maschinenlehre", Bd. 1, S. 870 ff.

[2]) Lagrange sagt u. A. §. 9 seiner vorher citirten Arbeit, „daß die Behandlung des Problemes des schiefen Stoßes vom Standpunkte der Mathematik nur eine analytische Uebung darbieten würde, ohne Nutzen für irgend welchen Zweck der Anwendung". Langsdorf (S. 187 seiner 1794 erschienenen Hydraulik) bemerkt ebenso hierüber ganz richtig: „Alle diese großen Männer (D. Bernoulli, d'Alembert, L. Euler etc.) haben durch ihre tiefsinnigen Untersuchungen nicht sowohl die Lehre vom Stoße des Wassers, als die von Anwendung analytischer Kunstgriffe auf angenommene Hypothesen, zu einer höheren Vollkommenheit gebracht". — Aussprüche, die für den heutigen Standpunkt der Sache noch unverändert gültig sind!

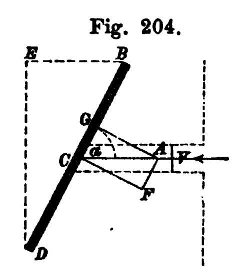


Fig. 204.

besitzen. Ferner sei P die Kraft, mit welcher das Wasser gegen eine Ebene DE wirken würde, die rechtwinklig auf der Richtung der Strahlachse AC steht.

Stellt man P durch AC dar und zerlegt normal (in CF) zur Ebene $\overline{BD}$ und (in $\overline{CG}$) in die Richtung der letzteren, so verbleibt $\overline{FC}$ als der sogenannte Normalstoß $= N$ gegen die Fläche, während $\overline{CG}$ als in der Richtung der Ebene liegend, wirkungslos gegen die letztere ist, also verloren geht. Wegen $CF = CA \,.\, \sin\alpha$ erhält man daher ohne Weiteres:

$$N = P \,.\, \sin\alpha,$$

oder, wenn für P der betreffende Werth aus II, §. 180, gesetzt wird:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} N = \dfrac{\gamma A}{g} \,.\, V^2 \,.\, \sin\alpha, \text{ oder auch} \\ N = \dfrac{\gamma}{g} Q \,.\, V \,.\, \sin\alpha. \end{cases}$$

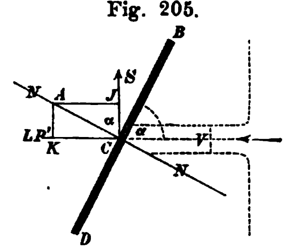


Fig. 205.

Zerlegt man ferner $N = CA$, Fig. 205, parallel (in CK) und rechtwinklig (in CJ) zur Strahlachse, so erhält man beziehungsweise den sogenannten Parallelstoß $CK = P'$ und den Seitenstoß $CJ = S$ zu:

$$\text{II.} \quad P' = N \,.\, \sin\alpha = \frac{\gamma A}{g} \,.\, V^2 \sin^2\alpha = \frac{\gamma}{g} Q \,.\, V \,.\, \sin^2\alpha,$$

$$\text{III.} \quad S = N \,.\, \cos\alpha = \frac{\gamma A}{g} V^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = \frac{\gamma Q}{g} \,.\, V \,.\, \sin\alpha \cos\alpha.$$

Für den relativen Stoß, wenn sich die Ebene mit der Geschwindigkeit v in der Richtung von V oder genau entgegengesetzt derselben bewegt, folgt sodann:

$$\text{IV.} \quad N = \frac{\gamma Q}{g} (V \mp v) \sin\alpha;$$

$$\text{V.} \quad P' = \frac{\gamma Q}{g} (V \mp v) \sin^2\alpha;$$

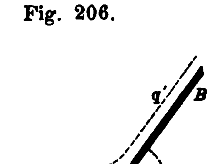
$$\text{VI.} \quad S = \frac{\gamma Q}{g} (V \mp v) \sin\alpha \,.\, \cos\alpha.$$

Zusatz. In neuerer Zeit leitet man (ursprünglich nach den Vorgängen Navier's und Duchemin's)[1]) den schiefen Stoß eines isolirten Strahles gegen eine feste Ebene dadurch ab, daß man annimmt, der Wasserstrahl theile sich auf der Ebene in zwei oder vier Theile,

---

[1]) Experimental-Untersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten, deutsch von Schnuse. Braunschweig 1844, §. 52 etc.

Fig. 206.



und werde auch so genöthigt, abzufließen. Um wenigstens für den ersten dieser Fälle den betreffenden Rechnungsgang kennen zu lernen, nehmen wir an, daß sich die ganze zum Stoße gelangende Wassermenge Q in zwei Theile q und q' theilt, die nach zwei entgegengesetzten Richtungen abzufließen gezwungen sind, die mit der Ebene BD beziehungsweise die Winkel α und $180 - \alpha$ einschließen.

Für den Parallelstoß P' erhält man sodann, nach dem Vorhergehenden:

$$(1) \quad P' = \frac{\gamma q}{g}(V \pm v)(1 - \cos\alpha) + \frac{\gamma q'}{g}(V \pm v)(1 + \cos\alpha).$$

Weiter nimmt man an, daß das Gleichgewicht der beiden Strahltheile fordert:

$$q\,(V \pm v)(1 - \cos\alpha) = q'\,(V \pm v)(1 + \cos\alpha),$$

woraus wegen $Q = q + q_1$ folgt:

$$q = \frac{Q}{2}(1 + \cos\alpha) \text{ und } q' = \frac{Q}{2}(1 - \cos\alpha)$$

und deshalb aus (1) wird, wenn man daselbst q und q' eliminirt:

$$P' = \frac{\gamma Q}{g}(V \pm v)(1 - \cos^2\alpha) = \frac{\gamma Q}{g}(V \pm v)\sin^2\alpha.$$

Betrachtet man nun wieder, wie vorher Fig. 205, den Normalstoß N als die Resultante aus dem Parallelstoße P' und dem Seitenstoße S, so folgt abermals

$$N = \frac{P'}{\sin\alpha} = \frac{\gamma Q}{g}\,.\,V\,.\,\sin\alpha \text{ und}$$

$$S = P'\,.\,\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\gamma Q}{g}\,.\,V\,.\,\sin\alpha\,.\,\cos\alpha.$$

Anmerkung. Für den Fall, daß der flüssige Strahl Freiheit hat, sich nach allen Seiten über die feste Ebene zu verbreiten und abzufließen, findet

Duchemin[1]): $N = \frac{\gamma}{g} Q (V \pm v) \frac{2\,.\sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha}$ (d. h. für den Normalstoß),

Weisbach[2]): $P' = \frac{\gamma}{g} Q (V \pm v) \frac{2 \sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha}$ (d. h. für den Parallelstoß),

Scheffler[3]): $N = \frac{\gamma}{g} Q (V \pm v) \sin\alpha$ und

$$P' = \frac{\gamma}{g} Q (V \pm v) \sin^2\alpha.$$

Die Nichtübereinstimmung dieser Werthe ist nur eine Bestätigung

---

[1]) Experimental-Untersuchungen, S. 62.

[2]) Ingenieur-Mechanik, 3. Auflage, Bd. 1, S. 179.

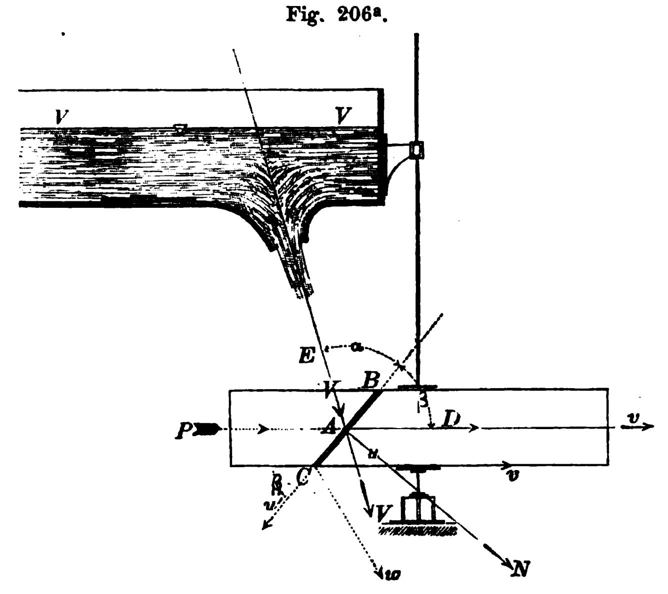
[3]) Principien etc. der Hydraulik, 2. Band, S. 125.

unserer früheren Bemerkungen über den gegenwärtigen Standpunkt der Theorie des Wasserstoßes.

Zusatz. Ein interessantes, beachtenswerthes Beispiel für den Stoß isolirter Wasserstrahlen bietet die Theorie und Bestimmung des Güteverhältnisses (des Wirkungsgrades) sogenannter Stoßturbinen, d. h. solcher horizontaler Wasserräder dar, wobei das Wasser ausschließlich durch Stoß wirkt und die sich unter Anderen in dem unten notirten Werke [1]) des Verfassers ausführlich besprochen vorfinden. Die Theorie dieser Wasserräder wurde zuerst 1767 von Borda (S. 196, §. 76) ganz richtig aufgestellt [2]) und nachher von Poncelet [3]) in etwas vollständigerer Weise wiedergegeben.

Mit Bezug auf die Abbildung, Fig. 206ᵃ, und die daselbst eingeschriebenen Größen, wo V die Geschwindigkeit des eine Schaufel BC

Fig. 206ᵃ.



(unter dem Winkel $BAE = \alpha$ in A) treffenden mittleren Wasserstrahles und v die unter dem Winkel $BAD = \beta$ gegen die Schaufel gerichtete Peripheriegeschwindigkeit des Rades ist u. s. w., ergiebt sich der Normaldruck $= N$, womit das Wasser die Schaufel BC trifft, nach IV. zu:

$$N = \frac{\gamma Q}{g} (V \sin \alpha - v \sin \beta)$$

und hieraus der sogenannte Parallelstoß P (in der Richtung von v) zu

---

[1]) Allgem. Maschinenlehre. Bd. 1, S. 361 (Zweite Auflage) und Bd. 2, S. 18 (Zweite Auflage).

[2]) Mémoires de l'Academie Royale des Sciences (de Paris). Année 1767 Pag. 270.

[3]) Cours de mécanique appliquée aux machines. Sect. VII (1832).

$$P = \frac{\gamma Q}{g} (V \sin \alpha - v \sin \beta) \sin \beta,$$

folglich die vom Wasser auf das Rad übergetragene (secundliche) Arbeit $= \mathfrak{A}$:

$$\text{I.} \quad \mathfrak{A} = Pv = \frac{\gamma Q}{g} (V \sin \alpha - v \sin \beta) v \sin \beta.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß diese mechanische Arbeit ein Größtes wird für

$$v = \frac{1}{2} \frac{V \sin \alpha}{\sin \beta}$$

und aus I. dann folgt:

$$\text{II.} \quad \mathfrak{A}_{max} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma Q}{g} V^2 \right).$$

Das größte (theoretische) Güteverhältniß $= \mathfrak{g}$ ist sonach:

$$\text{III.} \quad \mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{A}_{max}}{\frac{1}{2} \frac{\gamma Q}{g} V^2} = 0{,}50,$$

d. i. nur die Hälfte des Arbeitsvermögens, welches dem Wasser innewohnt.

Hiernach sind, in Beziehung auf den Wirkungsgrad, die Stoßturbinen nicht schlechter als die verticalen, rein unterschlägigen Wasserräder mit ebenen Schaufeln in geraden Gerinnen, da hier (zuerst von Borda[1]) nachgewiesen) das theoretische Maximalverhältniß ebenfalls $= 0{,}50$ ist.

Poncelet leitet I, mit Hülfe des Princips von der Erhaltung der lebendigen Kräfte[2]), in nachstehender Weise ab.

In normaler Richtung $\overline{AN}$ zur Schaufel $\overline{BC}$ wird an Arbeit verloren:

$$\frac{1}{2} Mu^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma Q}{g} (V \sin \alpha - v \sin \beta)^2.$$

Da ferner die relative Geschwindigkeit u_1, womit das Wasser die Schaufel verläßt, $u_1 = V \cos \alpha + v \cos \beta$ ist, so ergiebt sich die absolute Geschwindigkeit, womit das Wasser schließlich das Rad verläßt, zu

$$w = \sqrt{u_1^2 + v^2 + 2 u_1 v \cos (180 - \beta)}.$$

Daher die verbleibende Nutzarbeit $= \mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \frac{\gamma Q}{g} \left[V^2 - u^2 - w^2 \right],$$

woraus sich wieder, nach Einsetzung vorstehender Werthe von u und w, ergiebt:

$$\mathfrak{A} = \frac{\gamma Q}{g} (V \sin \alpha - v \sin \beta) v \sin \beta.$$

§. 182.

Versuchsresultate über den Stoß isolirter Wasserstrahlen.

Die Rechnungsresultate der wesentlichsten Formeln vorstehender Paragraphen stimmen, wie bereits bemerkt, in vielen Fällen mit

---

[1]) Mémoires etc., a. a. O., Pag. 273.

[2]) Mécanique appliquée aux Machines. Sect. VII, Nr. 55.

den Erfahrungen in einer Weise, welche für die Praxis als hinreichend bezeichnet werden kann, wie aus den betreffenden Versuchen zu entnehmen ist und wovon die vorzüglichsten im Nachstehenden aufgeführt werden sollen.

Die ersten beachtenswerthen Versuche zur Ermittelung der Größe des Wasserstoßes scheinen im Jahre 1667 unter den Auspicien der Academie der Wissenschaften zu Paris angestellt worden zu sein[1]). Hierauf sind zwar bald viele andere gefolgt, die aber meistentheils der einmal vorgefaßten (irrigen) Idee der Experimentatoren entsprechen, daß die Kraft des vor der Ausflußöffnung von einer festen Ebene aufgenommenen Wasserstromes unter allen Umständen gleich dem Gewichte des über der Oeffnung, in der Höhe des Wasserstandes, errichteten Wasserprismas sei. D. Bernoulli's eigene Versuche bestätigten zwar seine (richtige) Theorie, entfernten jedoch nicht alle Zweifel, was erst späteren Zeiten und nach Experimenten, welche mit vollkommeneren Apparaten angestellt wurden, vorbehalten blieb.

In dieser Beziehung sind zunächst die Versuche Bossut's[2]) zu erwähnen, der sich dabei eines Apparates bediente, wie Fig. 207 zeigt.

Fig. 207.



Im hinlänglich großen Wasserbehälter *VXYZ* ist eine Bodenöffnung *PQ* vom kreisförmigen Querschnitt angebracht, außerhalb mit einem cylindrischen Ansatzrohr *pq* von solcher Kürze versehen, daß der Ausfluß dennoch wie aus der dünnen Wand erfolgte. In mindestens 1 Zoll Abstand von der äußeren Mündungskante war eine kreisförmige Kupferplatte *A* von $2\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser an dem einen Ende des Waagbalkens einer doppelarmig, gleicharmigen Waage *AB* angebracht. Gegen die Platte *A* ließ man den stoßenden Strahl wirken und maß den entsprechenden hydraulischen Druck dadurch, daß man in die Waagschale so lange Gewichte legte, bis der Waagbalken *AB* genau horizontal stand. Einige der wesentlichsten Resultate des geraden Stoßes sind in folgendem Täfelchen zusammengestellt, wobei bemerkt werden muß, daß Bossut den Contractionscoefficienten $= \alpha$ überall $= 0{,}64$ voraussetzte.

---

[1]) Kästner: Hydrodynamik, S. 294, II. und S. 296, III.
[2]) Hydrodynamique, T. II, Nr. 856.

Druckhöhe	Durchmesser der Mündung	Größe des Stoßes	
		nach d. Beobachtung	nach der Rechnung
4 Fuß	10 Linien	12608 Grains[1])	13030 Grains
4 „	6 „	4484 „	4691 „
2 „	10 „	6306 „	6518 „
2 „	6 „	2243 „	2345 „

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Versuch ist den Umständen nach als genügend zu bezeichnen, und würde wahrscheinlich noch besser gewesen sein, hätte Bossut genau genug die Größe des zusammengezogenen Strahles ermittelt. Bossut macht überdies besonders darauf aufmerksam, daß sich der Stoß nur halb so groß ergab, wenn die Platte A unmittelbar vor der Mündung pq angebracht wurde; übrigens war der Querschnitt von A, selbst beim stärksten Strahlquerschnitte, immer noch über 9 mal so groß als dieser[2]).

Ferner bemerkenswerthe Stoßversuche stellte Michelotti (der Sohn)[3]) mit Hülfe der Fig. 150 abgebildeten Schnellwaage an. Der Ausfluß erfolgte aus horizontal gerichteten Ansatzröhren, entweder von quadratischem Querschnitte, wobei der zusammengezogene Strahl 0,785 Quadratzoll Inhalt hatte, oder vom kreisförmigen Querschnitte bei 0,6215 Quadratzoll des zusammengezogenen Strahles. Der Abstand zwischen der gestoßenen Ebene und der äußeren Kante der Ausflußmündung betrug überall 14,166 Zoll. Die Strahlachse war stets normal zur gestoßenen Ebene gerichtet. Von seinen 13 Versuchen mögen hier nachstehende vier Platz finden:

Strahlform	Druckhöhe in Pariser Zoll	Wasserstoß, in Unzen ausgedrückt	
		berechnet	beobachtet
Quadrat . .	249,775	251,727	251,152
	249,50	251,4498	251,1520
Kreis . . .	250,5	199,492	199,4297
	248,5	198,295	198,286

Bei Weitem ausführlichere Versuche hat Langsdorf beim Ausflusse des Strahles aus Seitenöffnungen angestellt und sich dabei eines Apparates bedient, der im Allgemeinen mit dem (von

[1]) 1 Pfund (Livre) = 9116 Grains. Ein Cubikfuß Wasser = 70 Pfund.

[2]) Minder bedeutsam sind die Versuche Dubuat's über den Stoß eines isolirten Strahles gegen eine unbewegliche ebene Fläche, weshalb wir nur auf die Principes, Nr. 425, verweisen.

[3]) Hydraulische Versuche. Deutsch von Eytelwein. Anhang, S. 251.

Morosi und Bidone) weiter unten (Fig. 210) abgebildeten übereinstimmt[1]).

Den überhaupt gewonnenen Versuchsresultaten (145 Versuche, wovon 79 über geraden, 66 über schiefen Stoß isolirter Strahlen) entlehnen wir folgende Zusammenstellung, wobei keine weitere Auswahl als die gemacht ist, daß solche Versuche zusammengestellt wurden, wobei die Druckhöhen für geraden und schiefen Stoß dieselben waren.

Der Querschnitt des zusammengezogenen Strahles betrug überall 1,9468 pariser Quadratzoll, der Abstand der Stoßfläche von der Ausflußmündung 8 Zoll[2]). Das Gewicht eines pariser Cubikzoll Wassers wurde zu 0,0389 nürnberger Pfund berechnet.

Nr. der Langsdorfschen Versuche		Druckhöhe $= h_1$ in paris. Zoll und Linien	Gerader Stoß $= P$		Größe des Stoßwinkels	Schiefer Stoß $= P'$ (Parallelstoß)	
Gerader Stoß	Schiefer Stoß		berechnet aus $P = 0{,}1514 \,.\, h$	beobachtet		berechnet aus $P' = P \,.\, \sin^2 \alpha$	beobachtet
70	63	42″ 4‴	6,409 ℔	6,900 ℔	26° 16′	1,2552 ℔	1,2940 ℔
49	34	42″ 10‴	6,485	6,900	33° 16′	1,9513	2,0842
77	27	39″ 10‴	6,0307	6,3250	39° 46′	2,4675	2,5450
76	22	40″ 4‴	6,1064	6,3968	50° 46′	3,6720	3,5347
65	9	43″ 7‴	6,5985	6,900	60° 16′	4,9754	5,3727
54	1	39″ 1‴	5,9172	6,3250	70° 16′	5,2426	5,6700

Jedenfalls ist auch hier die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch als genügend zu bezeichnen, die noch größer gewesen wäre, hätte Langsdorf nicht überall den Ausflußcoefficienten 0,64 für die dünne Wand, sondern den Contractionscoefficienten (wahrscheinlich 0,64) in Rechnung gebracht.

Wichtig ist noch der von Langsdorf ermittelte Satz, daß der isolirte Strahl, um ganz zu wirken, im Stande sein muß, sich in einem Kreise auszubreiten, dessen Durchmesser wenigstens viermal so groß ist als der des Strahles.

Interessant und bemerkenswerth sind die Versuche des Italieners Morosi[3]). Unter Zuziehung eines Fig. 208 abgebildeten Hebelapparates, der sich um A als Achse drehte und wobei der Wasser-

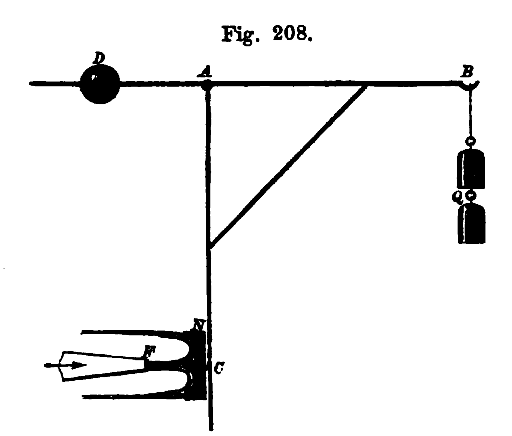
---

[1]) Lehrbuch der Hydraulik. Altenburg 1794, S. 189 etc.

[2]) Ueber die vortheilhafteste Entfernung der Mündung von der gestoßenen Fläche gelangte Langsdorf zu keinem bestimmten Resultate. Vor der Ausbreitung des Strahles, in geringerer Entfernung als $1\frac{1}{2}$ Zoll von der Mündung, wurde der Stoß immer mehr durch die einfache Druckhöhe (statt der doppelten) repräsentirt, auf welche unmittelbar vor der Mündung der Stoß auch vollständig herabgezogen wurde (a. a. O., §. 204).

[3]) Memorie dell' Imperiale Reggio Instituto del Regno Lombardo-Veneto. Volume primo. Anni 1812 e 1813, Pag. 119. Milano 1819.

Fig. 208.



strahl an der conisch convergenten Ausflußöffnung einen Quadratzoll (pariser Maaß) Querschnitt hatte, die gestoßene Fläche wenigstens achtmal Strahlquerschnitt als Ausdehnung besaß und endlich der Mündungsabstand von der gestoßenen Ebene etwa dreimal kleinsten Strahldurchmesser betrug, fand Morosi, daß, unter sonst gleichen Umständen, der Stoß ungefähr doppelt so groß wurde, wenn man am Umfange der gestoßenen quadratischen Platte Erhöhungen (Ränder oder Leisten) von mindestens $6\frac{1}{2}$ Linien Höhe anbrachte, wodurch (wie Fig. 208 zeigt) das Wasser genöthigt wurde, in genau entgegengesetzter Richtung abzufließen, als die war, in welcher es ankam.

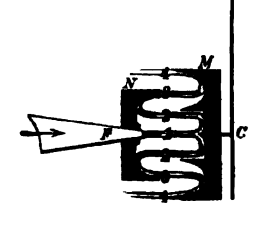
Seine speciellen Resultate sind in folgendem Täfelchen zusammengestellt:

Druckhöhe	Beobachtete Stoßkraft ohne Randplatte.	Beobachtete Stoßkraft mit Randplatte	Berechnete Stoßkraft $P = \gamma . A . 2H = 0{,}97 . 2H$ [1]
6 Fuß	5 ℔	11 ℔	5,83 ℔
8 „	7 „	15 „	7,77 „
10 „	9 „	20 „	9,72 „

Hierdurch erhält besonders die Formel III, §. 179, ihre Bestätigung.

Bei einem anderen Versuche[2]) hat Morosi eine Anordnung, wie Fig. 209 erkennen läßt, getroffen, wobei jedes Wassertheilchen die Platte M des Hebelwerkes zweimal stößt, nämlich einmal in seinem centralen Theile, ein anderes Mal in dem Theile, welcher zwischen beiden Rändern enthalten ist. Nach dem letzten Stoße strömt das Wasser ziemlich unter 180 Grad Winkel zurück. Um hierbei das Gleichgewicht der Waage herzustellen, mußte Morosi 8,30 ℔ in die Schale legen, während bei Anwendung der Platte, Fig. 208, mit nur einem Rande, unter

Fig. 209.



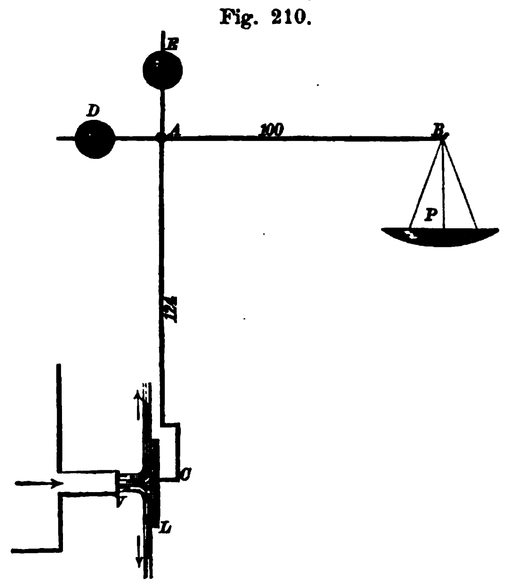
[1]) $\gamma = 70$ pariser Pfund.

[2]) Memorie etc. Pag. 309.

sonst gleichen Umständen, nur 4,50 ℔ erfordert und ohne jeglichen Rand sogar nur 2,50 nöthig wurden.

Es verhalten sich hierbei also die drei verschiedenen Stoßwirkungen wie $83 : 45 : 25 = 3{,}32 : 1{,}8 : 1$.

Fig. 210.



Auch dies Resultat stimmt gut mit dem Bernoulli-Euler'schen Stoßausdrucke, §. 180, wenn man dort $H = h$ setzt und den betreffenden Werth ($\delta = 180$ gesetzt) für die 2 gleichzeitigen Stöße addirt[1]).

Sehr umfangreiche Versuche über den Stoß isolirter Wasserstrahlen hat Bidone[2]) in den Jahren 1835 und 1836 angestellt, aus deren Resultaten hier einige besonders werthvolle Mittheilungen gemacht werden sollen. Bidone's Versuchsapparat ist Fig. 210 abgebildet. Dabei ist A wieder die Hebeldrehachse, ferner als Armverhältniß $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{25}{31}$. Die Entfernung der Ausflußöffnung V von der gestoßenen Platte L betrug stets 6 Zoll, bei welcher Entfernung der Stoß am stärksten und der Strahl gleichzeitig noch sichtbar horizontal (rechtwinklig zur Platte) war. Aus seiner ersten Versuchsreihe entlehnen wir (im Auszuge) nachfolgende Tabelle, wobei m den Coefficienten der Formel $P = m \cdot \gamma \cdot A \cdot H$ (II, §. 179)

---

[1]) Hierher gehörige Rechnungen hat in bemerkter Weise zuerst Bidone geführt, worüber dessen vortreffliche Abhandlung „Expériences sur la percussion des veines d'eau", S. 130 der Memorie della Reale Academia delle science di Torino, Tomo XI (1838) nachzulesen ist. Auszüge hieraus folgen im Nachstehenden.

[2]) a. a. O., S. 81.

bezeichnet, der nach der Theorie = 2 sein müßte, allgemein aber nach Bernoulli-Euler ist:

$$m = 2\left(1 - \cos\delta \sqrt{\frac{h}{H}}\right).$$

Durchmesser der gestoßenen Platte in pariser Linien	Werthe von m		
	Strahldurchm. 9‴ Druckhöhe 3061‴ Geschw. V=28,56′	Strahldurchm. 12‴ Druckhöhe 3071‴ Geschw. V=28,56′	Strahldurchm. 16‴ Druckhöhe 3068‴ Geschw. V=28,76′
24‴	2,0940	1,9202	1,5630
36	2,0940	2,2198	2,0423
48	2,0849	2,2099	2,0859
60	2,0582	2,2198	2,0804
72	2,0760	2,2296	2,1458
108	2,0582	2,2296	2,1349

Aus Versuchen, um den Einfluß des Plattenabstandes von der Mündungskante zu beurtheilen, entlehnen wir Nachstehendes, wobei e den bemerkten Abstand der 6 Zoll im Durchmesser haltenden Platte bezeichnet, d den kleinsten Strahldurchmesser in Linien und V die Geschwindigkeit des Wassers in Fußen.

e	m		
	$d = 9$, $V = 28{,}23$	$d = 12$, $V = 28{,}23$	$d = 16$, $V = 28{,}76$
0	1,6259	1,5839	1,5358
6	1,9565	2,1447	2,0741
12	1,9654	2,1545	2,0668
24	1,9745	2,1595	2,0750
36	1,9834	2,1693	2,0804
48	2,0101	2,1987	2,1131
60	2,0637	2,2135	2,1458
72	2,0726	2,2184	2,1458

Ueber 72 Linien Entfernung hinaus änderten sich Querschnitt und Form des Strahles derartig, daß eine theoretische Vergleichung nicht räthlich erschien. Zu einer mathematischen Bestimmung des Einflusses von e gelangte Bidone nicht. In einer anderen Reihe von Versuchen bestätigte Bidone die von Morosi gefundenen Resultate über die Vermehrung der Stoßkraft des Wassers, wenn man die gestoßenen ebenen Flächen (Platten) mit Einfassungen oder Rändern (wie bei Fig. 208) versieht. Aus diesen Versuchen folgt, daß es für jeden Strahl und für jede gegebene Platte einen Rand rechtwinklig zur Platte und von gewisser Höhe giebt, für

welche der Stoß ein Maximum wird. Den größten Werth für den bereits vorher bemerkten Coefficienten m erhielt Bidone bei einem Strahle von 12 Linien Durchmesser und einer gestoßenen Platte von 36 Linien Durchmesser, wenn letztere mit Rändern von $2\frac{1}{2}$ Linien Höhe versehen und endlich die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers 28,31 Fuß pro Secunde war. Diese Versuchsreihe mag hier speciell noch Platz finden.

Randhöhe in Linien	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	6	9	12	18
Werthe des Coefficient. m	2,094	3,114	3,318	3,383	3,374	3,365	3,347	3,302	3,284	3,221	3,168	3,114

Zu einem allgemeinen Gesetze über diese Erscheinung gelangte Bidone ebenfalls nicht.

Noch werde einer Versuchsreihe über den sogenannten ersten Stoß eines isolirten Strahles gedacht, d. h. des Stoßes, welcher im Augenblicke erfolgt, wo der aus der geöffneten Mündung strömende Strahl die Platte zum ersten Male trifft. Dieser Stoß ist jederzeit viel größer, wie der andauernde (permanente) Stoß desselben Strahles gegen dieselbe Platte.

Folgende Tabelle belehrt weiter hierüber.

Durchmesser der gestoßenen Platte in Linien	Strahl von 9 Linien Durchmesser			Strahl von 16 Linien Durchmesser		
	Höhe des Randes der Platte in Linien	Größe des permanenten Stoßes in Unzen	Größe des ersten Stoßes in Unzen	Höhe des Randes der Platte in Linien	Größe des permanenten Stoßes in Unzen	Größe des ersten Stoßes in Unzen
24	0	117,55	204,95	0	288,34	385,79
	3	201,94	301,40	$6\frac{1}{2}$	502,33	602,80
36	0	117,55	223,04	0	376,75	566,63
	2	191,89	277,29	5	710,30	807,75
48	0	117,04	229,04	0	384,79	638,97
	2	185,86	265,23	$4\frac{1}{2}$	693,22	831,87
60	0	115,54	217,81	0	383,78	614,86
	$3\frac{1}{2}$	175,82	289,34	$4\frac{1}{2}$	675,14	855,98

Die allerjüngsten Versuche über den Stoß isolirter Strahlen verdankt man Weisbach[1]).

Das Gesammtresultat aus diesen Versuchen ist die (den Um-

[1]) Die Experimental-Hydraulik, Freiberg 1855, S. 254 etc. Ferner im Bornemann'schen Civilingenieur, Jahrg. 1861 (Bd. 7), S. 262 und Jahrg. 1862 (Bd. 8), S. 1 ff. Ferner (mit Zusätzen von Grashof) in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1863 (Bd. VII), S. 235.

ständen nach) gute Uebereinstimmung der in §. 179 entwickelten Formeln für den geraden Stoß isolirter Strahlen mit der Erfahrung sowohl für den Stoß des Wassers gegen ruhende als gegen bewegte Flächen.

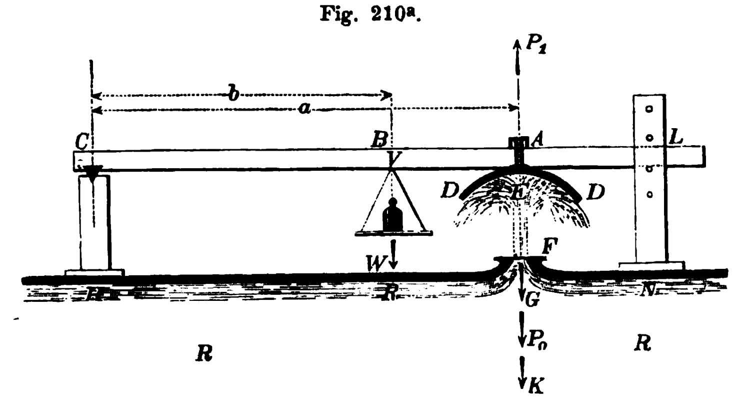
Weniger gute Uebereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie zeigte sich bei den Versuchen über den schiefen Stoß des Wasserstrahles [1]), was unsere §. 181 gemachten Bemerkungen über die mathematische Abschätzung dieser Stoßgattung nur bestätigt.

Die beachtenswerthesten Versuche führte Weisbach in den Jahren 1856 und 1859 mit demselben Apparate aus, woran die (S. 559) erörterten und mitgetheilten Versuche über die Steighöhe springender Wasserstrahlen ausgeführt wurden.

Daher bestand auch hier das Ausflußgefäß in einem Dampfkessel RR, Fig. 210ᵃ, von $1\frac{1}{4}$ Meter Durchmesser und von 5 Meter Länge, welcher mit einem nöthigenfalls als Feuerspritze dienenden Druckwerke in Verbindung stand. Auf der oberen Seite dieses Kessels war eine Oeffnung angebracht, woran sich verschiedene Mundstücke F für den Ausfluß anschrauben ließen. Die Spannung oder der Druck der eingeschlossenen Flüssigkeit wurde an einem Quecksilbermanometer abgelesen, welches in das Innere des Kessels mündete; eben so gab ein Quecksilberthermometer, mit einer in das Innere des Kessels reichenden Kugel, die Temperatur dieser Flüssigkeit an. Endlich wurde auch an einem Barometer der äußere Luftdruck etc. beobachtet.

Zum Messen der Stoßkraft des Flüssigkeitsstrahles bediente man sich eines einarmigen Hebels ABC, welcher über der oberen

Fig. 210ᵃ.



Seite (der Decke) HN des Kessels RR hinlief und mittelst einer schneidigen Achse C auf einer mit der Kesselwand fest verbundenen Stütze CH ruhte. Die Stoßplatte DED war so mit dem Hebel verbunden, daß ihre Achse mit der Achse des aus der Mündung F

[1]) Eine besondere Bearbeitung dieser Versuche hat Zeuner im „Civilingenieur“, Neue Folge, Bd. 1, S. 1 geliefert, worauf wir ganz besonders aufmerksam machen.

aufsteigenden Wasserstrahles FE zusammenfiel. Das freie Ende L des Hebels ging durch eine, ebenfalls auf der Kesselwand befestigte Gabel LN, und durch letztere hindurch gesteckte Bolzen dienten dazu, den Hebel so lange in horizontaler Lage zu erhalten, bis das Moment der Stoßkraft größer war, als das Moment des Gewichtes W auf der in B aufgehangenen Waagschale sammt dem des unbelasteten Waagbalkens[1]).

Bei sämmtlichen Versuchen war der Hebelarm der Kraft: $\overline{CA} = a = 1{,}2750$ Meter, der der Waagschale (und der daraufgestellten Gewichte) $\overline{CB} = b = 0{,}9715$ Meter, folglich die einem Gewichte W entsprechende Größe der Stoßkraft

$$K = \frac{b}{a} W = \frac{0{,}9715}{1{,}2750} W = 0{,}7620 W.$$

Ferner betrug das auf den Kraftpunkt E reducirte Gewicht der leeren Waage $P_0 = 0{,}6571$ Kilogramm und das Gewicht der Stoßplatten $G = 0{,}0772$ Kilogramm, wenn diese Platte eben, so wie $G = 0{,}0539$ Kilogramm, wenn diese Platte hohl war.

Bezeichnet man hiernach die effective Stoßkraft mit P_1, so ergiebt sich:

(1) $P_1 = P_0 + G + K = 0{,}7343 + 0{,}7620 \,.\, W$ für die ebene gestoßene Fläche und

(2) $P_1 = 0{,}7110 + 0{,}7620 W$ für die hohle gestoßene Fläche.

Mit Bezug auf die in §. 179 erhaltenen Formeln setzt Weisbach für den Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles in der Gefäßmündung αA, wo α den Contractionscoefficienten (§. 82) bezeichnet, so wie ψV für die Ausflußgeschwindigkeit, wenn ψ der Geschwindigkeitscoefficient ist, so daß man für die theoretische Stoßkraft P erhält:

$$P = \frac{\gamma \alpha A}{g} (1 - \cos \delta) \psi^2 V^2.$$

Da nun (ebenfalls nach §. 82) $\alpha \psi = \mu$ ist, so hat man:

$$P = \frac{\gamma \mu \psi A}{g} (1 - \cos \delta) V^2,$$

oder wenn $\frac{V^2}{2g} = H$ gesetzt wird:

$$(3) \quad P = 2 \gamma \mu \psi A \, (1 - \cos \delta) \, H.$$

Weisbach maaß die jedesmal vorhandene Pressung nicht durch Wassersäulen H, sondern durch Quecksilbersäulen $= h$, weshalb in (3) H durch $13{,}6\,h$ zu ersetzen ist, so daß man erhält:

$$(4) \quad P = 27{,}2 \gamma \mu \psi A \, (1 - \cos \delta) \, h.$$

Die bei den Versuchen in Anwendung gebrachten Mundstücke waren:

a. Eine Kreismündung in dünner Wand von 1,01 Centimeter Durchmesser, so daß hier $A = 0{,}801$ Quadratcentimeter war.

---

[1]) Specielles über die Ausführung der Versuche findet sich in unserer Quelle, das bei ähnlichen Versuchen wohl zu beachten sein würde.

b. Eine Kreismündung in ebenfalls dünner Wand, jedoch von 1,408 Centimeter Durchmesser, wobei also $A = 1,5570$ Quadratcentimeter.

c. Ein kurzes conoidisches Mundstück, mit cylindrischer Ausmündung, von 1,002 Centimeter Durchmesser, also $A = 0,7885$ Quadratcentimeter.

Wie bereits angedeutet, wurden zweierlei Platten (Flächen) in Anwendung gebracht, gegen welche man die isolirten Wasserstrahlen wirken ließ, nämlich eine ebene und eine hohle, letztere nach einem Rotationshyperboloid geformt. In beiden Fällen betrugen die Durchmesser 10 Centimeter, also im Vergleich mit den Strahldurchmessern von solcher Größe, daß die Richtung des den Rand der Stoßfläche verlassenden Wassers tangential an letztere angenommen werden dürfte.

Bei den Versuchen mit der ebenen Platte war folglich δ in (4) $= 90^\circ$; dagegen betrug bei der Hohlfläche $\delta = 134^\circ$, während die dem Wasserstrahle zugekehrte concave Fläche 3,40 Centimeter Tiefe hatte.

Des Raummangels wegen beschränkt sich der Verfasser auf folgende Angaben.

I. Stoß gegen die ebene Fläche.

Mündung in dünner Wand von 1,01 Centimeter Durchmesser, wo überdies $\mu = 0,6318$ war und $\psi = 1$ gesetzt werden konnte.

Aus (4) wird für diesen Fall:

$$P = 27,2 \,.\, 1000 \,.\, 0,6318 \,.\, 0,00008012 \,.\, 13,6 \,.\, h, \text{ d. i.}$$

$$(5) \quad P = 1,377 \,.\, h.$$

Die betreffenden Versuche und Beobachtungen lieferten mit Zuziehung der Formeln (1) und (5) folgende Werthe:

W in Kilogr.	Werthe P_1 in Kilogramm nach (1)	h in Metern	Werthe von P in Kilogramm nach (5)	$\frac{P_1}{P}$
0,80	1,3439	1,023	1,4086	0,9541
0,50	1,1153	0,850	1,1704	0,9525
0,30	0,9629	0,783	1,0162	0,9476
0,00	0,7343	0,5485	0,7552	0,9726
Mittelwerthe	1,0391		1,0876	0,9567

II. Stoß gegen die hohle Fläche.

Hier ist überall:

$$1 - \cos \delta = 1 - \cos 134^\circ = 1 + \cos 46^\circ = 1,69465.$$

a. Kreismündung in dünner Wand.

$$\mu = 0,6318, \ \psi = 1 \text{ und } A = 0,00008012.$$

Hiernach folgt aus der Formel (4):

$$(6) \quad P = 2,333 \,.\, h.$$

Mit Zuziehung letzterer Gleichung und der (2) lieferten die Versuche nachstehende Werthe:

	W in Kilogramm	Werthe P_1 in Kilogramm nach (2)	h in Metern	Werthe P in Kilogramm nach (6)	$\frac{P_1}{P}$
	1,5	1,8540	0,9760	2,2770	0,8146
	1,0	1,4730	0,7760	1,8104	0,8136
	0,75	1,2818	0,6786	1,5715	0,8156
	0,50	1,0920	0,5652	1,3186	0,8281
	0,25	0,9015	0,4640	1,0825	0,8337
	0,00	0,7110	0,3648	0,8511	0,8334
Mittelwerthe	0,66	1,2189	0,6366	1,4852	0,8231

Die bedeutende Abweichung des sich hier ergebenden Mittelwerthes $\frac{P_1}{P} = 0{,}8231$ von der Einheit, giebt zu erkennen, daß die Stoßkraft in Folge der Reibung des Wassers an der hohlen Fläche sehr herabgezogen wird.

b. Kreismündung in dünner Wand.

Ebenfalls $\mu = 0{,}6318$, $\psi = 1{,}0$, $1 - \cos\delta = 1{,}69465$, jedoch $A = 0{,}0001557$ Quadratmeter.

Daher aus (4):

$$(7) \quad P = 4{,}4597 \, . \, h.$$

Da sich aus 8 Versuchen, wo sich h von $0^m{,}9460$ bis $0{,}1820$ veränderte, der Mittelwerth ergab:

$$h = 0^m{,}532,$$

so berechnete sich der Mittelwerth von P zu

$$(8) \quad P = 4{,}4597 \, . \, 0{,}532 = 2{,}373 \text{ Kilogramm.}$$

Die Versuche lieferten als Mittelwerth der effectiven Stoßkraft

$$(9) \quad P_1 = 2{,}092 \text{ Kilogramm,}$$

so daß das mittlere Kraftverhältniß war:

$$(10) \quad \frac{P_1}{P} = \frac{2092}{2373} = 0{,}881.$$

c. Ausfluß des Wassers durch das kurze conoidische Mundstück.

Hier war $\mu = \psi = 0{,}9792$[1], $1 - \cos\delta = 1{,}69465$ und $A = 0{,}00007885$ Quadratmeter.

Daher aus (4):

$$P = 3{,}484 h.$$

[1]) Ebert (nach Weisbach's Versuchen) im Civilingenieur, Jahrg. 1861 (Bd. 7), S. 270.

Hier (als Mittelwerth) $H = 1^m,91$, also $h = 0^m,140$ gesetzt[1]), liefert

$$P = 0,4877 \text{ Kilogramm.}$$

Der Mittelwerth P_1 ist aber

$$P_1 = 0,4385 \text{ Kilogramm,}$$

daher

$$\frac{P_1}{P} = \frac{4385}{4877} = 0,899.$$

Grashof ermittelte[2]) noch aus den Weisbach'schen Versuchen den Werth n der Formel 6, S. 578, d. i. das Verkleinerungsverhältniß der Geschwindigkeiten durch Reibungen (oder der Factor von cos δ in der D. Bernoulli'schen Formel, S. 576), für die vorbemerkten drei Fälle, über den Wasserstoß gegen die hohle Fläche eines Rotations-Hyperboloids, wonach sich folgende Zusammenstellung machen läßt, in welcher $\frac{D}{d}$ das Durchmesserverhältniß von gestoßener Fläche und Strahlquerschnitt bezeichnet:

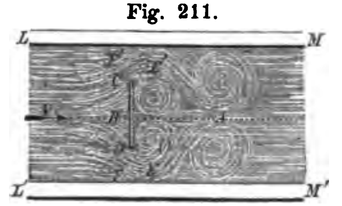
Mündungsform	$\frac{D}{d}$	H in Metern	h in Metern	$\frac{P_1}{P}$	n
Ausfluß durch eine dünne Wand	12,5	8,66	0,636	0,824	0,674
	9,0	7,24	0,532	0,881	0,837
Ausfluß durch ein conoidisches Mundstück	10,0	1,91	0,140	0,899	0,851

In Bezug bestimmter Gesetze für n hält Grashof die Weisbach'schen Versuche nicht für ausreichend.

§. 183.

Stoß unbegrenzten Wassers gegen ebene Flächen.

Fig. 211.



Bei der Betrachtung des Stoßes einer unbegrenzten Wassermasse gegen eine unbewegliche feste Fläche CD, Fig. 211, bemerkt man leicht, daß die Flüssigkeitsfäden innerhalb eines gewissen Raumes $LML'M'$ (gleichsam in dem Bereiche eines prismatischen Canales) mehr oder weniger von ihrer

[1]) Grashof (aus Weisbach's Versuchen) in der Zeitschrift deutscher Ingenieure, Jahrg. 1863 (Bd. VII), S. 242.

[2]) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1863, S. 242 und Theoretische Maschinenlehre, Bd. 1, S. 874.

ursprünglichen Richtung abgelenkt, zu einer Divergenz und endlich zum Herumgehen um die äußeren Kanten C und D veranlaßt werden, wobei sich in einem bestimmten Raume B vor der Fläche sogenanntes Vorderwasser (proue fluide) bildet, was unbeweglich zu sein scheint, obwohl seine Geschwindigkeit nur geringer als die der umgebenden Flüssigkeit ist. Beim Strömen der übrigen Wasserelemente von B nach C hin bemerkt man sofort eine Geschwindigkeitszunahme, die um so größer wird, je bedeutender die horizontale Ausdehnung von CD ist, was sich dadurch erklärt, daß die ganze Erscheinung auch so betrachtet werden kann, als erfolge ein Ausfluß durch eine Art einförmiger Oeffnung DF und CF', d. h. durch einen Querschnitt, der kleiner ist als der, welcher der Gesammtatmosphäre LL' der überhaupt in Betracht kommenden Wassermasse entspricht und wobei die Wirkung des bei B gebildeten Staues als accelerirende Kraft auftritt [1]).

Nach dem Passiren der äußeren Kanten C und D bewirkt die umgebende Flüssigkeit wieder eine Convergenz der Wasserfäden, die sich endlich nach einigen wirbelnden und excentrischen Bewegungen mit der unbegrenzten Wassermasse vereinigen und mit dieser weiter fließen. Nach der Vereinigung der Wasserfäden hinter der gestoßenen Fläche begrenzen dieselben eine Art von vertiefter Pyramide (eine Art Conoid), das sogenannte Kielwasser (poupe fluide), die um so mehr bemerkbar wird, je schneller die flüssige Masse sich überhaupt bewegt. In diesem Raume E steht das Wasser niedriger als an der Vorderfläche von CD, wodurch eine Druckverminderung auf die Hinterfläche entsteht, welche dem Drucke auf die Vorderfläche zu Gute kommt. Dubuat hat diesen besonders von der Geschwindigkeit der Bewegung abhängigen Druck auf die Hinterfläche mit dem Namen Nichtdruck (non-pression) bezeichnet und seine Größe ebenso durch Versuche zu bestimmen gesucht, wie den Druck auf die Vorderfläche [2]). Aus der Differenz der Drücke auf Vorder- und Hinterfläche besteht aber der Gesammtdruck, welcher auf die Platte vom bewegten Wasser ausgeübt wird, dessen genaue mathematische Bestimmung (trotz allen Bemühungen, insbesondere d'Alembert's [3]), L. Euler's [4]) und neuerdings wieder Poncelet's) [5]) bisher unmöglich gewesen ist.

Um practischen Zwecken zu genügen, leitet man daher (nach

---

[1]) Der Verfasser ist hier ganz den Ansichten Dubuat's in dessen Principien, Partie III, S. 151 und S. 162 gefolgt.

[2]) Im Allgemeinen hat sich ergeben, daß diese Drücke auf die verschiedenen Punkte der gestoßenen Fläche verschieden sind, und zwar abnehmend vom Centrum nach den Rändern hin (Princ. Nr. 444 und Nr. 463), während die Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältnisse abnehmen (Nr. 438, Pag. 153). Tredgold hat (Phil. Magazin 1828, Vol. III, Pag. 251) statt der Benennung Nichtdruck den Namen Minus-Pressure eingeführt.

[3]) Essai d'une nouvelle théorie de la resistance des Fluides 1752 und Opuscules mathématiques 1761—80.

[4]) Petersburger Comment. Jahrg. 1763.

[5]) Introduction à la mécanique industrielle. Paris 1839, Pag. 675 (und hiernach Broch's Lehrbuch der Mechanik, §. 301).

Dubuat) einen betreffenden mathematischen Ausdruck gewöhnlich folgendermaßen ab.

Es sei b die Höhe der Wassersäule, welche zum Messen des mittleren hydrostatischen Druckes auf die Vorderfläche benutzt wird, V die mittlere Geschwindigkeit des fließenden Wassers und H die ihr entsprechende Druckhöhe. Nach den Versuchsresultaten lassen sich die hydraulischen Drücke auf die Vorder- und Hinterfläche den Geschwindigkeitshöhen proportional setzen, also überhaupt durch mH und nH darstellen, wenn m und n durch Versuche zu bestimmende Zahlenwerthe sind. Der mittlere Druck auf jede Einheit der Vorderfläche ist daher $b + mH$ und eben dieser Druck auf die Hinterfläche $b - nH$ zu setzen, weshalb der resultirende Druck $(b + mH) - (b - nH) = (m + n) H$ sein wird. Bezeichnet man daher den Inhalt der ebenen Fläche CD, welche zunächst rechtwinklig zur Stromrichtung vorausgesetzt werden mag, mit A und mit γ wiederum die Dichte der unbegrenzten Flüssigkeit, so erhält man den Gesammtdruck auf die feste Fläche oder den Stoß $= P$ des unbegrenzten Wassers zu:

$$(1) \quad P = \gamma \,.\, A\,(m + n)\,\frac{V^2}{2g},$$

oder wenn man $m + n = k$ setzt, auch:

$$\text{I.} \quad P = k \,.\, \gamma \,.\, A\,\frac{V^2}{2g}.$$

Zusatz 1. Für sehr kleine ebene Flächen (1 Quadratfuß) und geringe Geschwindigkeiten (nicht über 3 Fuß pro Secunde) fand Dubuat[1]) $m = 1{,}186$ und $n = 0{,}670$, also $k = 1{,}856$, ein Werth, der auch mit den Resultaten anderer Experimentatoren[2]) übereinstimmt, so daß man bis auf Weiteres für sehr kleine ebene Flächen wird setzen können:

$$k = 1{,}86.$$

Zusatz 2. Bewegt sich die gestoßene Fläche mit der Geschwindigkeit v in der Richtung des Wassers oder entgegengesetzt derselben, so hat man in I, analog V, §. 179, die entsprechende relative Geschwindigkeit, also allgemein $V \mp v$ statt V zu setzen, d. h. es ist

$$P = k \,.\, \gamma \,.\, A\,\frac{(V \mp v)^2}{2g}.$$

§. 184.

Schiefer Stoß unbegrenzten Wassers gegen ebene Flächen.

Aus dem, was beim schiefen Stoße isolirter Wasserstrahlen bekannt geworden ist, folgt von selbst, daß für unbegrenztes Wasser noch mehr von der Möglichkeit einer mathematischen Theorie wird abgesehen werden müssen, als dies an gedachter Stelle der Fall war. Man begnügt sich daher auch für technische Zwecke mit

---

[1]) Principes, Nr. 482.

[2]) Poncelet: Introduction à la mécanique industrielle, Pag. 585.


Fig. 212.

dem für den Normalstoß N, §. 181, gefundenen Werth:

$$N = \frac{\gamma A}{g} V^2 \sin \alpha,$$

führt statt des hier erforderlichen Strahlquerschnittes A die Verticalprojection $\overline{CG} = \overline{CD} . \sin \alpha$ ein, oder wenn die Fläche CD mit F bezeichnet wird, schreibt für A den Werth $F \sin \alpha$ in die aufgeführte Gleichung und corrigirt alle hierbei gemachten Fehler durch Einführung eines besonderen Erfahrungscoefficienten $\frac{k_1}{2}$, so daß endlich erhalten wird:

$$\text{I.} \quad N = k_1 \frac{\gamma F}{2g} . V^2 \sin^2 \alpha,$$

für den Normalstoß unbegrenzten Wassers gegen eine feste ebene Fläche, welche unter einem Winkel α gegen die Richtung des ankommenden Wassers geneigt ist.

Für Flächen von nicht zu großer Ausdehnung (etwa bis zur Größe der Windflügel der gebräuchlichen Windmühlen) wird man mit Coriolis $k_1 = 3$,[1]) folglich setzen können:

$$\text{II.} \quad N = 3 . \frac{\gamma . F}{2g} . V^2 \sin^2 \alpha.$$

Haben die Flächen nur sehr geringe Ausdehnung (1 Quadratfuß und weniger), so giebt letzte Gleichung etwas zu große Werthe[2]).

Anmerkung. So weit zur Zeit die vorhandenen Versuche über die Anwendbarkeit der Formel I. reichen, läßt sich bestimmt annehmen, daß für practische Zwecke, wenn der Winkel nicht kleiner wie 60 Grad ist, ohne Weiteres von derselben Gebrauch gemacht werden kann, daß aber von 60 Grad abwärts die Anwendbarkeit immer unzulässiger und endlich für Winkel unter 20 Grad eigentlich unbrauchbar wird, wie unter Anderen Coriolis[3]) und Prechtl[4]) nachgewiesen haben.

Zusatz. Ungeachtet der Mängel, an welchen Gleichung I. leidet, ist sie doch immer noch die einzige, welche sich mit einigem Erfolge zur Lösung betreffender technischer Aufgaben verwenden läßt. Eines der interessantesten hierher gehörigen Beispiele ist die zuerst von Leonhard Euler[5]), bereits vor länger als hundert Jahren (1773),

[1]) Traité de la mécanique etc. Deuxième Partie, Pag. 237.

[2]) Empfehlenswerth scheint Weisbach's Vorschlag (Ingenieur-Mechanik, Bd. 2, S. 798, Vierte Auflage) zu sein, nach Hutton für Fußmaaße zu setzen $k_1 = 1{,}86 . F^{0,1}$, so daß z. B. für $F = 200 \square'$ (mittlere Größe der gewöhnlichen Windflügel) aus k_1 wird: $k_1 = 1{,}86 . 200^{0,1} = 3{,}159$, was mit der oben bemerkten Zahl von Coriolis gut übereinstimmt. Weiteres hierüber in dem später folgenden Abschnitte „Stoß und Widerstand der Luft“.

[3]) Traité de la mécanique etc., Pag. 199.

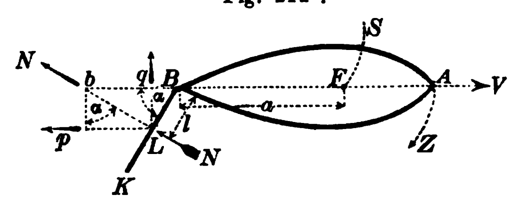
[4]) Untersuchungen über den Flug der Vögel (Wien 1856), S. 154, wo für kleinere Winkel der Vorschlag gemacht wird, $(\alpha + 3\frac{1}{2})^0$ statt α zu setzen.

[5]) In der 1773 (in Petersburg) erschienenen Schrift: „Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux“. Mir liegt (nur) die von

beantwortete Frage nach dem Winkel, unter welchen das Steuerruder eines Schiffes gegen die Kiellänge (bei geradem Fortlaufe) gestellt werden muß, um die möglichst größte Wirkung zu äußern.

Der Verfasser folgt im Nachstehenden ganz dem Gange des großen Meisters Euler. Ist dann V die secundliche Fortlaufgeschwindigkeit

Fig. 212a.



des Schiffes in der Richtung von B nach A und α der Winkel, welchen die Steuerruderfläche BLK mit $\overline{AB}$ bildet, so erfährt (nach Gleichung I) das Steuerruder in seinem Schwerpunkte L einen Normaldruck, welcher gleich ist:

$$(1)\quad N = \frac{k_1 \gamma F V^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Zerlegt man diesen (durch $\overline{Lb}$ dargestellten) Druck in die beiden Composanten $\overline{Lq}$ normal zu $\overline{AB}$ und $\overline{Lp}$ parallel zu $\overline{AB}$, so ergiebt sich:

$$(2)\quad \overline{Lq} = N \cos \alpha = \frac{k_1 \gamma F V^2}{2g} \sin^2 \alpha \cos \alpha \text{ und}$$

$$(3)\quad \overline{Lp} = N \sin \alpha = \frac{k_1 \gamma F V^2}{2g} \sin^3 \alpha.$$

Ist dann F die Projection des Schiffsschwerpunktes S auf der horizontalen Schnittfläche $\overline{AB}$ des Schiffes, so erhält man für das Drehmoment $= M$, zufolge welchen das Schiff nach rechts hin, nach $\overline{AZ}$ (der Steuerbordseite) um $\overline{FS}$ als Achse gedreht wird, wenn man überdies $\overline{BF} = a$ und $\overline{BL} = l$ [1]) setzt:

$$M = \frac{k_1 \gamma F V^2}{2g} \sin^2 \alpha \cos \alpha \, [a + l \cos \alpha] + \frac{k_1 \gamma F V^2}{2g} \sin^3 \alpha \, [l \sin \alpha],$$

$$\text{I.}\quad M = \frac{k_1 \gamma F V^2}{2g} \, l \sin^2 \alpha + \frac{k_1 \gamma F V^2}{2g} \, a \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Zunächst erkennt man hieraus, daß für $\alpha =$ Null, die Wirksamkeit des Steuerruders ebenfalls $=$ Null, so wie für $\alpha = 90$ sehr klein ist, da l gegen a einen verhältnißmäßig geringen Werth hat.

Aus letzteren Resultaten erhellt aber, daß es eine Stellung (einen Werth für α) geben muß, wobei das Steuerruder die größtmöglichste Wirkung äußert.

Um (für unseren Zweck) die Lösung dieser Aufgabe auf möglichst einfachem Wege zu bewirken, benutzen wir die vorher gemachte

---

Watson 1776 besorgte englische Uebersetzung vor, welche betitelt ist: „A compleat theory of the construction and properties of Vessels“, woselbst der fragliche Gegenstand Pag. 180 unter der Ueberschrift sich findet: „Upon the Action of the Rudder in a direct course“.

[1]) Die ganze Breite $= 2l$ des Steuerruders läßt sich (nach Scott Russel) nach der Formel berechnen: $2l$ (Fuß) $= \frac{1}{60}$ Schiffslänge in Fußen $+ 1$ Fuß.

Angabe, daß l gegen a verhältnissmäßig klein ist und setzen demgemäß statt I. den Annäherungswerth:

$$\text{II.} \quad M = \frac{k_1 \gamma F V^2}{2g} \, a \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

Hieraus findet man aber leicht, daß sich der dem Maximum von M entsprechende Werth für α aus der Gleichung berechnet:

$$\cos \alpha = \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

so daß $\alpha = 54^\circ \, 44'$ ist.

Denselben Werth findet auch Euler (a. a. O., Pag. 136).

Offenbar gilt vorstehende Rechnung nur dann, wenn das Wasser völlig frei gegen das Steuerruder und zwar in der Richtung $\overline{AB}$ (oder von L nach p) abfließen kann, was jedoch nur bei dem tiefsten horizontalen Durchschnitt des Wasserraumes geschieht, wo derselbe vom Kiele begrenzt ist. Die höher liegenden horizontalen Durchschnitte dagegen erhalten, namentlich nach der Mitte hin, eine bedeutende nach Außen gewölbte Ausdehnung, wodurch dem Wasser der freie Lauf gegen das Steuerruder verwehrt wird.

Euler hat auch diesen Fall behandelt. Er bezeichnet nämlich den Winkel, welchen das Achterende des betreffenden Schwimmebenenschnittes mit der Längenachse einschließt, mit β und schreibt dann zuerst statt II:

$$M_1 = k_1 \frac{\gamma F V^2}{2g} \, a \sin^2 (\alpha + \beta) \cos \alpha.$$

Weiter macht Euler darauf aufmerksam, daß die Geschwindigkeit, womit in diesem Falle das Steuerruder getroffen wird, nicht mehr V, sondern, zufolge einer Gegenströmung, $V \cos \beta$ ist, folglich auch sein muß:

$$\text{III.} \quad M_1 = k_1 \frac{\gamma F V^2}{2g} \, a \cos^2 \beta \sin^2 (\alpha + \beta) \cos \alpha. \text{ [1]}$$

Endlich wird gezeigt, daß dies Drehmoment seinen Maximalwerth erreicht für $\alpha = 90 - \left(\frac{\beta + \delta}{2}\right)$, wo δ einen Hülfswinkel bezeichnet, welcher aus der Gleichung $\cos \delta = \frac{1}{3} \cos \beta$ gefunden wird [2]).

Hinsichtlich specieller Erörterungen dieses letzteren Gegenstandes muß der Verfasser auf folgende drei Bücher verweisen, wobei jedoch die Bemerkung nicht unterlassen werden kann, daß in den beiden ersten Quellen, in Bezug auf den fraglichen Gegenstand, keine anderen als die Formeln L. Euler's zu finden sind!

Die gedachten drei Bücher sind: Bobrik, Handbuch der practischen Seefahrtskunde. Zweiter Band, Zweite Abtheilung. Leipzig 1848, S. 2249 ff. [3]). — Lutschauning (Prof. für Schiffsbau an der k. k. Akademie für Handel und Nautik in Triest), „Die Theorie des Schiffes“. Triest 1879, S. 138 [4]). — White (Constructeur der englisch. Kriegsmarine), Handbuch für Schiffbau. Deutsche Bearbeitung. Leipzig 1879, S. 620 ff.

[1]) L. Euler, a. a. O., §. 52, Pag. 140.

[2]) Ebendaselbst §. 56.

[3]) In Bezug auf das Werk des Dr. Bobrik ist noch zu bemerken, daß er alle betreffenden Entwickelungen speciell aufführt und auch die Endresultate durch Zahlenbeispiele erläutert.

[4]) Lutschauning berechnete Tabellen zum noch besseren Verständniß

Die Gelegenheit benutzend, notirt der Verfasser noch zwei andere Quellen, worin man versucht hat, besondere Anwendung vom schiefen Stoße unbegrenzten Wassers gegen ebene Flächen zu machen. An beiden Stellen wird die Bewegung fliegender Brücken (Ponten) am Giertau auf Flüssen und Strömen behandelt, jedoch ohne Rücksicht auf die Gestalt und den Widerstand des Fährschiffes, nur mit Rücksicht auf das Gewicht des letzteren (den Körper des eingetauchten Schiffstheiles als ebene Fläche betrachtet). Beide Arbeiten sind wenigstens als nennenswerthe Versuche zur Lösung betreffender Aufgaben zu bezeichnen.

Die erste findet sich (als Aufgabe XXXII) in Lehmus' Buche: „Anwendungen des höheren Calculs“, Leipzig 1836, S. 160, unter der Ueberschrift: „Bestimmung der Zeit des Ueberganges einer fliegenden Brücke“. — Die zweite Arbeit, von Prof. Becker in Karlsruhe, ist in Förster's „Allgemeiner Bauzeitung“, Jahrg. 1847, S. 254 ff., abgedruckt und trägt die Ueberschrift: „Ueber fliegende Brücken“.

§. 185.

Weicht die vom unbegrenzten Wasser schief getroffene Fläche *CAD* mit einer Geschwindigkeit v in einer Richtung aus, welche rechtwinklig auf der Geschwindigkeit V, Fig. 213, des Wassers steht, so ermittelt man den Normaldruck gegen die Fläche, wenn man in I. des vorigen Paragraphen die entsprechende relative Geschwindigkeit $= U$ statt V einführt. Hierzu denke man sich Wasser und Fläche zu einer gemeinsamen Bewegung entgegengesetzt v angeregt, wodurch an der Wirkungsweise Nichts geändert, für den Rechnungsgang aber der Zustand herbeigeführt wird, als würde die ruhende Fläche vom Wasser mit einer Geschwindigkeit

Fig. 213.

$$U = \sqrt{V^2 + v^2}$$

getroffen, deren Richtung mit der Fläche einen Winkel $KAC = \beta$ bildet. Es ist daher der Normalstoß N:

$$(1) \quad N = k_1 \frac{\gamma}{2g} \cdot F(U \cdot \sin\beta)^2.$$

Setzt man ferner $\angle KAE = \delta$, so ist $\delta + \alpha - \beta = 90°$, also $\cos(90 + \beta) = \cos(\delta + \alpha)$ und daher $\sin\beta = \sin\delta \cdot \sin\alpha - \cos\delta \cos\alpha$,

der Formel III. und zwar besonders um darzuthun, wie sich mit der Schärfe des Schwimmschnittes, also mit dem Winkel β, auch α für die Maximalwirkung des Drehmoments ändert. Außerdem hebt dieser Autor hervor, daß die ganze (Euler'sche) Theorie nur für Segelschiffe und Raddampfer, nicht aber für Schraubenschiffe gilt, da bei letzteren das Steuerruder von einer Strömung getroffen wird, welche die Resultirende ist aus der oben genannten Gegenströmung und dem Wirbelstrome, den der Propeller erzeugt.

oder wegen $\sin \delta = \frac{V}{U}$, $\cos \delta = \frac{v}{U}$, auch $\sin \beta = \frac{V \sin \alpha}{U} - \frac{v \cos \alpha}{U}$ oder $U \sin \beta = (V \sin \alpha - v \cos \alpha)$, weshalb aus (1) wird:

$$(2) \quad N = k_1 \frac{\gamma}{2g} \cdot F (V \sin \alpha - v \cos \alpha)^2.$$

Zusatz 1. Aus letzterer Gleichung erhält man ohne Weiteres die bereits §. 128 erwähnte Kraft, womit frei strömendes Wasser das Rad eines Woltmann'schen Flügels (§. 126) in der Richtung der ausweichenden Fläche zur Umdrehung veranlaßt, zu

$$p = k_1 \frac{\gamma}{2g} \cdot F (V \sin \alpha - v \cos \alpha)^2 \cos \alpha,$$

wenn dabei von Wasserreibungen und Zapfenreibungen abgesehen wird.

Sodann ergiebt sich aber:

$$V = v \operatorname{cotg} \alpha + \sqrt{\frac{2gp}{k_1 \gamma \cdot F \sin^2 \alpha \cos \alpha}},$$

oder, wenn r den Halbmesser des Stoßmittelpunktes vom Flügel bezeichnet und v gleichzeitig die Peripheriegeschwindigkeit dieses Punktes ist, endlich in T Secunden u Umdrehungen erfolgen:

$$(3) \quad V = \frac{2r\pi}{T} \cdot u \cdot \operatorname{cotg} \alpha + \sqrt{\frac{2gp}{k_1 \gamma \cdot F \sin^2 \alpha \cos \alpha}}.$$

In diesem Ausdrucke kommen unter Voraussetzung ebener Flügel (wie dies bei manchen Woltmann'schen Flügeln der Fall ist), außer u nur bekannte Größen vor, so daß man setzen kann, wenn A und B betreffende Coefficienten bezeichnen:

$$V = A + Bu,$$

was genau der auf empirischem Wege, §. 128, abgeleitete Werth ist.

Zusatz 2. Eine fernere Anwendung der Gleichung (2) bietet die Ermittlung der mechanischen Arbeit $= \mathfrak{A}$, welche fließendes, unbegrenztes Wasser auf ein sogenanntes Sprengel'sches Wasserrad[1]) im freien Strome (einen Woltmann'schen Flügel mit ebenen Trapezflächen als Kraftmaschine) überträgt.

Wir bezeichnen hierzu mit x (Bezug nehmend auf Fig. 213ᵃ) die Entfernung $\overline{AE}$ eines beliebigen Flügelelementes von der Drehachse

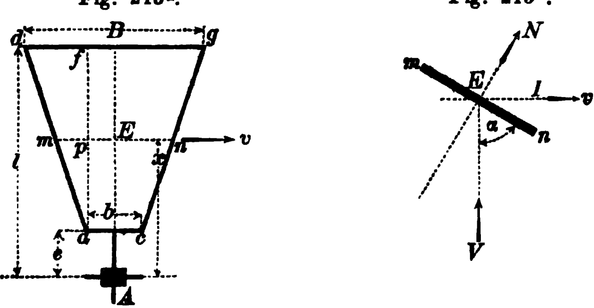


Fig. 213ᵃ. Fig. 213ᵇ.

[1]) Allgemeine Maschinenlehre des Verfassers. Bd. 1, S. 340 (2. Auflage).

und die Geschwindigkeit, womit dasselbe dem Wasser ausweicht, mit v, erhalten daher auch, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des Flügels für den Beharrungszustand bezeichnet:

$$v = \omega x.$$

Die correspondirende elementare Arbeit $= d\mathfrak{A}$, in der Richtung $\overline{AJ}$, Fig. 213^b, des ausweichenden Flügels, da hierzu dN in (2) mit $x\omega \cos \alpha$ zu multipliciren und dF statt F zu setzen ist, ergiebt sich daher für ebene, nur schief gestellte Flügel:

$$(4) \quad d\mathfrak{A} = k_1 \frac{\gamma}{2g} dF (V \sin \alpha - x\omega \cos \alpha)^2 x\omega \cos \alpha.$$

Da F als Function von x auszudrücken ist, so werde noch der Flügelradius mit l, die Entfernung des ersten Flügelelementes von der Drehachse A mit e bezeichnet, so wie $\overline{gd} = B$ und $\overline{ac} = b$ gesetzt. Sodann erhält man:

$$\overline{mn} = b + 2\overline{mp} = b + \frac{B - b}{l - e}(l - x)$$

und daher:

$$dF = \left[b + \frac{(B - b)}{l - e}(l - x)\right] dx.$$

Um die Reibungswiderstände sowohl am Wellendzapfen vom Halbmesser $= \varrho_1$ der Flügelwelle, als am Halslager derselben (wo $\varrho_2 =$ Wellradius ist), unmittelbar an der Flügelebene in Rechnung bringen zu können, sind folgende Bemerkuugen zu beachten.

Die Zerlegung des Normaldruckes (2) in die Richtung von v ergiebt (jetzt dN) zwar ganz richtig die eine Seitenkraft $dN \cos \alpha$, jedoch tritt auch gleichzeitig die zugehörige (zweite) Seitenkraft auf, nämlich $dN . \sin \alpha$, deren Richtung mit der Achse der Flügelwelle zusammenfällt. Außerdem ist der Druck W gegen das Halslager zu ermitteln, so wie die passenden Reibungscoefficienten, beziehungsweise f_1 und f_2 zu wählen.

Sodann erhält man statt (4):

$$(5) \quad \mathfrak{A} = k_1 \frac{\gamma}{2g} \int_e^l dF \, [V \sin \alpha - x\omega \cos \alpha]^2 x\omega \cos \alpha -$$

$$- \tfrac{2}{3} f_1 \varrho_1 \frac{k_1 \gamma}{2g} \int_e^l dF \, [V \sin \alpha - x\omega \cos \alpha]^2 \sin \alpha - f_2 \varrho_2 W . \omega.$$

Für ein constantes α (Sprengel nahm $\alpha = 64^\circ 26' 24''$) [1]) und für rectanguläre Flügel vereinfacht sich die erforderliche Integration bedeutend, so daß man erhält:

$$(6) \quad \mathfrak{A} = k_1 \frac{\gamma}{2g} \omega b \cos \alpha \int_e^l [V \sin \alpha - x\omega \cos \alpha]^2 x dx -$$

$$- \frac{k_1}{3} \frac{\gamma}{g} f_1 \varrho_1 \sin \alpha \int_e^l [V \sin \alpha - x\omega \cos \alpha]^2 dx - f_2 \varrho_2 W\omega.$$

---

[1]) Notizblatt des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins, Bd. 2 (1852—53), S. 190.

Zusatz 3. Aus letzterem Ausdrucke läßt sich noch die S. 380 mitgetheilte Formel **Baumgarten's** ableiten[1]), welche dieser Ingenieur seiner Zeit empfahl, um mittelst des Woltmann'schen Flügels, aus dessen Umdrehzahlen $= U$, die Geschwindigkeit in Betten fließenden Wassers möglichst genau berechnen zu können.

Offenbar läßt sich (6) auf folgende Form bringen:

$$(mV^2 - n\omega V - p\omega^2) = (m_1 V^2 - n_1 \omega V - p_1 \omega^2) + R + \mathfrak{A}.$$

Verkürzt man diese Gleichung ferner entsprechend und ersetzt ω durch die Umdrehzahl U des Flügels, so kann man schließlich schreiben:

$$V^2 - 2kUV - \lambda U^2 = \mu,$$

woraus folgt

$$V = kU + \sqrt{U^2 (k^2 + \lambda) + \mu},$$

oder für $k^2 + \lambda = r$:

$$(7) \quad V = kU + \sqrt{rU^2 + \mu},$$

wie angegeben.

Wie man in vorstehenden Fällen für doppelt gekrümmte Flächen zu operiren hat, d. h. wenn v und α zugleich veränderlich sind, dürfte selbstverständlich sein, soll jedoch später bei den sogenannten holländischen Windmühlenflügeln mit erledigt werden.

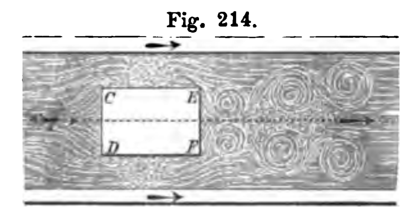
§. 186.

Stoß unbegrenzten Wassers gegen feste Körper.

Werden feste Körper vom bewegten Wasser getroffen, so hängt die Größe des entsprechenden hydraulischen Druckes oder Stoßes von der Ausdehnung, Gestalt, dem Anhängen (der Reibung) der Flüssigkeit an den Begrenzungsflächen etc., überhaupt von so viel Umständen ab, daß man sich hier, mit Ausnahme einiger ganz speciellen Fälle, ausschließlich mit Ergebnissen aus Versuchen begnügen muß.

Beispielsweise werde Nachstehendes aufgeführt.

Fig. 214.



Strömt das Wasser gegen feste unbewegliche Prismen $DCEF$, wie Fig. 214, mit ebenen Endflächen, und liegen deren Achsen überdies in der Bewegungsrichtung, so läßt sich der bewirkte hydraulische Druck $= P$ immer noch mittelst der Gleichung berechnen:

$$P = k \cdot \gamma \cdot A \frac{V^2}{2g}.$$

Hierbei ist jedoch k mit der Länge $= L$ des Prismas und mit der Quadratwurzel aus dem Querschnitte $= A$, rechtwinklig

[1]) Eine etwas andere Ableitung giebt **Bresse** in seiner Hydraulique, §. 113.

zur Länge genommen verschieden. Versuche von Dubuat[1]) und Duchemin[2]) geben über letztere Beziehung Auskunft.

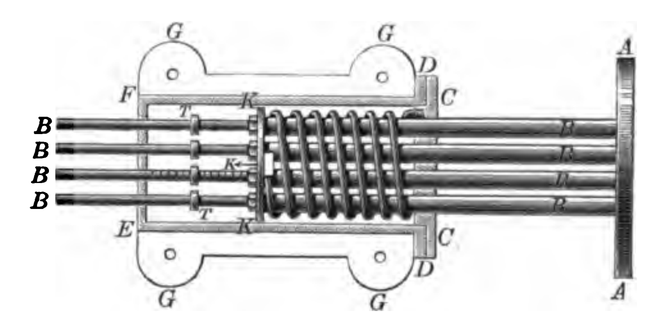
Nach Dubuat ist für	$\frac{L}{\sqrt{A}} =$	0,00	1,00	3,00	6,00
	k	1,865	1,451	1,323	1,360
Nach Duchemin für	$\frac{L}{\sqrt{A}}$	0,00	1,00	2,00	3,00
	k	1,864	1,477	1,347	1,328

Die Wirkung unbegrenzten Wassers gegen ruhende feste Körper hat man wenig oder gar nicht direct ermittelt, betrachtet vielmehr diese Wirkung als identisch mit dem Widerstande, welchen unter sonst gleichen Umständen diese Körper erfahren, wenn sie in ruhigem Wasser bewegt werden, wovon im folgenden Capitel die Rede sein wird.

Zusatz. Die einzige zuverlässige Erfahrung über Wirkung der Meereswellen gegen Bauconstructionen verdanken wir dem englischen Ingenieur Thomas Stevenson, welcher mit einem geeigneten Instrumente, von ihm Marine-Dynamometer genannt, in den Jahren 1842 bis 1846 incl. an drei verschiedenen Orten Messungen anstellte, nämlich an der Irish-Sea auf Little Roß (Bay of Kirkcudbright), im atlantischen Ocean an den Skerryvore Rocks, auf der Insel Tyree, Argyllshyre (Ostküste Schottlands) und in der Nordsee (German Ocean) am Bell-Rock-Leuchtthurm[3]).

Die allgemeine Anordnung des benutzten Dynamometers erhellt aus Fig. 214ª, welche dasselbe im Längenschnitte darstellt.

Fig. 214ª.



[1]) Principes, Nr. 484 und Poncelet: Introduction à la mécanique industrielle, Nr. 414.

[2]) Poncelet: Ebendaselbst, Pag. 594.

[3]) Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XVI (1849),

DEFD ist ein gußeiserner Cylinder, welcher mittelst Flantschen *GG*, die außerhalb parallel der Cylinderachse angebracht sind und womit das Instrument seitwärts, an einem geeigneten, vorspringenden Felskopfe so befestigt wurde, daß die Wellen in der Richtung der horizontalen Achse, gegen eine außerhalb befindliche ebene Platte (Kreisscheibe) *A* in normaler Richtung wirken konnten. Zum Tragen und Führen der Platte *A* dienten vier Rundeisenstangen *BB*, die einerseits durch einen Deckel *CC* gingen, anderseits durch entsprechende Löcher im Boden *EF* des Cylinders hindurchtraten.

Im Innern des Cylinders *DEFD* ist an dem Deckel *CC* das eine Ende einer sehr starken Stahlfeder (a very strong steel spring)[1]) befestigt, während das andere oder freie Ende dieser Feder mit einer dünnen kreisförmigen Scheibe *K* verbunden war, die man wieder mit den vier Rundstangen *BB* unabänderlich vereinigt hatte.

Ferner waren Lederringe *TT* (mit etwas Reibung gleitend) auf den Stangen *BB* verschiebbar angebracht, die als Marken dienten, um die Größe der Strecke registriren zu können, bis zu welcher die Stangen *BB* aus den Löchern des Bodens *EF* durch den Wasserstoß herausgetrieben waren, oder, mit anderen Worten, um welche Längen die Feder zufolge des Wellenschlages ausgedehnt wurde.

Mittelst dieses mechanischen Instrumentes (wobei die Stoßplatte *A* von 3 bis 9 Zoll, meist 6 Zoll Durchmesser hatte) fand Stevenson an der Insel Skerryvore, wo die Heftigkeit der Wellen die gewöhnlichen Grenzen überschreitet, den hydraulischen Druck (Stoß) zu:

611 Pfd. pro Quadratfuß engl., oder zu 2992 Kil. pro Quadratmeter (als Mittelwerthe) während der 5 Sommermonate 1843 und 1844.

Ferner zu:

2086 Pfd. pro Quadratfuß, oder zu 10217 Kil. pro Quadratmeter, während der 6 Wintermonate derselben Jahre.

Der allergrößte überhaupt beobachtete Druck war:

6083 Pfd. pro Quadratfuß engl., oder 29797 Kil. pro Quadratmeter,

Der am Bell-Rock Leuchtthurme beobachtete größte Druck betrug 3013 Pfd. pro Quadratfuß engl., oder 14753 Kil. pro Quadratmeter.

Benutzt man zur Berechnung der Geschwindigkeit *V*, womit der betreffende Wellenschlag erfolgte, die Formel dieses Paragraphen und nimmt (nach Dubuat) $k = 1,865$, also:

$$P = 1,865\,\gamma A \frac{V^2}{2g},$$

setzt ferner $P = 29800$, $A = 1$ und $g = 9,81$, so ergiebt sich:

$$V = \sqrt{\frac{29800 \,.\, 2 \,.\, 9,81}{1,865 \,.\, 1000}} = 17^{m},67.$$

Pag. 23 unter der Ueberschrift: „Account of Experiments upon the force of the waves" etc. Ferner T. Stevenson, The Design and Constructions of Harbours. Edinburgh, 1864, Pag. 39 etc. Hieraus in Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst. Dritter Theil. Erster Band. Zweite Auflage. Berlin 1878, S. 120.

[1]) Im Originale ist überall nur von einer Feder die Rede, während deutsche Berichterstatter (u. A. Franzius und Sonne im 3. Bande, S. 702 des Handbuches der Ingenieur-Wissenschaften) von vier Federn berichten.

Zum Vergleiche werde erwähnt, daß nach Gebr. Weber[1]) die Geschwindigkeit der Meereswellen vom Engländer Thomson zu 29,49 engl. Meilen pro Stunde, oder zu $13^m,19$ pro Secunde beobachtet wurden. Gaudry[2]) giebt die größten Geschwindigkeiten der Meereswellen zu 50 bis 60 Kilometer pro Stunde an, was $13^m,88$ bis $16^m,66$ pro Secunde ausmacht.

Beiläufig bemerkt, wird die Maximalhöhe der Wellen für den großen Ocean, von dem vertrauenswerthen Horner[3]), zu 25 bis 32 pariser Fuß, d. i. zu $8^m,125$ bis $10^m,40$ angegeben. Darcy[4]) berichtet von 15^m hohen Wellen, Weber[5]) sogar von solchen über 20 Meter Höhe.

White[6]) erwähnt ganz richtig, daß über so bedeutende Wellenhöhen keine zuverlässigen Mittheilungen existiren und bezeichnet das größte glaubwürdige Maaß, nämlich Höhen von 44 Fuß englisch (13,42 Meter) bis 48 Fuß (14,64 Meter), als etwas ganz Außerordentliches. Derselbe Sachverständige bemerkt übrigens ganz richtig, daß sich alle diese Angaben auf einen einfachen Seegang beziehen und daß dabei ausgeschlossen ist, daß sich mehrere Wellenzüge über einander thürmen, oder daß irgend eine locale Erhöhung des Wasserspiegels durch Anstauung der Wellen gegen das Ufer oder durch Passiren über einen vereinzelten Felsen entsteht[7]).

Nachschrift. Hagen, im Handbuche der Wasserbaukunst[8]), will diesen Stevenson'schen Resultaten, selbst für eine bestimmte Localität, keine allgemeine Gültigkeit gestatten und hält dieselben vorzugsweise davon abhängig, in welcher Art die Wellen anlaufen etc. Zweifelhaft sei es ferner, ob der Stoß der Ausdehnung der getroffenen Scheibe proportional ist und ob die letztere, in Folge ihres Trägheitsmomentes, nicht weiter zurückwich, als der Druck des Wassers es erfordert hätte.

Manche dieser Bedenken sind unstreitig richtig und rathen zur Vorsicht bei Benutzung der Stevenson'schen Zahlenwerthe. Jedoch ist zu bedauern, daß Hagen nur Tadel für Stevenson hat und bei seiner einflußreichen Fachstellung im großen preußischen Staate und bei den gewiß vorhandenen Gelegenheiten, nicht direct oder indirect zur Anstellung neuer (und vollkommener) Versuche über „Wirkung der Wellen gegen Bauconstructionen“ Veranlassung gegeben hat.

---

[1]) „Wellenlehre auf Experimente gegründet“. Leipzig 1826, S. 56. Auch Gehler's Physik. Wörterbuch (Artikel „Meer“), Bd. 6, S. 1743.

[2]) Traité des maschines à vapeur. Sec. Part., Nr. 840, Pag. 448.

[3]) Gehler's Physik. Wörterbuch (Meer), S. 1742.

[4]) Ebendaselbst, S. 448.

[5]) Wellenlehre, S. 45.

[6]) Handbuch für Schiffbau. Deutsch bearbeitet von Schlick und van Hüllen. Leipzig 1879, S. 176.

[7]) Höchst beachtenswerth ist im 5. Abschnitte des White'schen Buches, von S. 168 ab, eine Abhandlung, welche die Ueberschrift trägt: „Methoden zur Beobachtung der Dimensionen und Perioden der Wellen, nach dem von der englischen Admiralität acceptirten Vorschlage von Froude“.

[8]) Dritter Theil (das Meer). Erster Band (Seeufer- und Hafenbau), S. 120 (Zweite Auflage).

Zweites Capitel.

Widerstand des Wassers gegen bewegte feste Körper.

§. 187.

Im Allgemeinen sind, unter sonst gleichen Umständen, die Erscheinungen des Widerstandes der Flüssigkeiten dieselben wie die des Stoßes, und daher auch die theoretischen Sätze des letzteren auf den Widerstand anwendbar, welchen feste Körper erfahren, wenn sie in Flüssigkeiten (widerstehenden Mitteln) bewegt werden.

Wir unterscheiden im Nachfolgenden, ob die festen Körper im Wasser völlig eingetaucht sind, oder nur zum Theil von diesem umgeben werden.

A. Völlig eingetauchte feste Körper.

1. Widerstand ebener Flächen bei geradliniger Bewegung der letzteren.

Hier macht man wieder von dem Ausdrucke (1), §. 183, Gebrauch, d. h. setzt für den fraglichen Widerstand $= P$:

$$P = (m + n) \cdot \gamma A \cdot \frac{V^2}{2g} = k \gamma A \frac{V^2}{2g}.$$

Für kleine Flächen (1 Quadratfuß Querschnitt mit 3 Fuß Geschwindigkeit bewegt) fand Dubuat: $m = 1$ und $n = 0{,}433$, also $k = 1{,}433$. Letzterer Werth stimmt auch mit einem Versuchsresultate Pambour's[1]) überein, während Poncelet[2]) räth, allgemein $k = 1{,}30$ zu setzen.

Nach Versuchen von Piobert, Morin und Didion[3]), mit Flächen von 0,03 bis 0,25 Quadratmeter Inhalt, ist für P zu setzen:

$$P = 0{,}934 \cdot A + 2{,}81 \cdot \gamma A \frac{V^2}{2g},$$

wenn A und V in Quadratmetern und Metern, und P in Kilogramm ausgedrückt werden.

Mit Vernachlässigung des ersten Gliedes folgt, auf beliebiges Maaß bezogen:

$$P = 2{,}81 \cdot \gamma A \frac{V^2}{2g},$$

wonach $k = 2{,}81$, d. h. doppelt so groß wie bei Dubuat ist, ein Unterschied, der seinen Grund in der Größe der Versuchsfläche hat (S. 597, zweite Note)[4]).

---

[1]) Gaudry: Traité des machines à vapeur. Paris 1856, T. I, Pag. 70.

[2]) Introduction etc., Pag. 537.

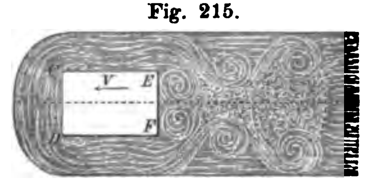
[3]) Poncelet: Introduction à la mécanique industrielle, Pag. 582.

[4]) Nach Campaignac (Gaudry a. a. O., Pag. 70) soll k bei den Schaufeln der Ruderräder von 1,24 bis 3,90 variiren, wofür derselbe 2,76 als Mittelwerth in Rechnung bringt. Redtenbacher (Resultate etc., S. 299. Sechste Auflage) nimmt, für denselben Fall, $k = \frac{125}{51} = 2{,}5$. Garthe in seiner Schrift: „Prüfung der Leistungsfähigkeit etc. eines Dampfschiffes“ (Köln 1852) empfiehlt (S. 7) als Widerstandscoefficienten der Ruderradschaufeln (ebenfalls) $k = 2{,}5$ zu nehmen.

Nicht unwichtig dürfte die Bemerkung sein, daß im Allgemeinen k größer ist bei geradliniger als (unter sonst gleichen Umständen) bei kreisförmiger Bewegung, so wie daß alle vorbemerkten Resultate eine durchaus gleichförmige Bewegung voraussetzen.

2. Widerstand rechtwinkliger Prismen. Werden Prismen wie $CDEF$, Fig. 215, ihrer Längenachse nach parallel im ruhenden Wasser bewegt, und bezeichnet wiederum L deren Länge und A den Querschnitt normal zu L, so ist mit Bezug auf die Widerstandsformel

Fig. 215.



$$P = k\gamma A \frac{v^2}{2g}:$$

Nach Dubuat wenn				
	$\frac{L}{\sqrt{A}} =$	0,00	1,00	3,00
	$k =$	1,433	1,172	1,101

Nach Duchemin wenn					
	$\frac{L}{\sqrt{A}} =$	0,00	1,00	2,00	3,00
	$k =$	1,254	1,282	1,300	1,326

Hinsichtlich des Einflusses der Länge sind hier die Angaben im Widerspruche. Poncelet räth jedoch, die Schlüsse Duchemin's nicht als entscheidend zu betrachten.

3. Widerstand von Körpern verschiedener Gestalt. Aus den Versuchen von Borda und Hutton hat Poncelet[1]) nachfolgende Zusammenstellung gemacht, wobei die Zahlenwerthe das Verhältniß des Widerstandes der erhabenen Außenseite zu dem Widerstande gegen die Basis angeben[2]).

a. Der dreiseitige Keil mit ebenen Seitenflächen, zu seiner rectangulären Basis, wenn der Winkel an der Spitze ist { 90° (Borda). . 0,728; 60° „ . . 0,520

b. Dreiseitiger Keil mit Seitenflächen aus Kreisbögen von 60°, diese von den Gegenecken beschrieben, in Bezug auf seine rectanguläre Basis (Borda) 0,390

---

[1]) Introduction etc., Pag. 612.

[2]) Poncelet bedauert hier mit Recht den Mangel der directen Beziehung zum Widerstande der ebenen Fläche von derselben Gestalt und Größe wie die betreffenden Körperbasen. Nimmt man mit Poncelet (a. a. O., Pag. 587) allgemein 1,3 für die kleine ebene Fläche, so erhält man z. B. für die Kugel

$$k = 1{,}3 \,.\, 0{,}407 = 0{,}5291,$$

was mit Borda ($k = 0{,}56$) und Hutton ($k = 0{,}594$) beinahe übereinstimmt.

c.	Halbcylinder, die Grundfläche eine halbe Ellipse, welche um ein gleichschenkliges Dreieck beschrieben ist, im Verhältniß zum Widerstande gegen seine rectanguläre Basis (Borda)		0,430
d.	Halbcylinder, Halbkreis als Grundfläche in Bezug auf seine rectanguläre Basis (Borda)		0,570
e.	Kegel, die Spitze voraus, im Verhältniß zur kreisförmigen Basis desselben, wenn der Winkel an der Spitze ist	90° (Borda)	0,691
		60° "	0,543
		51°24′ (Hutton)	0,433
f.	Halbkugel zur ganzen Kugel (Borda und Hutton)		0,990
g.	Halbkugel zum größten Kreise derselben	Borda	0,405
		Hutton	0,413
		Vince	0,405
		Mittel:	0,407

B. Zum Theil eingetauchte (schwimmende) Körper.

Nach den Versuchen von Bossut, d'Alembert und Condorcet[1]) scheint bei nicht völlig in das Wasser getauchten Körpern der Widerstand etwas rascher als mit dem Quadrate der Geschwindigkeit zu wachsen, so wie sich ferner ergeben hat, daß unter sonst gleichen Umständen der Widerstand etwas größer ist für einen nahe an der Oberfläche als für einen in gewisser Tiefe schwimmenden Körper. Für die Praxis kann jedoch, wenn A den größten Querschnitt des eingetauchten Theiles vom Körper bezeichnet, der betreffende Widerstand abermals dargestellt werden durch:

$$P = k\gamma A \frac{v^2}{2g}.$$

a. Prismen (gerade) in der Achsenrichtung bewegt.

Aus einem Versuche Borda's, welcher eine parallelepipedische Kiste von 14 Zoll Höhe, im ruhigen Wasser rechtwinklig zu einer Seitenfläche so bewegte, daß genau ein Würfel von 1 Fuß Seite in das Wasser tauchte, berechnete Dubuat $k = 1{,}11$, während er $k = 1{,}172$ fand, sobald der Körper ganz unter Wasser getaucht war. Ersteren Werth von k räth Poncelet[2]) zu wählen, sobald die Länge wenigstens das Dreifache der horizontalen Breite ist. Nach d'Aubuisson soll $k = 1{,}0$ also am kleinsten sein, wenn die Länge des Prismas das Fünf- bis Sechsfache der Breite (oder vielmehr von $\sqrt{A}$) beträgt.

Vermehrt sich die Länge über letztere Grenze hinaus, so wächst k wieder, was sich durch die vermehrte Reibung (das Anhängen) des Wassers an den Seitenflächen erklären läßt.

---

[1]) Architecture Hydraulique, par Bélidor, nouvelle Édition (par Navier), Pag. 346, Note (*db*), §. 4.

[2]) Introduction, Pag. 596.

b. Prismen mit zugeschärften Vorder- und Hintertheilen.

Wie sehr man den Widerstaud schwimmender Prismen vermindert, wenn man die Vorderflächen nach Art mancher Schiffsvordertheile so gestaltet, daß dem Wasser gleichsam eine Schneide zugekehrt wird, lehren unter Andern die Versuche, welche hierüber Bossut, d'Alembert und Condorcet anstellten [1]). Nimmt man den Widerstand des Prismas ohne Vordertheil als Einheit, so erhält man, je nach den Winkeln des Vordertheiles, nachverzeichnete Werthe, vorausgesetzt, daß die Länge des ganzen Körpers das Fünf- bis Sechsfache der Breite ist.

Winkel des Vordertheils	180°	156°	132°	108°	84°	60°	36°	12°
Verhältniß der Widerstände	1,00	0,96	0,85	0,69	0,54	0,44	0,41	0,40

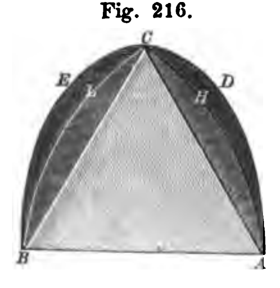
Die am Hintertheile der schwimmenden Prismen angebrachten Zuschärfungen vermindern zwar, wie man aus folgendem Täfelchen erkennt, ebenfalls den Widerstand, allein bei Weitem weniger wie die am Vordertheile.

Winkel am Hintertheile	180°	96°	48°	24°
Verhältniß der Widerstände	1,00	0,89	0,86	0,84

Noch mehr wird der Widerstand vermindert, wenn man Vorder- und Hintertheil, so wie endlich den Seitenflächen gekrümmte Formen giebt.

Ein interessanter Versuch von Borda [2]) giebt hierüber noch weitere Auskunft. Er nahm drei gerade Prismen, wovon das eine von ebenen Seitenflächen BC und AC, Fig. 216, begrenzt war, die mit AB ein gleichseitiges Dreieck ABC bildeten, das andere von Kreisbogen BLC und AHC, die aus A und B beschrieben waren, und endlich das dritte die Halbellipse $BECDA$ zur Außenfläche hatte. Indem er diese Prismen gleichförmig in unbegrenzter Flüssigkeit fortführte, ergab es sich, daß die Widerstände der Bewegung — je nachdem die ebene Fläche AB voranging oder der Winkel C, oder die Spitzen C

Fig. 216.



[1]) Nouvelles expériences, sur la résistance des fluides 1777. Im Auszug d'Aubuisson: Hydraulique, Nr. 264.

[2]) Mém. de l'académie etc., 1763, Pag. 370, und d'Aubuisson Hydraulique, Pag. 313. Borda's Versuch, zwar in der Luft augestellt, ist von Beaufoy später bestätigt worden, wie man bei d'Aubuisson a. a. O. nachlesen kann.

des Kreiskörpers *LCH*, oder endlich der Ellipse *ECD* — sich zu einander verhielten, wie die Zahlen 100 : 52 : 43 : 39.

c. *Schiffe auf Canälen und Flüssen.*

Aus dem Vorstehenden folgt von selbst, daß für Schiffe, je nach der Constructionsform der Vorder- und Hintertheile und besonders der sanften Abrundungen dieser Theile, so wie der Seitenflächen, nicht minder nach dem Verhältnisse der größten Breite zur Länge des Schiffes [1]), der Widerstandscoefficient k verschieden ausfallen muß, was auch die Erfahrung bestätigt, indem hier k im Allgemeinen von 1,10 bis 0,05 variirt.

In Bezug bestimmter Angaben für k wird man sich daher auf specielle Fälle beschränken müssen.

Nach Poncelet [2]) ist für große Moselschiffe, deren allgemeine nicht unvortheilhafte Gestalt Fig. 217 in Aufriß, Grundriß und Seitenansicht darstellt, $k = 0,33$ zu nehmen, so daß man erhält:

$$\text{I.} \quad P = 0,33 \, . \, \frac{\gamma A (V \pm v)^2}{2g} \, .$$

Fig. 217.

wenn V die Geschwindigkeit des Schiffes und v die des Flusses bezeichnet.

Nach Versuchen Morin's [3]) mit den seiner Zeit von Paris nach Meaux gehenden Postschiffen, die aus Eisenblech nach den besten schottischen Canalschiffen construirt waren und wovon Fig. 218 den Aufriß und Fig. 219 die Hälfte des in größerem Maaßstabe gezeichneten Grundrisses darstellt (die Hälfte *AB* das

Fig. 218.

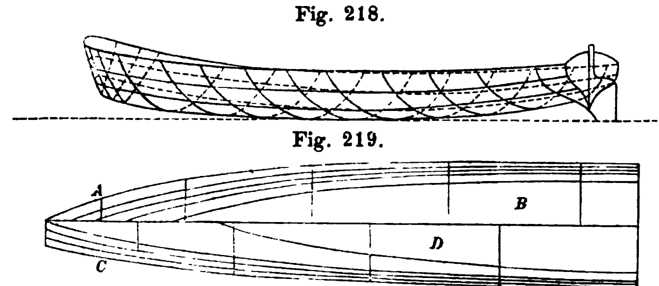


Fig. 219.

---

[1]) Nach Callon, Mathias und Gaudry (a. a. O., T. II, Pag. 418) ist das beste Verhältniß der Breite zur Länge wie 1 : 6 bis 1 : 8 bei Seedampfschiffen und 1 : 12 bis 1 : 15 für Flußdampfschiffe.

[2]) Introduction, Pag. 609.

[3]) Ebendaselbst, Pag. 609.

Vordertheil, CD das Hintertheil), ist $k = 0{,}207$ bis $0{,}271$ (je nach der Canalbreite), wofür man als Mittelwerth 0,24 wird annehmen können.

Bei Schiffsformen wie Fig. 218 und 219 ist daher:

$$\text{II.}\quad P = 0{,}24 \cdot \frac{\gamma A (V \pm v)^2}{2g}.$$

Garthe (a. a. O., S. 6) will für sehr viele Fälle an Rheinschiffen die Bestätigung des schon von Navier[1]) aufgestellten Satzes erhalten haben, daß

$$k \text{ von } 0{,}20 \text{ bis } 0{,}50$$

variiren kann, derartig, daß 0,2 für die beste (?) Form eines Flußschiffes und 0,5 für die schlechteste Form desselben angesehen werden darf.

Letztere Angaben stimmen mit Erfahrungen überein, welche Herr Bellingrath aus Versuchen mit einem Elbschiffe von 2000 Centner Tragfähigkeit gewonnen hat[2]).

Für einen solchen Kahn, wenn er leicht belastet wurde, ergab sich $k = 0{,}38$, wozu Bellingrath bemerkt, daß eine größere Belastung des Kahnes, die wegen seichten Wassers nicht ausführbar war, den Coefficienten noch günstiger gestaltet haben würde. Letztere Annahme stimmt recht gut mit den für k in I. und II. mitgetheilten Werthen überein.

Bemerkenswerth ist der von Redtenbacher (Calorische Maschine, 2. Auflage, S. 108) zur Berechnung des Gesammtwiderstandes (Vorder- und Hintertheil, so wie Reibung an den Seitenflächen) eingeschlagene Weg, wobei derselbe zu dem Resultate gelangt, daß der Reibungswiderstand an den Seitenflächen die beiden anderen Widerstände derartig übertreffe, daß man meistentheils letztere gegen den ersteren vernachlässigen könne.

Auf diese Voraussetzungen basirt, setzt Redtenbacher (für gut gebaute Fluß- wie Seeschiffe):

$$k = 0{,}00606 \left\{ \frac{2}{3} \frac{L}{T} + 2 \frac{L}{B} \right\}.$$

Fig. 220.

Hierbei bezeichnet L die Länge des Schiffes in der Schwimmebene gemessen und, mit Bezug auf Fig. 220, B die Breite seines Hauptspanten, so wie T die Tauchung (Einsenkung) desselben. Man sehe hierüber noch §. 188.

Zusatz 1. Bei Canalschiffen, die sich mit großen Geschwindigkeiten über 2,5 bis 2,8 Meter pro Secunde bewegen, wächst, nach den Versuchen von Macneill[3]) und von Russell[4]), der Widerstand in

---

[1]) Resumé des Leçons etc., IIIe Partie, Pag. 407.

[2]) Studien über Bau und Betriebsweise eines deutschen Canalnetzes. Von E. Bellingrath, Director der Ketten-Schleppschiffahrt der Oberelbe in Dresden. Berlin 1879.

[3]) Annales des ponts et chaussées, 1834, 3, Pag. 129.

[4]) Ebendaselbst, Jahrg. 1837, 3, Pag. 143.

größerem Verhältnisse als mit dem Quadrate der relativen oder beziehungsweise absoluten Geschwindigkeit der Bewegung. Zur Aufstellung allgemeiner, namentlich mathematischer Gesetze ist man jedoch nicht gelangt.

Zusatz 2. Bei Schiffen, welche sich auf engen Canälen und Flüssen bewegen und wo das Wasser zu beiden Seiten des Schiffes nicht mit gehöriger Leichtigkeit ausweichen kann, ist nach Dubuat aus Bossut's Versuchen der Widerstand P':

$$\text{V.} \quad P' = \frac{8{,}46}{2 + \frac{F'}{F}} \cdot P,$$

wenn P den Widerstand im unbegrenzten Wasser, F den Querschnitt des eingetauchten Theiles und F' den Wasserquerschnitt des Canales bezeichnet.

Hierbei wird für $F' = 6{,}46 \,.\, F$ der Werth $P' = P$, woraus folgt, daß wenn der Canalquerschnitt 6,46 mal so groß wie der des Prismas wird, der Widerstand gleich dem im unbegrenzten Wasser ist.

Hagen (Handbuch der Wasserbaukunst. Zweiter Theil, 4. Band, S. 196) erwähnt einer practischen Regel, wonach der fünffache Werth von $\frac{F'}{F}$ als genügend angesehen wird. Die Ueberschreitung dieses Werthes soll sich, mit Rücksicht auf die Ersparniß der Zugkraft, nicht mehr lohnen.

Der Werth V ändert sich nach der Gestalt und Größe der Schiffe, weshalb z. B. d'Aubuisson[1]) für die auf dem Canale von Languedoc benutzten Barken gefunden hat:

$$P' = 140 \frac{F^2 V^2}{F' + 2F} \text{ Kilogr.}$$

Nach Versuchen des französischen Ingenieurs Bazin am Canal de Bourgogne (Annales des Ponts et Chaussées, 1862, 2, Pag. 358), kann man für einen Zug von n zusammengekuppelten Canal- oder Flußschiffen (geschleppten Kähnen) statt des Coefficienten k, den Werth $\frac{k}{2}(n + 1)$ in Rechnung bringen. Dazu bemerkt Lagrené (Cours de Navigation Intérieure, Tome II, Pag. 96. Paris 1871), daß hierdurch noch nicht das wirkliche Gesetz ausgedrückt sei, solches vielmehr durch zahlreichere Versuche erst festzustellen sein würde.

Zusatz 3. Eine nützliche und theilweise auch practische Anwendung von vorstehenden Sätzen läßt sich zur Lösung passender Aufgaben für Dampfschiffe machen, welche mit flachem Boden und ohne Kiel gebaut sind und nicht die vollkommenen Zuschärfungen an beiden Enden besitzen, wie dies bei guten See- oder Meeresschiffen der Fall ist.

Zur Herleitung betreffender Formeln folgt der Verfasser Marestier und Redtenbacher. Ersterer entwickelte das Hauptsächlichste dieser Formeln in einer 1824 in Paris erschienenen Schrift, welche betitelt

[1]) Traité d'Hydraulique, Pag. 323.

ist: „Mémoire sur les bateaux à vapeur des états-unis d'Amérique", während Redtenbacher seine (ähnlichen) Gleichungen in einer 1853 erschienenen Abhandlung: „Die calorische Maschine", 2. Auflage, veröffentlichte.

Hierzu bezeichne A den Inhalt vom Parallelogramme des Hauptspanten, also mit Bezug auf Fig. 220: $A = BT$. Der thatsächlich vorhandene Flächeninhalt $= F$ des Hauptspantenquerschnittes ist, wegen der seitlichen Abrundungen, in der Regel kleiner, so daß $\frac{F}{A} < 1$ ist.

Fig. 220.

Schreibt man daher $F = mBT$, so variirt m zwischen 0,90 bis 1,0 für Canal- und Flußschiffe, für See- und Meeresschiffe von 0,70 bis 0,88. Campaignac (in seinem Werke „De l'état actuel de la navigation par la vapeur etc.") verzeichnet m für 13 verschiedene Dampfschiffe.

Bezeichnet man hiernach mit U die relative Geschwindigkeit $V \pm v$ des Schiffes gegen das Wasser und mit C die Umfangsgeschwindigkeit der Ruderräder gegen das Schiff, so wird man den Fortlaufswiderstand $= P$ des Schiffes setzen können:

$$(1) \quad P = k \frac{\gamma F}{2g} \cdot U^2 = k \frac{\gamma F}{2g} \cdot (V \pm v)^2.$$

Ist ferner a der Inhalt der gleichzeitig eintauchenden Schaufeln der Ruderräder, so hat man ebenso für den Druck $= p$ derselben gegen das Wasser:

$$(2) \quad p = \varkappa \frac{\gamma}{2g} a [C - U]^2 = \varkappa \frac{\gamma}{2g} a [C - (V \pm v)]^2.$$

Daher ergiebt sich auch die widerstehende Arbeit $= \mathfrak{A}$ des Schiffes zu:

$$(3) \quad \mathfrak{A} = k \frac{\gamma F}{2g} U^3,$$

so wie die erforderliche bewegende Arbeit $= \mathfrak{A}_1$ für die Ruderräder:

$$(4) \quad \mathfrak{A}_1 = \varkappa \frac{\gamma a}{2g} (C - U)^2 C.$$

Für den Beharrungszustand der Bewegung muß (1) gleich (2) sein, d. i.

$$(5) \quad kFU^2 = \varkappa a (C - U)^2,$$

woraus folgt:

$$(C - U)^2 = \frac{kFU^2}{\varkappa \cdot a}, \text{ so wie } \frac{C}{U} = 1 + \sqrt{\frac{kF}{\varkappa a}},$$

und weshalb man aus (4) erhält:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\varkappa \gamma a}{2g} \frac{kFU^2}{\varkappa a} \cdot C = \frac{\gamma k F}{2g} U^3 \left(\frac{C}{U}\right),$$

oder wenn N die Zahl der Total-Pferdekräfte bezeichnet:

$$\text{I.} \quad 75 \cdot N = \frac{\gamma k F}{2g} U^3 \left(\frac{C}{U}\right).$$

Unter Voraussetzung englischer Maaße, wo $\gamma = 62,5$ und $g = 32,2$ Fuß ist:

$$\text{II.} \quad 550 N = \frac{\gamma k F}{2g} U^3 \left(\frac{C}{U}\right).$$

Nach Navier und ebenfalls nach Garthe kann man den Widerstandscoefficienten, welcher den Schaufeln des Ruderrades als ebenen Flächen angehört, d. i. $\varkappa = 2,50$ setzen, so wie ferner annehmen, daß der Quotient $\frac{C}{U}$ für Flußschiffe $= 1,40$ ist.

Um die Nützlichkeit vorstehender Formeln für manche practische Zwecke durch Zahlenbeispiele darzuthun, entlehnt der Verfasser der wiederholt citirten Schrift des Dr. Garthe nachstehende Fälle und zwar deshalb noch, weil dieser Herr Gelegenheit hatte, die betreffenden Rechnungen durch Versuche mit Rheinschiffen (die zwischen Bonn und Ruhrort fahren) zu controlliren.

Beispiel 1. Es ist durch Rechnung zu ermitteln, ob ein Rhein-Schleppdampfschiff, dessen Propeller Schaufelräder sind, seiner Form nach, zu den bestmöglichen gehört oder nicht, wenn die hauptsächlichsten (von Garthe selbst ermittelten) Dimensionen und Verhältnisse folgende sind: [1])

Flächeninhalt des Hauptspantenquerschnittes $F = 32,50$ Quadratfuß engl.
" der Summe der eintauchenden Schaufelflächen beider Räder (6 . 8,645) $a = 51,87$ " "
Durchmesser jedes der Schaufelräder, von Mittelpunkt zu Mittelpunkt der Schaufel gemessen, durchschnittlich . . . . 11,88 Fuß.

Diese Räder machten pro Minute 26,46 Umläufe, weshalb sich die secundliche Umfangsgeschwindigkeit C derselben berechnete zu

$$C = 16,45 \text{ Fuß}.$$

Die betreffende Fahrt wurde stromaufwärts von Ruhrort nach Köln gemacht, wobei die Schiffsgeschwindigkeit 9,09 Fuß pro Secunde betrug, während der Rheinstrom daselbst die correspondirende mittlere Geschwindigkeit $v = 4,45$ Fuß hatte, die relative Geschwindigkeit also war:

$$U = V + v = 9,09 + 4,45 = 13,54 \text{ Fuß engl.}$$

Auflösung. Aus (5) der vorstehenden Gleichungen erhält man:

$$k = \frac{\varkappa a\,[C - U]^2}{F U^2},$$

folglich, wenn $\varkappa = 2,5$ angenommen wird, ergiebt sich nach Einsetzung vorstehender Zahlenwerthe:

$$k = \frac{2,5 \,.\, 51,87\,[16,45 - 13,54]^2}{32,5 \,.\, (13,54)^2},$$

d. i.: $k = 0,184$.

Da die Länge des Schiffes $L = 90$ Fuß, seine Breite $B = 14$ Fuß und seine Tauchung $T = 3$ Fuß betrug, also

$$\frac{L}{T} = 30 \text{ und } \frac{L}{B} = \frac{90}{14} = \frac{45}{7}$$

[1]) Das betreffende Dampfschiff hatte die englische Firma: Ditschbourne & Mann in Blackwell geliefert. Die betreffenden Maaße sind daher englische, die hier auch beibehalten wurden.

ist, so würde man nach Redtenbacher's Formel, S. 612, erhalten:

$$k = 0{,}00606 \left[\frac{2}{3} \cdot 30 + 2\frac{45}{7}\right] = 0{,}00606 \,.\, 32{,}85 = 0{,}1991.$$

In dem folgenden, mit „Geschichtliche Notizen über die Bestimmung des Widerstandes beim Fortlaufe der Schiffe im Wasser" überschriebenen §. 188, kommen wir auf diesen Gegenstand ausführlich zurück.

Beispiel 2. Es fragt sich, welche Umfangsgeschwindigkeit die Ruderräder desselben Dampfschiffes, bei einer Fahrt von Köln nach Bonn, mit der Geschwindigkeit von 9,32 Fuß engl. und bei der Wassergeschwindigkeit von 4,45 Fuß, also mit der relativen Geschwindigkeit 13,77 Fuß pro Secunde annehmen mußten, wenn man den Widerstandscoefficienten des Schiffes $k = 0{,}2$ und den der Schaufeln $\varkappa = 2{,}5$ setzte, alle sonstigen Werthe aber dieselben bleiben?

Auflösung. Aus Gleichung (5) erhält man für diesen Fall:

$$C = U\left[1 + \sqrt{\frac{kF}{\varkappa \alpha}}\right],$$

so wie nach Einsetzung vorstehender Zahlenwerthe:

$$C = 13{,}77 \left[1 + \sqrt{\frac{0{,}2 \,.\, 32{,}5}{2{,}5 \,.\, 51{,}87}}\right], \text{ d. i.}$$

$$C = 16{,}85 \text{ Fuß}.$$

Beobachtet wurden 27,4 Umläufe der Schaufelräder pro Minute, so daß sich deren secundliche Umfangsgeschwindigkeit $= C_1$ berechnete, zu:

$$C_1 = \frac{3{,}14 \,.\, 11{,}88 \,.\, 27{,}4}{60} = 17{,}03 \text{ Fuß}.$$

Hiernach ist die Differenz zwischen Rechnung (Theorie) und Experiment:

$$C_1 - C = 17{,}03 - 16{,}85 = 0{,}18 \text{ Fuß},$$

ein Resultat, welches hinreichend angiebt, daß die angewandten Maschinen unter dem zweckmäßigen Baue des Schiffes ihre Schuldigkeit gethan.

Beispiel 3. Wie viel effective Pferdekräfte müßten die Dampfmaschinen auf die Ruderradwelle des genannten Schleppdampfschiffes übertragen, wenn dasselbe mit der relativen Geschwindigkeit von ($U = V + v = 9{,}55 + 4{,}45$) 14 Fuß pro Secunde stromaufwärts fahren soll?

Auflösung. Da hier $U^3 = 14^3 = 2744$ ist, so erhält man zufolge II, wenn $\frac{C}{U} = 1{,}40$ genommen wird:

$$N_1 = \frac{62{,}5 \,.\, 0{,}184 \,.\, 32{,}5 \,.\, 2744 \,.\, 1{,}4}{2 \,.\, 32{,}2 \,.\, 550} = 40{,}5.$$

Soll dies Schleppdampfschiff zeitweise auch für den Personenverkehr benutzt werden und dann mit der relativen secundlichen Geschwin-

digkeit von 20,31 Fuß (circa 12 Knoten)[1]) stromaufwärts fahren, so berechnet sich nach derselben Gleichung, da jetzt $U^3 = (20,31)^3 = 8378$ ist:

$$N_2 = \frac{8378}{2744} \,.\, 40,5 = 3,05 \,.\, 40,5 = 123,6.$$

Hiernach könnte man als Mittelwerth der Dampfmaschinenarbeit setzen:

$$N = \frac{N_1 + N_2}{2} = \frac{164,1}{2} = 82,05.$$

Garthe berechnet in unserer Quelle (a. a. O., S. 15) die effective Arbeit der beiden vorhandenen Dampfmaschinen (nach Pambour) zu 88,4 Pferdekräften.

Anmerkung. Entsprechend der ersten Auflage dieses Buches wäre hier der Ort gewesen, zu noch anderen Anwendungen der Sätze vom schiefen Stoße des Wassers, die wesentlichsten, theoretischen Formeln für die Wirkungsweise der Schiffsschrauben (Schrauben-Propeller), ferner für die Ermittlung ihrer Gestalt, so wie zur Berechnung ihrer Dimensionen folgen zu lassen. Der Verfasser hält es jedoch für angemessener, der practischen Tendenz seines Buches folgend, hiervon abzusehen, da alle zur Zeit bekannten Theorien die (bereits in der Allgem. Maschinenlehre des Verfassers, Bd. IV, S. 159 ausgesprochene) Thatsache zeigen, daß die Gestalt der Schiffsschrauben, wie solche gegenwärtig die Constructeure für die vortheilhafteste halten, theoretisch nicht zu bestimmen ist. Mit letzterem Urtheile übereinstimmend ist das, was neuerdings Prof. Lewicki in seiner beachtenswerthen, im Nachstehenden aufgeführten Arbeit ausspricht und was also lautet: „Daß es noch keine Theorie giebt, welche alle Wirkungen in Betracht zieht, die auf die Construction der Schiffsschraube von wesentlichem Einfluß sind". Diesem allen gemäß werden hier nur folgende Werke und Abhandlungen genannt, deren Studium nach einander zu empfehlen ist:

Redtenbacher, „Die calorische Maschine", 2. Auflage. Mannheim 1853, S. 115 ff. — Derselbe in seinem Werke „Der Maschinenbau", Bd. 3, S. 174. Mannheim 1865. — Grashof in der 6. Auflage der Redtenbacherschen „Resultate für den Maschinenbau", S. 322. — Lewicki, „Ueber Schraubenpropeller" in der Zeitschrift „Der Civilingenieur". Jahrg. 1876 (Bd. XXII), S. 610. — Szily, „Zur Theorie der Propellerschraube" in derselben Zeitschrift. Jahrg. 1877 (Bd. XXIII), S. 177. — White, „Handbuch für Schiffbau". Deutsch bearbeitet von Schlick und van Hüllen. Leipzig 1879, von S. 575 an. Höchst beachtenswerthe Erfahrungsresultate, meist auf Versuchen von Froude basirt. Auf die Resultate des letzteren (leider zu früh verstorbenen) ausgezeichneten Theoretikers und Experimentators kommen wir im folgenden Paragraphen wieder zurück.

---

[1]) Die Knotenlänge = 6086,4 Fuß engl. gerechnet, erhält man

$$\text{Knoten pro Stunde} = \frac{3600 \,.\, U}{6086,4},$$

wenn U die secundliche Geschwindigkeit bezeichnet.

§. 188.

Geschichtliche Notizen,

betreffend den Widerstand der Schiffe bei ihrem Fortlaufe im Wasser.

Die erste bedeutsame mathematische Abhandlung, vorbemerkten Gegenstand betreffend, lieferte Leonhard Euler in seinem berühmten, 1749 in Petersburg erschienenen Werke: „Scientia Navalis etc.“ In diesem Werke hat Euler Alles, ja sogar mehr geleistet, als man bei seinem Mangel der practischen Kenntnisse des Seewesens erwarten durfte. Später bemühte sich Euler, dieses große Werk auch dem practischen Seemanne zugänglich und brauchbar zu machen, indem er eine Art Auszug verfaßte, dessen Original in französischer Sprache 1776 in Paris erschien und das ins Russische, Italienische und Englische, nicht aber ins Deutsche übersetzt wurde. Die englische Uebersetzung liegt dem Verfasser vor und führt den Titel: „A Complete Theory of the Construction and Properties of Vessels with practical conclusions for the management of Ships made easy to Navigators“. London 1776. Im zweiten Buche dieses letzteren Werkes räth Euler, unter Anwendung des Newton'schen Hauptsatzes (daß der Widerstand dem Quadrate der Fortlaufsgeschwindigkeit proportional sei), den Widerstand eines Schiffskörpers dadurch zu ermitteln, daß man die Fläche (die Haut) des im Wasser schwimmenden Theiles in so kleine Flächenstücke zerlegt, daß man jedes derselben als eine ebene Fläche von gewisser Neigung gegen die Bewegungsrichtung betrachten kann.

Sind auch manche Abschnitte dieses Werkes noch heute als brauchbar zu bezeichnen (beispielsweise die oben S. 598 aufgeführte Wirkungsweise der Steuerruder), so waren doch naturgemäß viele andere dieser Theorien, namentlich die, welche sich auf den Widerstand der Schiffe im Wasser bezogen, ohne mit den Schiffen selbst angestellte Experimente (ungeachtet der scharfsinnigsten analytischen Rechnungen), durchaus nicht von der Art, daß man die betreffenden Resultate als für die Praxis brauchbar hätte bezeichnen können.

Das Verdienst, Versuche in letzterer Beziehung vorgenommen zu haben, gebührt den Franzosen. Wahrscheinlich durch d'Alembert angeregt, trug 1775 Turgot, der bekannte Minister Ludwig XVI. (als Generalcontroleur der Finanzen), den drei Mitgliedern der Akademie der Wissenschaften, d'Alembert, Bossut und Condorcet, die Vornahme von Experimenten zur Ermittlung des Widerstandes auf, welchen ein in einem engen und nicht sehr tiefen Canal fortgehendes Schiff erleidet. Den Absichten des Ministers konnten die Genannten nicht anders Genüge leisten, als daß sie zuerst den Widerstand flüssiger Massen in unbegrenzten Behältnissen untersuchten, um Vergleichungsglieder für den vorliegenden Fall zu erhalten.

Zur Ausführung dieser Versuche bedienten sich die Akademiker kleiner Schiffe (Modelle) von $0^m,531$ bis $3^m,57$ Länge und von 0,325 bis $1^m,30$ Breite, welche man in einem Wasserbehälter der Pariser Militärschule (von einigen 30 Meter Länge und ungefähr halb so viel

Breite) an Seilen ziehend bewegte und die Zugkräfte in entsprechender Weise maaß[1]).

Die Hauptresultate dieser Versuche zeigten: Erstens, daß der Widerstand eines und desselben Körpers von beliebiger Gestalt, welcher eine flüssige Masse mit verschiedenen Geschwindigkeiten zertheilt, dem Quadrate der Geschwindigkeiten sehr nahe proportional ist und daß der senkrechte Widerstand ebener Flächen mit der Größe der letztern beziehungsweise zu- oder abnimmt.

Zweitens, daß der von schief zur Bewegungsrichtung gestellten Flächen herrührende Widerstand, unter sonst gleichen Umständen, sich bei Weitem nicht im Verhältnisse der Quadrate des Sinus vom Anstoßwinkel ändert und daß diese (Newton'sche) Theorie ganz unanwendbar ist, wenn die Anstoßwinkel klein sind.

Leider wurde die Reibung des Wassers längs den Wänden und dem Boden des Schiffes nicht ermittelt und in dieser Hinsicht nur bemerkt[2]), daß sie sehr unbedeutend sei, unter Umständen sogar das längere Schiff einen geringeren Widerstand zeige als das kürzere.

Da bei den Versuchen von 1775 die Frage nach dem Widerstande von schief gegen die Bewegung gerichteten Flächen nur nebenbei betrachtet worden war, so widmete man diesem Punkte, wegen seiner Wichtigkeit und seines Nutzens in der Schiffsbaukunst, eine Reihe besonderer Versuche, die 1778 in einem etwa doppelt so großen Wasserbehälter (an der Nordseite der alten Außenwerke von Paris) angestellt wurden.

Diese Versuche bestätigten die Resultate der ersten Reihe (von 1775), d. h. zeigten in noch höherem Maaße die Unzulänglichkeit der Theorie wenigstens in Ansehung des Theiles des Widerstandes, welcher sich auf das Quadrat vom Sinus des Anstoßwinkels bezieht.

Zeigten auch die Versuche, daß sich der Widerstand im Wasser bewegter prismatischer Körper wesentlich vermindert, wenn man sie mit Vordertheilen versieht, welche aus geneigten ebenen Flächen gebildet sind (wie dies heut zu Tage noch bei manchen Fährbooten etc. der Fall ist), so ließen sie doch die Frage unbestimmt, ob der Widerstand vieleckiger oder krummliniger Vordertheile nach eben den Gesetzen erfolge, wie der Widerstand solcher Vordertheile, die nur nach einem einzigen Winkel zugeschärft sind[3]). Eben so unbestimmt blieb die Frage, ob bei geänderten Vordertheilen die größere oder geringere Länge des Hintertheiles einen Einfluß auf den Widerstand habe. Im Allgemeinen wurde allerdings ein geringer Vortheil bei einem zugeschärften Hintertheile (statt des geraden, rechtwinklig zur Länge abgeschnittenen Endes) zugestanden, jedoch ohne ein allgemeines Gesetz

---

[1]) Hinsichtlich aller Details der betreffenden Schiffe und der Versuche überhaupt, ist zunächst auf das nachher (1777 in Paris) erschienene Werk zu verweisen: „Nouvelles expériences sur la résistance des fluides", ferner auf die Mittheilungen des Wesentlichsten aus dieser Schrift in Bossut's (1778 in Paris erschienener) „Hydrodynamique". Deutsch von Langsdorf (Frankfurt a. M. 1792). Zweiter Band, S. 314 ff. Endlich (ganz besonders) auf das (nachher, S. 625) erörterte Werk Bourgois.

[2]) Bossut, Hydrodynamik. Deutsche Ausgabe, Bd. 2, S. 853, §. 907.

[3]) Ebendaselbst, S. 415 ff.

auszusprechen. Als Beispiel für den besonderen Fall, daß das Hintertheil (im Grundrisse) ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Winkel von 48 Graden an der Spitze bildet, wird behauptet, daß sich hierdurch der Widerstand gegenüber dem gerade abgeschnittenen Hintertheile im Verhältnisse von $14 : 15\frac{3}{4}$ herausstellte[1]). Was endlich die Frage betrifft, welchen Einfluß die Länge eines Schiffes auf die Geschwindigkeit seines Fortlaufes habe, so kommt deren Beantwortung darauf hinaus, daß in allen Fällen ein gewisses Verhältniß zwischen Breite und Länge des Schiffes beobachtet werden muß, wenn die Fortlaufgeschwindigkeit ihr größtmögliches Maaß erreichen soll. Für Geschwindigkeiten von 2 bis 3 Fuß pro Secunde und bei Schiffen mit scharfem Hintertheile soll hierzu die Länge des Schiffes wenigstens drei Mal so groß sein, wie seine Breite. Für größere Fortlaufgeschwindigkeiten müßte dies Verhältniß größer sein. Letzterer Vorschrift wird aber noch zugefügt, „daß wenn die Länge hinlänglich ist, man durch Vergrößerung dieser Länge die Geschwindigkeit nothwendig vermindern würde, weil man dadurch die Reibung an den Wänden des Schiffes vergrößert; man muß indeß zugestehen, daß diese Reibung nicht gar merklich sei, und daß sie es auch nur auf beträchtliche Längen werden könnte“.

In höchst anerkennender Weise nützte der englische Obrist Marc Beaufoy durch in den Jahren 1793 bis 1798 in London angestellte Versuche und zwar in dem Wasser des über 400 Fuß langen und 11 bis 12 Fuß tiefen Greenland Docks, mit verschiedenen, namentlich auf die Schiffsform Bezug habenden Körpern. Die betreffenden Resultate wurden vollständig jedoch erst nach seinem Tode im Jahre 1834 durch den Sohn (Henry Beaufoy) veröffentlicht[2]), während vorher nur Auszüge, u. A. auch einer in deutscher Sprache (im Jahre 1827), vom damaligen Director der Wiener polytechnischen Schule, Herrn Prechtl[3]), bekannt geworden waren.

Beaufoy's Aufmerksamkeit auf den Widerstand im Wasser bewegter Körper wurde bereits im 15. Jahre seines Alters erregt, als er einen berühmten (englischen) Professor der Mathematik äußern hörte, ein Kegel erleide weniger Widerstand im Wasser, wenn er mit der Basis, als wenn er mit der Spitze gegen dasselbe bewegt werde[4]). Da der Jüngling diesen Satz bezweifelte, so ließ er sich sofort einen Kegel verfertigen, setzte ihn in einem großen Kühlschiffe der Bierbrauerei seines Vaters durch Gewichte in gleichförmige Bewegung und fand dadurch die im Voraus erwartete Widerlegung[5]).

---

[1]) Der Uebersetzer der Bossut'schen Hydrodynamik, Langsdorf (seiner Zeit Königl. Preuß. Rath und Salineninspector), begleitet diese Schlußfolge der Experimentatoren mit folgender Bemerkung (a. a. O., Bd. 2, S. 417): „Darum gab die Natur den Fischen zu ihrer Erleichterung im Schwimmen das zugespitzte hintere Ende“.

[2]) Der vollständige Titel des Beaufoy'schen Werkes lautet: „Nautical and hydraulic experiments“. Versprochen wurden hier drei Bände, während nach meinem Wissen nur ein Band (der erste) erschienen ist.

[3]) Jahrbücher des k. k. polyt. Institutes in Wien, Bd. 11 (1827), S. 56—75.

[4]) Vorrede zum vorgenannten großen Werke, Pag. VIII.

[5]) Es dürfte hier der Ort sein, auf Versuche mit Schiffsmodellen und

Die größeren, ausführlichen und genauen Versuche Beaufoy's wurden hauptsächlich auf Kosten einer englischen Gesellschaft (der Society for the improvement of naval architecture) angestellt. Hierbei wurden verschieden gestaltete Körper, Kugeln, Würfel, Cylinder, Parallelepipede etc., Körper mit Zuspitzungen an beiden Enden aus Kreis- und Ellipsenbogen gebildet, sowohl auf der Oberfläche, als auch völlig eingetaucht, mehrere Fuß tief unter dem Wasser, mit bestimmter Geschwindigkeit bewegt. Um den eigentlichen Zweck nicht zu verfehlen, wählte man zu den Versuchen auch ziemlich große Boote von der verschiedensten Bauart.

Interessant ist die Bemerkung in der Vorrede des citirten Werkes Beaufoy's, wo sich der Sohn verpflichtet hält, seiner gelehrten Frau Mutter seinen öffentlichen Dank für deren Mitwirkung bei den vielfachen, höchst mühsamen Berechnungen der Resultate aus den Versuchen auszusprechen[1]). Da hier Zweck und Raum ein specielles Eingehen auf die von Beaufoy erlangten Resultate nicht zulassen, so werde von den hauptsächlichsten Ergebnissen nur Nachstehendes berichtet.

Aus den Versuchen erhellt evident, daß der Widerstand im Wasser bewegter Körper aus drei Theilen besteht, nämlich:

erstens aus dem vordern Widerstande, d. i. demjenigen, welchen das Wasser auf jene Flächen ausübt, die dasselbe vorwärts drücken und welcher dem Stoße des Wassers gleich ist;

zweitens aus dem hinteren Widerstande, welcher dadurch erzeugt wird, daß an den Flächen des Hintertheils, je nach der Form desselben, bei der Vorwärtsbewegung ein relativ leerer Raum entsteht, welcher von dem umgebenden Wasser nicht augenblicklich ausgefüllt werden kann, daher ein angemessener Druck gegen das Vordertheil erzeugt wird;

drittens aus dem Reibungswiderstande an den Seiten- und

---

andern Körpern aufmerksam zu machen, welche seiner Zeit der schwedische Admiral Chapman (geb. 1721, gest. 1808) vornahm. Chapman war u. A. auch Verfasser des (1768 erschienenen) noch heute empfehlenswerthen Werkes „Architectura navalis mercatoria etc." — Mir ist leider nur die deutsche Uebersetzung einer auf den obigen fraglichen Gegenstand Bezug habenden Abhandlung bekannt, welche betitelt ist: „Bestimmung des Widerstandes unbegrenzter Massen vom Viceadmiral Chapman in Karlskrona". Der Uebersetzer ist der Königl. Preuß. Bauconducteur Clemens. Der Ort der Veröffentlichung ist Berlin, die betreffende Jahrzahl 1797. Aus der Clairbois'schen Uebersetzung des großen Chapman'schen Werkes theilt d'Aubuisson u. A. (Hydraulique, Pag. 315, §. 269) den interessanten Satz mit, daß Chapman mit Doppelkegeln Versuche anstellte, deren Resultat ergab, daß, wenn die stumpfere Spitze von beiden der Bewegung vorausging, der Widerstand geringer war, als wenn die schärfere Spitze vorausging und zwar im Verhältniß von 100 : 132.

[1]) S. XXVIII der Vorrede heißt es wörtlich also: „The calculations were made assisted by his wife, favoured alike in person and in mind, being a woman of considerable talent and scientific attainment, besides the usual female accomplishments in which she excelled, she was a good mathematician and practical astronomer, familiar with all the details of the observatory, the calculation of eclipses etc.; and by method and strict economy of her time, while the domestic arrangements proceeded with perfect regularity, she was never at a loss for leisure in the furtherance of her husband's pursuit".

Bodenflächen, welcher letzterer, unter Umständen, eine beträchtliche Größe erlangen kann.

Hinsichtlich der relativen Widerstände bei verschiedenen Formen der im Wasser bewegten Körper ergaben sich hauptsächlich folgende Sätze:

1) Den geringsten Widerstand zeigte ein Körper, bei welchem das Vordertheil durch zwei, sich an der Spitze schneidende Kreisbögen abgerundet ist, deren Halbmesser der Breite des Körpers gleich ist, die Zuspitzung des Hintertheils aber die dreifache Breite zur Länge hat.

2) Dieser Form kommt, rücksichtlich des geringsten Widerstandes, diejenige am nächsten, wo das Vordertheil in der Länge, gleich der dreifachen Breite des Körpers, nach einem Halbmesser abgerundet wurde, welcher 8 Mal so groß ist, als die Breite des Körpers; das Hintertheil aber (wie im vorgenannten Falle) in einer Länge gleich der dreifachen Breite zugespitzt ist.

3) Ein Schiff bewegt sich (unter sonst gleichen Umständen) mit dem geringsten Widerstande im Wasser, wenn dessen größte Breite vom Vordertheile (bow) um $\frac{2}{5}$ der ganzen Länge entfernt ist[1]).

4) Der hintere Widerstand eines im Wasser bewegten Körpers ist der geringste, wenn die Zuspitzung drei Mal so lang als die Breite ist.

5) Eine Verlängerung des Hintertheils (des Sterns) auf mehr als das Dreifache der Breite ist daher beim Schiffsbau ohne Nutzen.

In Deutschland wurden in den technischen Kreisen Beaufoy's Versuchsresultate zuerst durch Prechtl bekannt, der (1827) darüber (auszugsweise) Mittheilungen in dem bereits vorher citirten Bande (XI.) der Jahrbücher des Wiener polytechn. Instituts machte, besonders aber dieselben bei der Bearbeitung des Artikels „Dampfschiff" im 4. Bande (1833) seiner schätzbaren Encyklopädie benutzte und, nach meinem Wissen, überhaupt zuerst zeigte, wie man die Beaufoy'schen Resultate der Schiffswiderstände zur Berechnung der Maschinenpferdekräfte der betreffenden Betriebsdampfmaschinen zu benutzen im Stande ist.

Aus den zwei unten citirten von Prechtl gewählten Beispielen erhellt[2]), daß der Theil der erforderlichen mechanischen Arbeit, welcher allein zur Ueberwindung der Wasserreibung an den Seiten und am

---

[1]) Dieser Satz findet sich in der Vorrede des großen Beaufoy'schen Werkes Pag. XXIV. Diesem entsprechend würde die größte Breite dem Vordertheile des Schiffes näher liegen müssen, als dem Hintertheile. Später will man das Umgekehrte für richtiger halten. So beträgt z. B. beim Riesenschiffe Great Eastern die Länge des Vordertheiles 330 Fuß, die des Hintertheiles aber nur 230 Fuß. Andere geben dies Verhältniß wie 3 : 2 an. Man sehe deshalb die Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins, Jahrg. 1858 (Bd. IV), S. 477.

[2]) Das von Prechtl in den citirten Jahrbüchern gewählte Beispiel (a. a. O., S. 73) bezieht sich auf ein Flußdampfschiff von 120 Fuß Länge (in der Schwimmebene gemessen) und von 19 Fuß Breite, dessen Körper (die Schiffsschale) nach (aus Beaufoy's Versuchen entnommenen) vortheilhaften Dimensionen gebaut sein sollte. Für $2\frac{1}{2}$ Fuß Eintauchung und für eine Fortlaufgeschwindigkeit von 12 Fuß in der Secunde berechnet Prechtl die, wegen des Vorder- und Hintertheils etc. erwachsende, mechanische Arbeit zu 17100 Fuß-Pfund oder gleich 40 Pferdekräften, während er die der Seiten- und Bodenreibung entstammende Arbeit zu 8496 Fuß-Pfunden, also gleich $19\frac{3}{4}$ Pferdekräften ermittelt, so daß

Boden des Schiffes erforderlich wird, $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ der totalen widerstehenden Arbeit betragen kann, ein Resultat, das mit zu benutzen ist, um später gemachten Behauptungen entgegen zu treten, daß allein der Reibungswiderstand eines Schiffes mehr als $\frac{2}{3}$ vom Gesammtwiderstande betragen könne.

Zu bedauern war, daß Prechtl in dem erwähnten Artikel „Dampfschiff" seiner Encyklopädie noch der älteren (unrichtigen) Annahme (Daniel Bernoulli's) folgte, daß der von dem Propeller (Ruderrade) gegen das Wasser ausgeübte Druck der Differenz der Quadrate der Schaufelrad-Geschwindigkeit gegen das Wasser und der relativen Geschwindigkeit des Schiffes gegen das Wasser proportional genommen werden müsse, während schon 1824 Marestier[1]) der einzig richtigen Annahme (von Borda) gefolgt war, daß man jenen Widerstand dem Quadrate der Differenz gedachter Geschwindigkeiten proportional setzen müsse[2]).

---

sich die zum Fortlauf des Schiffes total erforderliche mechanische Arbeit zu $59\frac{3}{4}$ oder fast zu 60 Pferdekräften herausstellt.

Als Beispiel für seine Encyklopädie wählt Prechtl (nach Angaben Marestier's in dessen Mémoire sur les bateaux à vapeur des états-unis d'Amérique, Paris 1824, S. 64 etc.) das amerikanische Dampfschiff „Der Kanzler Livingston" von 156 Fuß engl. Länge und 38 Fuß engl. Breite, berechnet für 6 Fuß Eintauchung und unter Voraussetzung einer Fortlaufgeschwindigkeit von 9,514 Fuß pro Secunde, den Widerstand am Vorder- und Hintertheile zu 2709,0 Pfund, dagegen den, welcher der Reibung entspricht, zu nur 612,4 Pfund, so daß der Totalwiderstand 3321,4 Pfund beträgt. Diese Zahl mit 9,514 multiplicirt, liefert als Product eine Totalarbeit von 31600 Fuß-Pfunden, welche gleich $\frac{31600}{550}$, d. i. gleich 57,45 Pferdekräften ist.

Um in beiden Beispielen die erforderliche Pferdekraft der Betriebsdampfmaschinen zu berechnen, müssen die gefundenen Werthe noch mit dem Verhältniß der Umfangsgeschwindigkeit des Propellers (hier der Ruderräder) zur relativen Geschwindigkeit des Schiffes gegen das Wasser multiplicirt werden, eine Zahl, die schon Prechtl (Beispiel der Encyklopädie a. a. O., S. 31) zu 1,429 ermittelte.

[1]) Das vorher citirte Mémoire, Pag. 198.

[2]) Bezeichnet man, wie oben (S. 614), mit C die relative Geschwindigkeit des Umfanges eines Schaufelrades gegen das Schiff, ferner mit U die relative Geschwindigkeit des Schiffes gegen das Wasser und bezeichnet a die Summe der eingetauchten Schaufelflächen und k einen entsprechenden Erfahrungscoefficienten, so erhält man für den Druck der Schaufeln gegen das Wasser:

$ka\,(C^2 - U^2)$ nach Prechtl und
$ka\,(C - U)^2$ nach Marestier,

und demnach die Größe der erforderlichen bewegenden Arbeit (die Größe der betreffenden Betriebsdampfmaschine) zu

$ka\,(C^2 - U^2)V$ nach Prechtl und
$ka\,(C - U)^2 V$ nach Marestier.

Bezeichnet ferner A den Flächeninhalt des eigentlichen Theiles vom Hauptspanten des betreffenden Schiffes und K den Widerstand des Schiffes pro Flächeneinheit dieses Hauptspantens, so erhält man für beide Annahmen für den Widerstand des Schiffes KAU^2 und daher die bewegende Arbeit zu

$KAU^3 \sqrt{1 + \frac{KA}{ak}}$ nach Prechtl und

$KAU^3 \left(1 + \sqrt{\frac{KA}{ka}}\right)$ nach Marestier.

Wurden auch bereits in dem ersten Viertel dieses Jahrhunderts allerlei Einwendungen und Besorgnisse gegen die Genauigkeit des von Beaufoy gewählten Meßverfahrens laut[1]), so übten doch die erlangten Resultate wesentlichen Nutzen auf den (englischen und französischen) Schiffsbau aus und gewannen auch die absoluten Zahlenwerthe der Beaufoy'schen Resultate in neuer Zeit wieder die verdiente Anerkennung[2]).

Im Jahre 1828 bemühte sich der als technischer Schriftsteller bekannte Engländer (Civilingenieur) Thomas Tredgold[3]), den Gesammtwiderstand ($= W$) eines vorn und hinten zugespitzten, im Wasser schwimmenden Prismas durch die Gleichung darzustellen:

$$W = \frac{FU^2}{2g}(2 \sin^3\alpha + \sin^2\beta) + R.$$

Außer den bisherigen Bezeichnungen ist hier α der Winkel, welchen die Zuschärfung am Vordertheile mit der Längenachse des Prismas bildet, β derselbe Winkel für das Hintertheil.

Das erste Glied dieses Ausdruckes soll den Widerstand der Form (des Hauptspantens, der Trägheit der vom Schiffe zu zertheilenden Wassermasse), der zweite den der Reibung des Wassers an den Außenflächen des Schiffes darstellen.

Tredgold bemühte sich zwar, dieser Formel mittelst Versuchsresultaten von Bossut[4]), Vince[5]), Beaufoy[6]), Bevan[7]) u. A. einige practische Brauchbarkeit zu verschaffen, indeß gelang ihm dies in rechter Weise nicht, obwohl er seiner Arbeit großen Werth beilegte[8]).

Das erste Lehrbuch, worin die richtigen Borda-Marestier'schen Theorien benutzt wurden und zwar mit Berücksichtigung der Erfahrungen, welche Marestier bei seinen Reisen in den Vereinigten Staaten von Nordamerika sorgfältig sammelte, war der zweite Theil von Navier's berühmtem Werke „Résumé des leçons etc. sur l'application de la mécanique etc.", Nr. 256 ff.

Campaignac erwarb sich das Verdienst, die Marestier'schen Gleichungen mit Erfahrungscoefficienten zu versehen, welche er aus Versuchsresultaten mit guten französischen und englischen Dampfschiffen ermittelte. Seine sämmtlichen desfallsigen Arbeiten finden sich zu-

---

[1]) Ueber spätere Versuche (1828) eines Engländers Walker, der in den Londoner Ostindien-Docks Versuche (unter Anwendung von Feder-Dynamometern) anstellte, berichtete Muncke im Artikel „Widerstand", S. 1835 des Gehler'schen Physikalischen Wörterbuches. d'Aubuisson's Bemerkungen über Messungsfehler bei den Beaufoy'schen Versuchen finden sich in der 2. Auflage seiner „Hydraulique", Pag. 303, Note 1.

[2]) Bourgois in seinem Mémoire sur la résistance de l'eau etc. nimmt Beaufoy gegen d'Aubuisson in Schutz.

[3]) The Philosophical Magazine. Vol. III, June 1828, Pag. 251.

[4]) Traité d'Hydrodynamique. Tome II, Pag. 394—411.

[5]) Philos. Trans. Vol. XVIII, Pag. 250.

[6]) Philos. Magaz. Vol. III (1828), Pag. 254.

[7]) Ebendaselbst, Pag. 257.

[8]) Tredgold schließt (a. a. O., Pag. 262) seine Arbeit mit folgender Bemerkung: „Having opened a new path in this difficult subject of the motion of fluides, it was not in my nature to stard still; the efflux of fluids, the impulse on bodies placing in a moving fluid, and various other inquiries followed. These, as my health permits, will be presented to the world".

sammengestellt in dem in Paris 1842 erschienenen Werke: „De l'état actuel de la navigation par la vapeur etc.“

Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen giebt Campaignac zur Berechnung der erforderlichen Pferdekraftzahl $= N$, welche die Betriebsdampfmaschine eines Schiffes erfordert, die Formel:

$$N = m\lambda BTU^3,$$

worin m ein Erfahrungscoefficient ist, der bei den kleinsten Dampfschiffen (von 20—50 Pferdekräften) zu 0,013 und bei den größten (von 400—500 Pferdekräften) zu 0,007 angegeben wird, λ (von 0,7 bis 1,0 variirend) die Reductionszahl für das Parallelogramm (BT) des Hauptspantens bezeichnet und U die Fortlaufgeschwindigkeit des Schiffes in Knoten ist.

Redtenbacher's hierhergehörigen Arbeiten, der allein den Reibungswiderstand zu beachten für erforderlich hielt, wurde bereits vorher (S. 612 und 614) gedacht.

Die nächste bemerkenswerthe Arbeit ist die Schrift des französischen Fregattencapitäns Bourgois, welche 1857 in Paris erschien und betitelt ist: „Mémoire sur la résistance de l'eau au mouvement des corps et particulièrement des batiments de mer“.

Bourgois erörtert hier ausführlich die Versuche von Bossut, d'Alembert und Condorcet, so wie die von Beaufoy, bemüht sich auch, deren Resultate durch Formeln darzustellen und gelangt [1]) schließlich mit Zuziehung sehr ausführlicher Versuche, welche er im Auftrage der französischen Regierung über Wasserwiderstand und Leistungen von Dampfschiffen anstellte, zu folgender Formel für die Bestimmung des Schiffswiderstandes $= W$:

$$W = k_1 FV^2 + k_2 BV^4 + k_3 S . V,$$

worin, unter Beibehalt der bisherigen Bezeichnungen, S den eingetauchten oder benetzten Theil der Schiffsoberfläche bezeichnet und k_1, k_2, k_3 Constanten sind, welche nach den verschiedenen Schiffsklassen variiren, aber bei einem und demselben Schiffe, mit demselben Propeller, gleich bleiben. Nachstehende Tabelle giebt für Metermaaße über diese Coefficienten Auskunft.

$\frac{L}{B}$	k_1	k_2	k_3
4	2,5	0,16	0,08
4,5	2,1	0,14	0,08
5 bis 6	2,5	0,14	0,08

Leider konnte sich Bourgois' Formel das Zutrauen der Schiffs- und Dampfschiffs-Maschineningenieure, namentlich für die Beantwortung einer der wichtigsten aller Fragen, der Vorausbestimmung der Fortlaufgeschwindigkeit, nicht erwerben. Besondere Aufmerksamkeit richtete

[1]) a. a. O., Pag. 230—233.

man deshalb auf eine im folgenden Jahre (1858) veröffentlichte Arbeit des Dr. Eckhardt, Großherzoglicher Geheimrath in Darmstadt, im „Artizan“ (vom 1. März 1858), welche die Ueberschrift trägt: „On calculation of the resistance of steam-vessels“, die der Verfasser gleichzeitig in deutscher Sprache bekannt machte und zwar im IV. Bande (S. 466) der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover.

Gestützt auf L. Euler's Theorie und auf die Versuche der Akademiker d'Alembert, Bossut und Condorcet, gelangt Eckhardt schließlich zu folgender Gleichung für den Fortlaufwiderstand $= W$ eines Dampfschiffes:

$$W = kFU^2 \{m \sin^3\alpha - m_1 \sin^3\beta + (m - m_1)\}.$$

Hierin bezeichnet α den halben Neigungswinkel der Seitenflächen an der Spitze (am Vorderschiffe) oder am Schnabel des Schiffes, β den halben Winkel der Zuschärfungen am Hinterschiffe, m und m_1 Constanten, wofür Eckhardt als Mittelwerthe $m = 0{,}60$ und $m_1 = 0{,}167$ zu nehmen räth, endlich bezeichnet k den Widerstand einer ebenen Fläche von einem Quadratfuß Inhalt in englischen Pfunden, während F und U die bisherige Bedeutung behalten.

Für Zwecke practischer Berechnungen liefert Eckhardt mehrere Tabellen, namentlich um k (als Function von U) auszudrücken, ferner für $m \sin^3\alpha$ und für $m_1 \sin^3\beta$ u. s. w., worauf hier nicht weiter eingegangen werden kann.

Den Reibungswiderstand des Schiffes hielt auch Eckhardt als besonders in Rechnung zu nehmen für überflüssig, glaubte vielmehr diesem Gegenstande entsprechende Beachtung durch Einführung der Coefficienten m und m_1 geschenkt zu haben.

Bemerkenswerth ist bei Eckhardt noch der Umstand, daß er als Verbindungscurven der Vordertheilszuschärfen, von dem Schnabel bis zur Stelle, wo die Seite des Mittelschiffes tangirt, sowohl die Kreislinie als die sogenannte Wellenlinie (wave-line), eine Art Cycloide (Trochoide), für angemessen hält.

Mehr Aufsehen in der practischen Welt machten die Bemühungen Rankine's (seiner Zeit Professor der Ingenieurwissenschaften an der Universität Glasgow), geeignete Formeln für den Schiffswiderstand im Wasser aufzustellen und daraus die Vorbestimmung der Fortlaufgeschwindigkeit der Schiffe, so wie die erforderliche Anzahl von Indicatorpferdekräften ($= N_i$) abzuleiten.

Rankine[1]) ging gleich anfänglich (im Jahre 1861) von der Ansicht aus, daß bei einem gut geformten Schiffe der Widerstand fast ausschließlich von der Reibung des Wassers an der Schiffsschale gebildet wird und daß sich demgemäß dieser Widerstand $= W$ durch die Gleichung darstellen läßt:

$$W = f\gamma \frac{U^2}{2g} \int q^2 ds.$$

Hierin ist, außer den bereits bekannten Bezeichnungen, (nach Weisbach) für eiserne Schiffe mit reiner Oberfläche f der Reibungs-

[1]) Die englische Zeitschrift „The Artizan“ vom 1. Octbr. 1861, S. 232 und hieraus in den Mittheilungen des Hannov. Gewerbevereins, Jahrg. 1871, S. 334.

coefficient, ($f = 0,0036$), $\int q^3 ds$ ein symbolischer Ausdruck, in welchem ds ein Element der benetzten Fläche und q das Verhältniß zwischen der Geschwindigkeit des Schiffes und jener Geschwindigkeit ist, mit welcher die Wassertheilchen längs den verschiedenen Theilen der gekrümmten Schiffsoberfläche vorbeigleiten.

Um practischen Zwecken zu dienen, findet Rankine[1]) für das Integral vorstehender Formel einen Näherungswerth und zwar, indem er die Reibung berechnet, welche zwischen einer Flüssigkeit und einem von einer trochoidalförmigen (cycloidischen) Bandfläche $= S$ begrenzten Körper stattfindet.

Unter dieser Voraussetzung erhält er:[2])

$$\int q^3 ds = S\,[1 + 4 \sin^2\beta + \sin^4\beta].$$

Dabei ist β das arithmetische Mittel aus den Winkeln, welche die Wasserlinien lediglich des Vorderschiffes mit einander bilden.

Für die Anzahl der indicirten Pferdekräfte $= N_i$ findet dann schließlich Rankine:

$$N_i = \frac{LGU^3}{20000}\,[1 + 4 \sin^2\beta + \sin^4\beta],$$

wenn mit L die Länge des Schiffes, mit G die arithmetischen Mittel aus den Spantenumfängen und endlich mit U die Fortlaufgeschwindigkeit des Dampfschiffes in Knoten (Seemeilen pro Stunde) bezeichnet wird[3]).

Bezeichnet man den in der Parenthese eingeschlossenen Werth vorstehender Formel mit m, so erhält man:

$$U = \sqrt[3]{\frac{20000\,N_i}{mLG}}.$$

Später will man gefunden haben, daß letztere Formel, besonders bei schnell fahrenden Dampfern, etwas zu große Geschwindigkeiten giebt. Dieser Umstand, so wie die großen Mühen, die Construction des Winkels β nach der Wasserlinie auszuführen und dennoch nur annähernd richtige Werthe zu erhalten, ist Veranlassung gewesen, immer wieder die Construction noch anderer Formeln zu versuchen.

So stellte im Jahre 1865 der berühmte Chefconstructeur der französischen Kriegsmarine unter Napoleon III, Dupuy de Lôme[4]), nachstehende Formel (für Metermaaße und Kilogramme) auf:

$$W = kF\,[U^2 + 0{,}145\,U^3] + k_1 S_1 \sqrt[3]{U},$$

worin W, F und U dieselbe Bedeutung wie in den früheren Formeln haben, während S_1 das Product der mittleren eingetauchten Gurtlänge

---

[1]) „Philosophical Transactions“ für 1863 und Rankine in den von ihm redigirten Werke „Shipbuilding etc.“, London 1866, Pag. 84.

[2]) Auszugsweise auch in Lutschauning's „Theorie des Schiffes“, S. 117 (Note).

[3]) Nach einigen Beispielen, welche der Verfasser in einem betreffenden Artikel der Mittheilungen des Hannov. Gewerbevereins, Jahrg. 1871, S. 335, dem Rankine'schen Werke entlehnt, ist die Uebereinstimmung von Rechnung und Indicatorversuchen geradezu frappant (wenn nicht zufällig?) zu nennen.

[4]) Lutschauning, a. a. O., S. 133.

mit der Schiffslänge, beides in Quadratmetern, und U die Fortlaufsgeschwindigkeit des Schiffes in Metern pro Secunde bezeichnet.

Von den überdies vorhandenen Coefficienten k und k_1 ist ersterer abhängig von der Schiffsform, während k_1 nur mit dem Zustande der Glattheit der äußeren benetzten Fläche variirt. Beispielsweise wird k_1 zu 0,3 angegeben für bekupferte Schiffsböden, wenn die Köpfe der Nägel gut niedergehämmert sind. Für mit Seegras und Muscheln bewachsene Schiffsböden soll dagegen k_1 zu 3,0 werden können.

Eine sehr complicirte Formel stellte 1869 der bekannte englische Schiffsbauingenieur Thornycroft auf[1]), welche der Verfasser in der unten citirten Quelle[2]) mitgetheilt hat.

Allein auch diese Formel läßt sehr viel zu wünschen übrig, besonders deshalb, weil die Bestimmung eines in ihr vorkommenden Werthes $\Sigma\,(\sin^{2,5}\varphi\,.\,ds)$ ungemein schwierig und zeitraubend ist und endlich die betreffende Rechnung erst nach Vollendung des Schiffes ausgeführt werden kann.

Bei diesem Zustande der Sache kann man es nur angemessen finden, wenn neuerdings, namentlich deutsche Schiffsbaumeister, die Formeln eines schwedischen, in Nordamerika lebenden Civilingenieurs, John W. Nystrom, zur Grundlage betreffender Rechnungen verwenden und deren Resultate mit passenden Correctionen zu practischen Rechnungen benutzen.

Können diese Formeln auch keine Ansprüche auf theoretische Begründung machen, so muß an ihnen doch ganz besonders der Umstand gerühmt werden, daß sie nicht die vollendete Zeichnung des Schiffskörpers und die Bekanntschaft der Winkel erfordern, welche die Wasserlinien oder Flächeninhalte des Vorderschiffes mit der Bewegungsrichtung bilden.

Was nun die Nystrom'schen Formeln selbst betrifft, so setzt derselbe, für englische Maaße und Gewichte, den Widerstand $= W$, zuerst

$$W = 4\Omega U^2,$$

worin Ω den sogenannten Widerstandsquerschnitt in Quadratfußen bezeichnet, welcher mittelst der Formel berechnet wird:

$$\Omega = F\sqrt{\frac{B^2}{B^2 + kL^2}}.$$

Hier haben F, B und L die seitherige Bedeutung, während der Coefficient k mit Hülfe eines Argumentes $= x$ ermittelt wird, wofür man hat

$$x = \frac{D}{FL},$$

worin D das Deplacement des Schiffes in Cubikfußen bezeichnet, so daß, wenn das Deplacement in Tonnen $= T$ gegeben ist, $D = 35\,T$[3]) gesetzt werden kann.

---

[1]) Transaction of the Institution of Naval Architects, Vol. X, Pag. 144 unter der Ueberschrift: „On the resistance opposed by water to the motion of vessels of various form etc.“

[2]) Mittheilungen des Hannoverschen Gewerbevereins. Jahrg. 1871, S. 336 ff.

[3]) Nach S. 73, Note 2.

Ausführliches über den Gebrauch der Nystrom'schen Formeln und zwar erläutert durch mehrere Zahlenbeispiele, findet man in den beiden unten notirten Abhandlungen des Verfassers [1]).

Die allerjüngsten höchst beachtungswerthen Resultate über den Widerstand der Schiffe gegen Fortbewegung im Wasser verdanken wir dem (leider am 4. Mai 1879 verstorbenen) englischen Schiffsingenieur und Mitglied der Royal Society, William Froude, der hierzu, von 1867 ab, berühmt gewordene Versuche mit größeren Schiffsmodellen anstellte. Die Resultate dieser Versuche finden sich größtentheils in den Transactions of the Institution of the Naval Architects, ferner auszugsweise in den englischen Journalen „Engineer" und „Engineering" und zwar insbesondere in den Jahrgängen 1877 bis 1879, und endlich folgerecht zusammengestellt im „Handbuch für Schiffbau" von White, aus dem Englischen übersetzt von Schlick und van Hüllen.

Nach Froude besteht der Gesammtwiderstand des Schiffes aus drei Haupttheilen: 1) aus dem Reibungswiderstande, der von dem Entlanggleiten der Wassertheilchen an dem rauhen Boden des Schiffes herrührt; 2) aus dem Wirbelwiderstande im Kielwasser und 3) aus der Oberflächenstörung oder dem Wellen erzeugenden Widerstande.

Zur betreffenden Erläuterung noch Folgendes: [2])

ad 1) Der Reibungswiderstand ist abhängig von dem Flächeninhalte der benetzten Oberfläche des Schiffsbodens, dem Grade der Rauhigkeit desselben [3]), dessen Länge und (annähernd) vom Quadrate der Geschwindigkeit; dagegen wird er nicht merkbar von den Formen und Verhältnissen des Schiffes beeinflußt; es sei denn, daß irgend eine ungewöhnliche Eigenthümlichkeit der Form oder Mangel am guten Verlaufe derselben vorhanden sei. Für kleinere Geschwindigkeiten ist dieses Element bei Weitem das wichtigste; für große Geschwindigkeiten nimmt dasselbe ebenfalls eine wichtige Stelle ein — nämlich 50 bis 70 Procent des Gesammtwiderstandes in der Mehrzahl der Fälle bei reinem Boden und in einem größeren Verhältnisse, wenn der Boden bewachsen ist.

ad 2) Der Wirbel erzeugende Widerstand ist gewöhnlich klein, mit Ausnahme specieller Fälle und beträgt etwa 8 bis 10 Procent des Reibungswiderstandes. Eine fehlerhafte Form des Hinterschiffes verursacht eine bedeutende Vergrößerung dieses Widerstandes.

ad 3) Der die Wellen erzeugende Widerstand ist dasjenige Element des Gesammtwiderstandes, welches am meisten von der Form und den Verhältnissen des Schiffes abhängig ist. Sein Verhältniß zum Reibungswiderstande sowohl, als auch seine absolute Größe hängen von

---

[1]) Mittheilungen des Hannov. Gewerbevereins, Jahrg. 1871, S. 343 ff. und Allgemeine Maschinenlehre, Bd. IV, S. 296 ff.

[2]) White (Deutsche Bearbeitung), S. 498 und Hannov. Wochenblatt für Handel und Gewerbe, Jahrg. 1880, S. 65.

[3]) Beispielsweise fand Froude den Reibungswiderstand ungefähr 1 Pfund pro Quadratfuß der gereinigten Bodenfläche eiserner Schiffe bei einer Geschwindigkeit von 12,8 Knoten (White, a. a. O., S. 479).

vielen Umständen ab, von denen die wichtigsten die Form und Länge von Vor- und Hinterschiff im Verhältnisse zu der beabsichtigten Geschwindigkeit des Schiffes bei voller Kraftentwickelung sind. Für jedes Schiff besteht eine Grenze der Geschwindigkeit, über welche hinaus ein geringer Zuwachs an Geschwindigkeit von einer unverhältnißmäßigen Zunahme an Widerstand begleitet ist. Diese Grenze wird durch die Länge von Vor- und Hinterschiff — den Wellen erzeugenden Factor eines Schiffes — bestimmt.

Wie bereits bemerkt, bilden diese drei Elemente den Gesammtwiderstand, den das Wasser der Bewegung eines Schiffes entgegensetzt, wenn dasselbe geschleppt oder mittelst Segel bewegt wird.

Hoffentlich wird es sich Froude's hinterlassener Sohn angelegen sein lassen, die zahlreichen, zur Zeit noch nicht hinreichend bekannten Resultate der Theorie und Experimente seines Vaters recht bald zu veröffentlichen [1]).

Drittes Capitel.

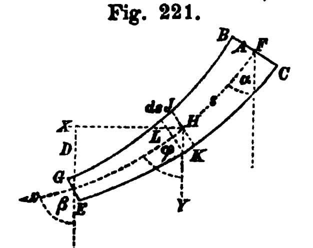
Gesammtdruck des Wassers gegen die Wände einer engen Röhre, aus welcher es strömt. (Reaction des Wassers.)

§. 189.

Bereits früher (§. 79) wurde der Druck des bewegten Wassers auf einen beliebigen Punkt einer Röhre ermittelt, während jetzt der Gesammtdruck bestimmt werden soll, welchen das Gefäß erfährt, und wodurch zugleich die Kraft bekannt wird, die man von Außen auf das Gefäß wirken lassen müßte, um dasselbe an dem betreffenden Orte des Raumes im Ruhezustande zu erhalten.

Der Einfachheit wegen setzen wir eine beständig voll Wasser erhaltene Röhre BE, Fig. 221, von einfacher Krümmung ohne plötzliche Verengungen oder Erweiterungen voraus, deren Querschnitte bei $BC = A$ und bei $GE = a$ constant sind, während sich die Querschnitte zwischen beiden Enden beliebig, jedoch in sanften Uebergängen, ändern und allgemein der bei JK mit der veränderlichen Größe $= \omega$ bezeichnet werden mag. Ferner seien die Geschwindigkeiten in den Schichten BC, GE und JK beziehungsweise V, v und u,

Fig. 221.



[1]) Man sehe in den Nachträgen, am Ende gegenwärtigen Buches, so wie Kirchner, „Ueber die Bewegungswiderstände der Schiffe“. Nach Vorträgen von W. Froude. In den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes. Berlin 1876, S. 333.

so wie endlich die Winkel, welche die Tangenten an der Achsenlinie der Röhre bei F, H und G mit der Verticale bilden, respective α, φ und β.

Für ein Massenelement $= dm$ der Flüssigkeit bei H, wenn man dessen Länge $HL = ds$ annimmt, ergiebt sich, unter Beibehaltung bereits bekannter Bezeichnungen:

$$dm = \frac{\gamma}{g}\,\omega ds.$$

Die zu ermittelnden Drücke auf die Röhrenwände müssen durch die in den entsprechenden Richtungen verlorenen Kräfte dargestellt werden, weshalb man für die Drücke auf die Wandstellen erhält, welche von der Schicht JKL berührt werden und die betreffenden Coordinatenachsen bei H, nämlich HX und HY horizontal und vertical vorausgesetzt werden:

$$\text{horizontal} = \frac{\gamma}{g}\,\omega ds\left[\text{Null} - \frac{d^2x}{dt^2}\right],$$

$$\text{vertical} = \frac{\gamma}{g}\,\omega ds\left[g - \frac{d^2y}{dt^2}\right],$$

so wie für alle Schichten von BC bis JK, wenn man die Horizontalcomposante des Gesammtdruckes mit X und die Verticalcomposante mit Y und endlich die Integralconstanten mit C und C' bezeichnet:

$$(1)\quad X = -\frac{\gamma}{g}\int\left(\omega ds\,.\,\frac{d^2x}{dt^2}\right) + C;$$

$$(2)\quad Y = \left[\gamma\int\omega ds - \frac{\gamma}{g}\int\omega ds\,.\,\frac{d^2y}{dt^2}\right] + C'.$$

Es ist aber $\gamma\int\omega ds$ das Gewicht $= w$ des Wassers in der Röhre von BC bis JK gerechnet, ferner wegen

$$u = \frac{av}{\omega} \text{ und } ds = udt \text{ auch } \omega ds = \omega udt = avdt,$$

weshalb aus (1) und (2) nach Einführung dieser Werthe erhalten wird:

$$(3)\quad X = -\frac{\gamma}{g}\,av\int\frac{d^2x}{dt} + C;\quad (4)\quad Y = w - \frac{\gamma}{g}\,av\int\frac{d^2y}{dt} + C'.$$

Es verbleibt jetzt nur noch die Bestimmung von $\frac{d^2x}{dt}$ und $\frac{d^2y}{dt}$, was jedoch keine Schwierigkeit bietet, indem man ohne Weiteres erhält:

$$\frac{dx}{dt} = u\,.\,\sin\varphi = av\,.\,\frac{\sin\varphi}{\omega} \text{ und } \frac{dy}{dt} = u\,.\,\cos\varphi = av\,.\,\frac{\cos\varphi}{\omega}.$$

Hieraus aber:

$$\frac{d^2x}{dt} = av\,.\,d\left(\frac{\sin\varphi}{\omega}\right) \text{ und } \frac{d^2y}{dt} = av\,.\,d\left(\frac{\cos\varphi}{\omega}\right).$$

Daher aus (3) und (4):

$$X = -\frac{\gamma}{g} a^2 v^2 \int d\left(\frac{\sin\varphi}{\omega}\right) + C = -\frac{\gamma}{g} a^2 v^2 \left(\frac{\sin\varphi}{\omega} - \frac{\sin\alpha}{A}\right) \text{ und}$$

$$Y = w - \frac{\gamma}{g} a^2 v^2 \int d\left(\frac{\cos\varphi}{\omega}\right) + C' = w - \frac{\gamma}{g} a^2 v^2 \left(\frac{\cos\varphi}{\omega} - \frac{\cos\alpha}{A}\right).$$

Für die ganze Ausdehnung der Röhre von F bis G ergeben sich daher die Composanten H (horizontal) statt X, und S (senkrecht) statt Y, wenn W das Totalgewicht des Wassers in der Röhre bezeichnet:

$$\text{I.} \quad H = -\frac{\gamma}{g} a^2 v^2 \left(\frac{\sin\beta}{a} - \frac{\sin\alpha}{A}\right) \text{ und}$$

$$\text{II.} \quad S = W - \frac{\gamma}{g} a^2 v^2 \left(\frac{\cos\beta}{a} - \frac{\cos\alpha}{A}\right).$$

Sind die Achsenelemente bei F und bei G vertical, also α und β gleich Null (oder ist die Achse des Gefäßes senkrecht), erhält man:

$$H = \text{Null und}$$

$$S = W - \frac{\gamma}{g} a^2 v^2 \left(\frac{A-a}{Aa}\right),$$

oder da nach §. 75, S. 190 $\frac{v^2}{g} = \frac{2A^2 \cdot h}{A^2 - a^2}$ gesetzt werden kann, sobald h die constante Druckhöhe über Mündungsmitte G bezeichnet:

$$\text{III.} \quad H = 0;$$

$$\text{IV.} \quad S = W - \gamma \frac{2aAh}{A + a}.$$

Im Falle die Mündung a sehr klein ist, kann man statt IV. auch schreiben:

$$S = W - \gamma \cdot 2ah.$$

Hiernach ist also unter allen Umständen der Druck in verticaler Richtung gegen das Gefäß kleiner wie das Gewicht des darin enthaltenen Wassers und im letzteren Falle gerade um so viel kleiner wie die Größe des bereits §. 179, II. ermittelten hydraulischen Druckes oder Wasserstoßes beträgt.

Wenn endlich α = Null und $\beta = 90^0$ ist, so folgt aus I. und II:

$$\text{V.} \quad H = -\frac{\gamma}{g} a \cdot v^2 = -\gamma a \cdot 2h, \text{ oder}$$

$$\text{VI.} \quad H = -Mv,$$

wenn M die Masse der secundlich ausfließenden Wassermenge bezeichnet. Ferner:

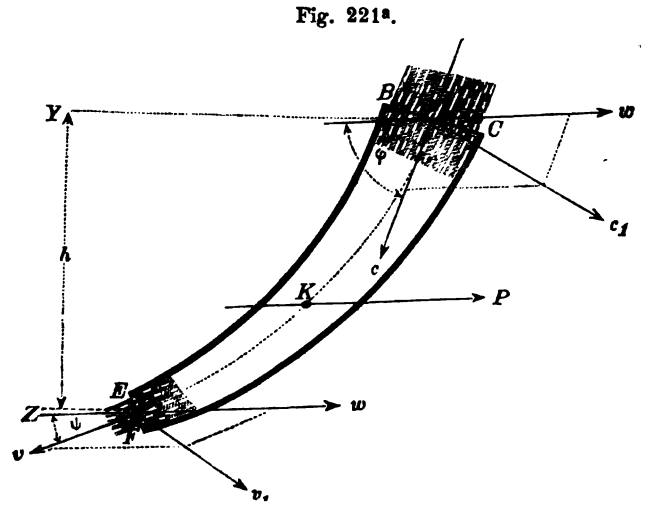
$$\text{VII.} \quad S = W + \frac{\gamma}{g} \frac{a^2 v^2}{A}.$$

Bei einem Gefäße mit horizontaler Achse der Ausflußmündung ist also der Druck in verticaler Richtung größer wie das Gewicht des darin enthaltenen Wassers.

Der Horizontaldruck aber, gewöhnlich die Reactionskraft oder kurz Reaction der ausströmenden Flüssigkeit genannt, welcher sich in einer dem Ausflusse direct entgegengesetzten Richtung äußert, ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche den Strahlquerschnitt (a) zur Basis und zur Druckhöhe die doppelte Höhe ($2h$) hat, welche der Ausflußgeschwindigkeit entspricht.

Zusatz. Eine beachtenswerthe Ableitung der letzteren Gleichungen und zwar mit Hülfe des Principes von der Erhaltung der lebendigen Kräfte hat seiner Zeit Weisbach[1]) gemacht, wozu wir nebenskizzirte Fig. 221ª benutzen.

Fig. 221ª.



Das Wasser ströme bei A zu, sinke von der Höhe $YZ = h$ herab und fließe bei D mit einer gewissen Geschwindigkeit v aus, während das ganze Gefäß $BCEF$ mit einer Geschwindigkeit w in einer gewissen Richtung (von links nach rechts) gleichförmig fortgeschoben wird.

Wird nun die relative Geschwindigkeit $= c$ des Wassers im Gefäße, an der Eintrittsstelle, nach Größe und Richtung durch $\overline{Ac}$ dargestellt und ist φ der Winkel, um welchen c von der Bewegungsrichtung $A\bar{w}$ des Gefäßes abweicht, so erhält man für die absolute Geschwindigkeit $= c_1$, womit das Wasser bei A eintritt:

$$(5)\quad c_1^2 = c^2 + w^2 - 2cw\cos\varphi.$$

Eben so erhält man für die absolute Geschwindigkeit v_1, womit das Wasser bei D ausströmt, und hier ψ der Winkel ist, um welchen die Richtung von v von der Bewegungsrichtung $Dw \parallel Aw$ abweicht:

$$(6)\quad v_1^2 = v^2 + w^2 - 2vw\cos\psi.$$

Das Wasser, welches durch das Gefäß fließt, hat also auf letzteres

[1]) Ingenieur-Mechanik, Bd. 1 (Erste Auflage), S. 184, und Experimental-Hydraulik. Freiberg 1855, S. 228.

die mechanische Arbeit $= \mathfrak{A}$ übergetragen, wenn man mit Q die pro Secunde durchfließende Wassermenge bezeichnet:

$$\mathfrak{A} = \gamma Q h - \frac{1}{2} \frac{\gamma Q}{g} (v_1^2 - c_1^2),$$

d. i., wenn man die Werthe aus (5) und (6) substituirt und gehörig reducirt:

$$\mathfrak{A} = \gamma Q \left[h - \frac{v^2 - c^2 - 2w (v \cos \psi - c \cos \varphi)}{2g} \right].$$

Da nun aber $\frac{v^2 - c^2}{2g} = h$ ist, so ergiebt sich schließlich:

$$\mathfrak{A} = \frac{\gamma Q}{g} (v \cos \psi - c \cos \varphi)\, w.$$

Demnach erhält man für die Reactionskraft $= P$:

$$P = \frac{\mathfrak{A}}{w} = \frac{\gamma Q}{g} (v \cos \psi - c \cos \varphi).$$

Für $\varphi = 90^0$ und (gleichzeitig) für $\psi = 0$ findet man daher:

$$P = \frac{\gamma Q}{g} v . = \frac{\gamma a v^2}{g} = 2 \gamma a \frac{v^2}{2g} = \gamma a \,.\, 2h,$$

wie vorher unter V. gefunden wurde.

Letzterer Satz ist durch vielfache Versuche von D. Bernoulli[1]), Brunnaci[2]), Ewart[3]) und Weisbach[4]) außer allen Zweifel gesetzt. Theorien über die ganze behandelte Frage lieferten namentlich D. Bernoulli, L. Euler, Navier und nach letzterem (allgemein für Röhren von doppelter Krümmung) Scheffler[5]).

Anmerkung. Von der Reaction des Wassers macht man zum Forttreiben von Dampfschiffen Gebrauch, die man Reactions-Propellerschiffe zu nennen pflegt. Die Theorie dieser Propeller hat Grashof neuerdings (Bd. XX [1876], S. 65 der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure) aufgestellt, nachdem er vorher (1869) in der von ihm herausgegebenen 5. Auflage von Redtenbacher's „Resultate für den Maschinenbau", die Ergebnisse dieser Theorie mitgetheilt hatte.

Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Schiffes mit c und mit v die relative Horizontalgeschwindigkeit, womit das Wasser (hinterwärts) aus den Reactionsröhren ausfließt, so erhält man für den Druck $= H$, womit das Schiff fortgetrieben wird, nach VI. der vorstehenden Gleichungen:

$$P = M (v - c).$$

Für den Beharrungszustand der Bewegung des Schiffes ergiebt sich

---

[1]) Hydrodynamica, Sect. XIII, §. 4, Pag. 280.

[2]) Memorie della Societa Italiana delle Science, Tom. XVII, parte Mathemathica etc. Verona 1816.

[3]) Freiberger Ingenieur. Erster Band, S. 137.

[4]) „Versuche über die Leistung eines einfachen Reactionsrades". Freiberg 1851, S. 19, und die „Experimentalhydraulik". Freiberg 1855, S. 253.

[5]) „Die Principien der Hydrostatik und Hydraulik", Bd. I, §. 122, Braunschweig 1847.

sodann, nach (1), §. 187, S. 614:

$$M\,(v - c) = \frac{k\gamma F}{2g} \cdot c^2,$$

oder wenn mit A der Gesammtquerschnitt beider Reactionsröhren bezeichnet wird, so daß also $M = \frac{\gamma A v}{g}$ ist:

$$Av\,(v - c) = \tfrac{1}{2} kFc^2,$$

eine der Fundamentalgleichungen der Grashof'schen Theorie (a. a. O., S. 68).

Von anderen bemerkenswerthen Theorien über Reactionspropeller der Dampfschiffe, verdient namentlich die des Cavaliere Brin (im italienischen Marineministerium) Erwähnung, welche sich in der englischen Zeitschrift „The Artizan", Jahrg. 1871, Pag. 115 und 125 abgedruckt vorfindet.

Vierte Abtheilung.

Aërodynamik.

Einleitung.

§. 190.

Uebereinstimmend mit der Hydrodynamik handelt die Aërodynamik von dem Ausflusse elastischer Flüssigkeiten aus Gefäßen, ihrer Bewegung in Röhren und vom Stoße und Widerstande derselben.

Im Wesentlichen unterscheiden sich die betreffenden Gesetze nur durch den Einfluß der beiden charakteristischen Eigenschaften der elastischen Flüssigkeiten, nämlich Elasticität (in bemerkbarer Weise) und leichte Ausdehnbarkeit durch die Wärme, die bereits §. 53 erörtert und durch Formeln festgestellt wurden. Eine Ergänzung in letzterer Beziehung werde durch folgendes Verzeichniß specifischer Gewichte und Dichten solcher Flüssigkeiten beigefügt, welche in der technischen Aërodynamik mehr oder weniger von Wichtigkeit sind.

Name der Flüssigkeit	Specifisches Gewicht $= s$	Dichte oder absolutes Gewicht $= \measuredangle$ eines Cubikmeters bei 0^0 C und bei $0^m,76$ Barometerstand (Kilogramm)	Name des Beobachters
Atmosph. Luft. . .	1,00000	1,293187	Regnault
Kohlensaures Gas .	1,52901	1,977414	desgl.
Leuchtgas	0,40000 [1]	0,517275	Deutsche Continental-Gasgesellsch. in Dessau
Sauerstoffgas . . .	1,10563	1,429802	Regnault
Stickstoffgas	0,97137	1,256157	desgl.
Wasserstoffgas . . .	0,06926	0,089578	desgl.

---

[1]) Das specifische Gewicht (die Dichtigkeit) des Leuchtgases ist sehr verschieden, je nach der Kohlensorte und dem Stadium des Destillationsprocesses. Beispielsweise fand Heeren (Mittheil. des Hannov. Gewerbevereins, Jahrg. 1859, S. 362):

Erster Abschnitt.

Ausfluß gasförmiger Flüssigkeiten aus Gefäßmündungen.

§. 191.

Zur Ermittelung mathematischer Ausdrücke für die Geschwindigkeit und Menge von aus Gefäßmündungen strömenden gasförmigen Flüssigkeiten lassen sich (im Allgemeinen) drei verschiedene Annahmen machen oder Hypothesen aufstellen, welche folgende sind:

1) Die Dichtigkeit des Gasstromes bleibt unveränderlich, d. h. der Ausfluß erfolgt nach denselben Gesetzen wie beim Wasser.

2) Die Temperatur des Gasstromes bleibt unverändert. Die Dichte ändert sich nach dem Mariotte'schen Gesetze.

3) Das Gas nimmt beim Ausflusse weder Wärme auf, noch giebt es welche ab, Druck und Volumen sind durch das Laplace-Poisson'sche Gesetz (§. 59) an einander gebunden.

Ausflußgeschwindigkeit unter constantem Drucke.

I. Unter Voraussetzung constanter Dichte des Gases.

Ist *BCDE*, Fig. 222, ein mit irgend einer elastischen Flüssigkeit gefülltes Gefäß, so wird, wenn die Pressung der Flüssigkeit im Gefäße genau so groß ist, wie die der äußeren Umgebung (in der Regel der atmosphärischen Luft), aus einer Oeffnung *ED* weder innere Flüssigkeit aus-, noch äußere einströmen. Drückt man jedoch die Flüssigkeit im Innern des Gefäßes mit Hülfe eines gehörig dicht schließenden Kolbens *BC* zusammen, oder beschwert diesen Kolben mit einem Gewichte, dessen Größe pro Flächeninhalt $= P$ bedeutender ist, wie die eben so geschätzte Pressung $= p$ außerhalb der Mündung *ED*, so wird ein Ausströmen durch eine entsprechend kleine Mün-

Fig. 222.

Für Cannel-Kohlen, Mittel von 36 Bestimmungen . . . . $s = 0,619$
„ Newcastler-Kohlen, Mittel von 28 Bestimmungen . . $s = 0,422$
„ Staffordshire-Kohlen, Mittel von 6 Bestimmungen . $s = 0,369$.

Der Grundsatz, je schwerer das Gas um so besser, kann zwar im Allgemeinen als richtig zugegeben werden, aber schon die Gegenwart von Kohlenoxyd ist geeignet, die Richtigkeit dieses Schlusses zu beeinträchtigen. Bei westfälischen Kohlen (nach Ingenieur-Taschenbuch des Vereins „Hütte“, 11. Aufl. [1877], S. 594) ist im Mittel (wie oben) $s = 0,40$ anzunehmen. Welchen Einfluß die Stunde der Destillation auf das specifische Gewicht des Leuchtgases hat, zeigt folgende Tabelle (der „Hütte“ etc.), welche westfälische Kohlen voraussetzt:

	Erste Stunde	Zweite Stunde	Dritte Stunde	Vierte Stunde
$s =$	0,540	0,400	0,320	0,260

dung ED mit einer Geschwindigkeit $= v$ stattfinden, die, unter der Voraussetzung, daß elastische Flüssigkeiten beim Ausflusse aus Gefäßen denselben Gesetzen folgen, wie das Wasser[1]), nach §. 78 ist:

$$\text{I.} \quad v = \sqrt{2g \frac{(P-p)}{\Delta}},$$

sobald Δ die Dichte der eingeschlossenen elastischen Flüssigkeit (nach §. 190) bezeichnet, der Querschnitt a der Mündung ED sehr klein gegen den Querschnitt $BC = A$ des Gefäßes $\overline{BD}$ ist und endlich die Größe h als klein genug vernachlässigt wird, welche hier das Gewicht der im Gefäße eingeschlossenen Flüssigkeit repräsentirt.

Wird die Pressung im Innern des Gefäßes durch die Höhe $= e$ eines Quecksilbermanometers FG angegeben, so ist bekanntlich, wenn b den gleichzeitigen Barometerstand bezeichnet:

$$\frac{P}{p} = \frac{b+e}{b}, \text{ also } P - p = \frac{P \cdot e}{b+e},$$

daher aus I. folgt:

$$\text{II.} \quad v = \sqrt{\frac{2g}{\Delta} \cdot \frac{P \cdot e}{b+e}}.$$

Speciell für **atmosphärische Luft** erhält man daher nach §. 54 für Metermaaß, wenn beachtet wird, daß $\sqrt{2g \frac{P}{\Delta}} = 396 \sqrt{1+\delta t}$ ist:

$$v = 396 \sqrt{(1+\delta t) \frac{e}{b+e}}.$$

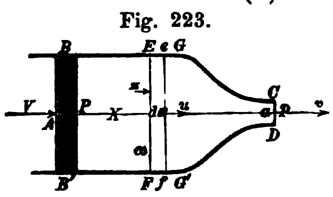
§. 192.

II. Ausflußgeschwindigkeit unter Voraussetzung constanter Temperatur.

Bei der Annahme, daß im Beharrungszustande der Bewegung in derselben Zeit gleiche Massen (Gewichte) durch die verschiedenen Querschnitte eines Gefäßes gehen, erhält man zunächst die Gleichung:

$$(1) \quad PAV = z\omega u = pav\text{[2]}).$$

Fig. 223.



Hierbei haben P, A, V und p, a, v die bisherigen Bedeutungen, während z die veränderliche Pressung in einer beliebigen Schicht EF vom Querschnitte ω bezeichnet, welche von BB' um x absteht und in welcher sämmtliche durchströmende Flüssigkeitselemente die Geschwindigkeit $= u$ besitzen.

Der weitere Gang ist dann folgender:

---

[1]) Daniel Bernoulli, Hydrodynamica, Pag. 200 ff. und Poncelet, Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Tome XXI, Pag. 187.

[2]) Erweiterungen des Satzes vom Parallelismus der Schichten (§. 75, S. 189). — Navier, Annales de chimie et de physique. T. 34 (1827), Pag. 400. (Specielles in den später folgenden „Geschichtlichen Notizen".)

Die am Ende einer Zeit $= t$ der beliebigen Elementarschicht *EFef* innewohnende lebendige Kraft ist: $\frac{1}{2}\frac{\Delta}{g}\,\omega dx\,.\,u^2$, daher der Zuwachs an lebendiger Kraft derselben Schicht während eines unendlich kleinen Zeittheilchens dt: $\frac{1}{2}\frac{\Delta}{g}\,\omega dx\,.\,2udu$ und eben dieser Zuwachs für die ganze Flüssigkeit im Gefäße, während desselben Zeittheilchens:

$$(2)\quad \frac{1}{2}\int\frac{\Delta}{g}\,\omega dx\,.\,2udu + \text{Const.}$$

Andererseits ist die Schicht *Ef*, zufolge der gegenseitigen Wirkung der Schichten auf einander, der Kraft ωdz unterworfen, welche im entgegengesetzten Sinne der Bewegung thätig und deren durchlaufener Weg in der Zeit dt gleich udt ist.

Die Summe der allen Schichten der Flüssigkeit eingeprägten mechanischen Arbeiten beträgt daher:

$$(3)\quad -\int\omega dz\,.\,udt + \text{Const.}$$

Beide Integrale (2) und (3) zwischen denselben Grenzen genommen, erhält man nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

$$-\int\omega dz\,.\,udt = \frac{1}{2}\int\frac{\Delta}{g}\,\omega dx\,.\,2udu,$$

oder, wenn man udt an die Stelle von dx setzt, sodann dt wie einen constanten, allen Gliedern gemeinsamen Factor entfernt und endlich $\Delta = \frac{z}{k}$ nach (2) §. 54 einführt, wobei k eine Constante bezeichnet:

$$(4)\quad -gk\int\omega dz\,.\,u = \int z\omega u^2 du.$$

Zufolge (1) ist nun $u = \frac{pav}{z\omega}$, also $du = -pav\frac{d(z\omega)}{(z\omega)^2}$, daher nach Einführung dieser Werthe in (4):

$$-gk\,.\,pav\int_P^p\frac{dz}{z} = -(pav)^3\int_{PA}^{pa}\frac{d(z\omega)}{(z\omega)^2},\ \text{d. i.}$$

$$gk\,\text{Lgnt}\,\frac{p}{P} = \frac{(pav)^2}{2}\left[\frac{1}{(PA)^2} - \frac{1}{(pa)^2}\right],\ \text{oder}$$

$$2gk\,\text{Lgnt}\,\frac{P}{p} = v^2\left[1-\left(\frac{pa}{PA}\right)^2\right],\ \text{folglich:}$$

$$\text{I.}\quad v = \sqrt{\frac{2gk\,.\,\text{Lgnt}\,.\,\frac{P}{p}}{1-\left(\frac{pa}{PA}\right)^2}}.$$

Ist endlich a im Verhältniß zu A recht klein und führt man wiederum $\Delta = \frac{P}{k}$ ein, so läßt sich setzen:

$$\text{II.}\quad v = \sqrt{2g\,\frac{P}{\Delta}\,\text{Lgnt}\,.\,\frac{P}{p}}\,.$$

Für verhältnißmäßig geringe Pressungsdifferenzen endlich ist:

$$v = \sqrt{2g\,\frac{P}{\Delta}\cdot\frac{P-p}{p}}.$$

Hebt man hier P im Zähler gegen p im Nenner auf, so erhält man die bereits §. 191 unter der Voraussetzung der Nichtzusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten abgeleitete Formel.

§. 193.

III. Ausflußgeschwindigkeit auf Grund des Laplace-Poisson'schen Gesetzes, oder unter der Voraussetzung, daß das Gas beim Ausflusse weder Wärme aufnimmt noch abgiebt.

(Der adiabatische permanente Ausfluß.)

Da aus Versuchen bekannt ist, daß unter Umständen die Luft beim Ausströmen aus einer Gefäßmündung nicht blos eine Pressungs, sondern auch eine Temperaturveränderung erleiden kann und daß dies allemal stattfindet, wenn der Luft zum Ausgleichen der Temperatur nicht die erforderliche Zeit gelassen wird, endlich mit einer momentanen Temperaturveränderung auch eine plötzliche Dichtungsveränderung verbunden ist, so hat man, für solchen Fall, bei Ableitung einer Formel für die Ausflußgeschwindigkeit dem gedachten Gesetze oder der erwähnten Voraussetzung Rechnung zu tragen.

Nehmen wir die fragliche Ableitung zuerst auf Grund des Laplace-Poisson'schen Gesetzes vor.

Unter Beibehaltung der im vorigen Paragraphen gewählten Bezeichnung hat man dann zuerst: [1])

$$(1)\quad \Delta_z = \Delta\,\frac{z^{\frac{1}{n}}}{P^{\frac{1}{n}}}.$$

Ferner ist $\frac{udu}{dx} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{-\omega dz}{\Delta_z\,\frac{\omega dx}{g}}$, daher, mit Bezug auf (1):

$$(2)\quad udu = -g\,\frac{P^{\frac{1}{n}}}{\Delta}\cdot\frac{dz}{z^{\frac{1}{n}}}.$$

Das Integral dieses Ausdruckes ist aber:

$$(3)\quad \frac{u^2}{2} = -g\,\frac{P^{\frac{1}{n}}}{\Delta}\cdot\frac{n}{n-1}\,z^{\frac{n-1}{n}} + \text{Const.}$$

Folglich ergeben sich (mit Bezug auf Fig. 223) nachstehende zwei Werthe:

---

[1]) Nach $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^n$, also $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}$, wonach zugleich I, §. 59, S. 125 zu corrigiren ist.

$$\frac{v^2}{2} = -g\,\frac{P^{\frac{1}{n}}}{\varDelta}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot p^{\frac{n-1}{n}} + \text{Const.}$$

$$\frac{V^2}{2} = -g\,\frac{P^{\frac{1}{n}}}{\varDelta}\cdot\frac{n}{n-1}\,P^{\frac{n-1}{n}} + \text{Const.}$$

Zieht man letzteren Werth von ersterem ab, so erhält man:

$$v^2 - V^2 = 2g\,\frac{P^{\frac{1}{n}}}{\varDelta}\cdot\frac{n-1}{n}\left[P^{\frac{n-1}{n}} - p^{\frac{n-1}{n}}\right], \text{ oder}$$

$$v^2 - V^2 = 2g\,.\,\frac{n}{n-1}\,\frac{P}{\varDelta}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right], \text{ folglich:}$$

$$\text{I. } v = \sqrt{V^2 + 2g\,\frac{n}{n-1}\,\frac{P}{\varDelta}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Ist hier wieder $\frac{a}{A}$ (Fig. 223) so klein, daß V^2 vernachlässigt werden kann, so ergiebt sich, wenn man zugleich, wie beim Ausfluß des Wassers (S. 210) den sogenannten Geschwindigkeitscoefficienten ψ einführt:

$$\text{II. } v = \psi\sqrt{2g\,\frac{n}{n-1}\,\frac{P}{\varDelta}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Auch hier ist wieder für Metermaaß zu setzen:

$$\sqrt{2g\,\frac{P}{\varDelta}} = 396\sqrt{1+\delta t}.$$

Zusatz 1. Letztere beiden Gleichungen hätten sich direct ableiten lassen aus dem Werthe IV, §. 60, für die mechanische Arbeit, welche frei wird, wenn sich ein Gasvolumen $\mathfrak{V}$ von der Pressung P so weit ausdehnt, daß die Pressung auf p herabsinkt.

Der gleichgeltende Werth dieser Arbeit ist offenbar, wenn die Geschwindigkeit V im Gefäße sehr gering ist:

$$\tfrac{1}{2}\varDelta\mathfrak{V}\,\frac{v^2}{g}.$$

Daher:

$$\tfrac{1}{2}\varDelta\mathfrak{V}\,\frac{v^2}{g} = \frac{n}{n-1}\,P\mathfrak{V}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right],$$

d. i., wenn wieder ψ eingeführt wird:

$$v = \psi\sqrt{2g\,\frac{n}{n-1}\,\frac{P}{\varDelta}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Zusatz 2. Mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie, welche auf die besondere Zustandsänderung und auf das innere Arbeitsvermögen der Gase Rücksicht nimmt, läßt sich Gleichung II. wie folgt ableiten.

Es ist nach Vorstehendem:

$$(4) \quad udu = -gwdz,$$

wenn mit w das specifische Volumen oder das Volumen der Gewichtseinheit (1 Kilogramm) §. 54, S. 112 des Gases bezeichnet wird.

Vorstehender Werth (4) läßt sich aber dadurch umgestalten, daß man $d(wz) = wdz + zdw$ reducirt:

$$wdz = d(wz) - zdw,$$

wonach aus (4) wird:

$$(5) \quad \frac{udu}{g} = -d(wz) + zdw.$$

Das letzte Glied im rechten Theile dieser Gleichung läßt sich aber nach VII, §. 62, ersetzen durch:

$$EdQ - dU,$$

in welchem Werthe bekanntlich dU den Zuwachs (die Aenderung) an innerem Arbeitsvermögen des Gases bezeichnet.

Sonach folgt aus (5):

$$(6) \quad d\left(\frac{u^2}{2g}\right) = -d(wz) - dU + EdQ.$$

Diese Gleichung läßt sich, in nachstehender Weise, in eine einfachere Gestalt bringen.

Zunächst ist nach (6) S. 113:

$$wz = RT = R(a + t), \text{ also auch } d(wz) = Rdt,$$

sodann lehrt die mechanische Wärmetheorie[1]), daß $dU = Ecdt$ ist (c statt c_v geschrieben), folglich aus (6) erhalten werden kann:

$$d\left(\frac{u^2}{2g}\right) = -Rdt - Ecdt + EdQ,$$

oder auch wegen $R = c(n - 1)E$ (S. 135):

$$d\left(\frac{u^2}{2g}\right) = -ncEdt + Ecdt - Ecdt + EdQ, \text{ oder}$$

$$d\left(\frac{u^2}{2g}\right) = -ncEdt + EdQ,$$

oder auch, wegen $E = \frac{1}{A}$:

$$(7) \quad Ad\left(\frac{u^2}{2g}\right) = -ncdt + dQ.$$

Erfolgt nun während des Ausströmens des Gases aus der Mündung vom Querschnitte $= a$, weder eine Mittheilung, noch Entziehung von Wärme, d. h. ist in vorstehender Gleichung $dQ =$ Null zu setzen, so ergiebt sich:

$$Ad\left(\frac{u^2}{2g}\right) = -ncdt.$$

oder, mit Bezug auf Fig. 223, wenn man beachtet, daß dt auch gleich $d(T - a)$, d. i. $= dT$ ist, sobald, wie von S. 113 ab, mit T die absolute Temperatur des Gases bezeichnet wird und diese Temperatur im Gefäße bei BB' zu T_1, an der Mündung CD aber zu T_2 bekannt ist, nach der Integration:

---

[1]) Zeuner, mechanische Wärmetheorie (2. Auflage) S. 164, Nr. 105.

$$(8) \quad \frac{A}{2g}(v^2 - V^2) = -ncT_2 + ncT_1 = nc(T_1 - T_2),$$

oder, da nach S. 125, Formel III.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}} \text{ ist,}$$

$$\frac{A}{2g}(v^2 - V^2) = ncT_1\left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right],$$

oder, wenn wieder V klein genug vorausgesetzt werden kann und ψ eingeführt wird:

$$\text{III.} \quad v = \psi\sqrt{2g\frac{nc}{A}T_1\left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},$$

welche Gleichung auch Zeuner in seinen Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie (2. Auflage), S. 166, unter Nr. 109 findet.

Da nun $\frac{T_1 c}{A} = \frac{P}{\varDelta(n-1)}$ nach S. 125 und 135 ist[1]), so erhält man auch aus vorstehendem Werthe für v (wie oben):

$$\text{IV.} \quad v = \psi\sqrt{2g\frac{n}{n-1}\frac{P}{\varDelta}\left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Entfernt man aus III. nur $\frac{c}{A}$, wofür sich nach dem Vorstehenden setzen läßt $\frac{c}{A} = \frac{R}{n-1}$, so ergiebt sich noch eine dritte Form für die Ausflußgeschwindigkeit $= v$, nämlich:

$$\text{V.} \quad v = \psi\sqrt{2g\frac{n}{n-1}RT_1\left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},$$

Hier ist wieder T_1 die absolute Temperatur des Gases im Innern des Ausflußgefäßes, worin das Gas der constanten Pressung P unterworfen ist.

Da nach dem Vorstehenden die Ausdehnung der Luft allein auf Kosten der inneren Arbeit stattfindet, so muß die Luft eine Wärmemenge verlieren, welche gleichgeltend der Arbeit ist, die bei der Ausdehnung in Anspruch genommen wird.

Setzt man die Temperatur T_1 im Innern des Gefäßes, so wie die Ausflußgeschwindigkeit v als bekannt voraus, so läßt sich die Temperatur T_2 in der Ebene der Mündung mit Hülfe der Gleichung (8) berechnen, indem man reducirt:

$$\text{VI.} \quad T_2 = T_1 - \frac{A}{nc}\frac{v^2}{2g}.$$

Zusatz 3. Bei sehr geringen Pressungsdifferenzen, d. h. wenn P und p wenig verschieden sind, läßt sich der Ausdruck für v in II. sehr vereinfachen.

---

[1]) Nach S. 125 ist $\frac{P}{\varDelta} = RT_1$ und nach S. 135 $RA = (n-1)c$, also etc.

Schreibt man nämlich $\frac{p}{P}$ unter der Gestalt $1 - \frac{P-p}{P}$ und setzt $\frac{P-p}{P} = k$, so hat man $\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(1 - k\right)^{\frac{n-1}{n}}$ und für nur zwei Glieder der binomischen Reihe:

$$\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}} = 1 - \frac{n-1}{n} k,$$

so daß aus II. wird:

$$v = \psi \sqrt{2g \frac{n}{n-1} \frac{P}{\Delta} \cdot \frac{n-1}{n} \left(\frac{P-p}{P}\right)}, \text{ d. i.}$$

$$\text{VII.} \quad v = \psi \sqrt{2g \frac{(P-p)}{\Delta}} = \psi \sqrt{2g \frac{P}{\Delta}\left(1 - \frac{p}{P}\right)}.$$

Der bereits S. 639 von Daniel Bernoulli unter der Voraussetzung gefundene Werth für v, daß die Dichtigkeit des Gases constant bleibt oder der Ausfluß so erfolgt, als wäre das Gas, gleich Wasser, unelastisch.

Beispiel. In einem geeigneten Gefäße befinde sich Luft von 1,2 Atmosphären Spannung und von $10^{\circ} C$ Temperatur. Es fragt sich, mit welcher Geschwindigkeit der Ausfluß in das Freie erfolgen wird, wenn man die Mündung so abgerundet hat, daß sie die Gestalt des zusammengezogenen Strahles annimmt und demzufolge der Ausflußcoefficient $\psi = 0{,}981$ ist.

Erste Auflösung.

Die Bernoulli'sche Formel liefert sofort:

$$v = 0{,}981 \,.\, 396 \sqrt{(1 + \delta t)\left(1 - \frac{p}{P}\right)}, \text{ d. i.}$$

$$v = 0{,}981 \,.\, 396 \sqrt{(1 + 0{,}00367 \,.\, 10)(1 - \tfrac{10}{12})}$$

$$v = 0{,}981 \,.\, 164{,}6 = 161^{m}{,}47.$$

Zweite Auflösung.

Die Navier'sche Formel liefert:

$$v = \psi \sqrt{2g \frac{P}{\Delta} \operatorname{Lgnt} \frac{P}{p}} = 0{,}981 \,.\, 396 \sqrt{(1 + \delta t) \operatorname{Lgnt} \frac{P}{p}}, \text{ d. i.}$$

$$v = 0{,}981 \,.\, 396 \sqrt{(11 + 0{,}00367 \,.\, 10) \operatorname{Lgnt} \tfrac{6}{5}},$$

$$v = 0{,}981 \,.\, 172{,}16 = 168^{m}{,}89.$$

Dritte Auflösung.

Von den genaueren Formeln lieferte IV:

$$v = \psi \,.\, 396 \sqrt{(1 + \delta t)} \,.\, \sqrt{\frac{n}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

$$v = 0{,}981 \,.\, 396 \sqrt{3{,}440\, [1 - (\tfrac{5}{6})^{0{,}2907}]}$$

$$v = 0{,}981 \,.\, 396 \sqrt{3{,}440 \,.\, [1 - 0{,}9484]}$$

$$v = 0{,}981 \,.\, 396 \sqrt{3{,}440 \,.\, 0{,}0516}$$

$$v = 0{,}981 \,.\, 166{,}84 = 163^{m}{,}67.$$

Es bleibt jetzt noch die Beantwortung der eben so interessanten, wie wichtigen Frage übrig, welche Temperatur die Luft in der Ausflußmündung besitzt, wenn sie im Innern des Gefäßes constant bleibt.

Hierüber giebt die Gleichung VI. sofort Auskunft, indem sie für $V =$ Null liefert:

$$T_2 = T_1 - \frac{A}{nc}\frac{v^2}{2g} = T_1 - \frac{v^2}{2gncE},$$

oder, da auch (nach S. 113)

$$T_2 = 273 + t_2 \text{ und } T_1 = 273 + t_1 \text{ ist:}$$

$$t_2 = t_1 - \frac{v^2}{2gncE}.$$

Nimmt man nun von den vorher für v berechneten Werthen den der dritten Auflösung für den wahrscheinlich richtigsten (den zweiten als unrichtig) an[1]), so ergiebt sich, wegen $n = 1{,}41$ (S. 125), $c = 0{,}16847$ (S. 131) und $E = 425$ (S. 133):

$$t_2 = 10 - \frac{(163{,}67)^2}{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 1{,}41 \,.\, 0{,}16847 \,.\, 425}, \text{ d. i.}$$

$$t_2 = 10 - 13{,}524 = -3{,}524.$$

Die Luft hat sich also beim Ausflusse bedeutend abgekühlt.

Hätte der Ausfluß ohne irgend welchen Mündungswiderstand geschehen können, so würde $\psi = 1$ und t_2 gewesen sein:

$$t_2 = 10 - \frac{(166{,}84)^2}{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 1{,}41 \,.\, 0{,}16847 \,.\, 425}, \text{ d. i.}$$

$$t_2 = 10 - 14{,}053 = -4{,}053.$$

Hieraus resultirt aber der hochwichtige Satz, daß durch die Widerstände in der Ausflußmündung die Luft um

$$4{,}053 - 3{,}524 = 0{,}529 \text{ Grad Celsius}$$

erwärmt wurde, d. h. der durch die Widerstände hervorgerufene Verlust an lebendiger Kraft besteht in Wirklichkeit nicht in dem Verschwinden von Arbeit, sondern in dem Umsetzen von Arbeit in Wärme, d. h. in Molekulararbeit.

§. 194.

Ausflußgeschwindigkeit gesättigter Wasserdämpfe.

Entsprechend den Erörterungen S. 160, Zusatz 2, lassen sich die für den Ausfluß permanenter Gase im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln auch für den Ausfluß des gesättigten Wasserdampfes aus Gefäßmündungen benutzen, wenn man die Zahl $n = 1{,}41$ durch den Erfahrungswerth Zeuner's (S. 160, Zusatz 2), d. i. durch

$$\varkappa = 1{,}035 + 0{,}10\, y \; ^{2})$$

---

[1]) Zuerst bestätigt durch die Versuche Weisbach's, worüber in §. 198, S. 667 berichtet wird.

[2]) Wir schreiben von hier an $\varkappa$ statt μ auf S. 160, da μ später überall den sogenannten Ausflußcoefficienten bezeichnete.

ersetzt, worin y angiebt, der wievielte Theil des Ganzen aus wasserfreiem, gesättigtem Dampfe besteht.

Hiernach wird z. B. aus IV:

$$v = \psi \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{P}{\Delta} \left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}, \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad v = 4{,}43 \psi \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{P}{\Delta} \left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}.$$

Zusatz. Eine von Redtenbacher[1]) angegebene Formel für die Geschwindigkeit des aus Gefäßmündungen in die atmosphärische Luft strömenden gesättigten Wasserdampfes, verdient zur Zeit immer noch beachtet zu werden[2]), weshalb deren Ableitung (wie in der ersten Auflage dieses Werkes) hier Platz finden mag.

Redtenbacher setzte hierbei voraus, daß der Dampf während seines Ausflusses gesättigt bleibe, auch sich kein Dampf niederschlage und endlich die Dichtigkeit Δ sich nach der Navier'schen (empirischen) Formel S. 169, d. i. nach $\Delta = \alpha + \beta z$ berechnen ließ, worin z die Spannkraft des Wasserdampfes pro Quadratmeter bezeichnet.

Wie S. 641 erhält man auch hier:

$$\frac{udu}{dx} = g \cdot \frac{-\Omega dz}{\Omega(\alpha + \beta z)\, dx}$$

und durch Integration:

$$\int_0^v udu = -g \int_P^p \frac{dz}{\alpha + \beta z}, \text{ d. i.:}$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{g}{\beta} \operatorname{Lgnt} \frac{\alpha + \beta p}{\alpha + \beta P}, \text{ oder}$$

$$\text{II.} \quad v = \sqrt{\frac{2g}{\beta} \operatorname{Lgnt} \frac{\alpha + \beta P}{\alpha + \beta p}} \; ^{3}).$$

---

1) Gesetze des Lokomotivbaues. Mannheim 1855. S. 34.

2) Grashof hat selbst in der 6. Auflage der von ihm herausgegebenen Redtenbacher'schen „Resultate für den Maschinenbau" (S. 194, Nr. 246), diese Formel beibehalten und die vorher entwickelte Formel (mit entsprechenden Modificationen) im Anhange (Resultate der mechanischen Wärmetheorie) mitgetheilt.

3) Für Dämpfe von 1 bis 2 Atmosph. Spannkraft:

$\alpha = 0{,}06295$

$\beta = 0{,}000051$

$\frac{\alpha}{\beta} = 1234$

Für Dämpfe von 2 bis 5 Atmosph. Spannkraft:

$\alpha = 0{,}1427$

$\beta = 0{,}0000473$

$\frac{\alpha}{\beta} = 3017.$

Diese der 6. Ausgabe von Redtenbacher's „Resultaten etc." entnommenen Werthe weichen ein wenig von den (älteren) Werthen, S. 169, ab.

Beispiel. Mit welcher Geschwindigkeit strömt gesättigter Wasserdampf aus der Sicherheitsventilöffnung eines Kessels, in welchem die Flüssigkeit eine Spannung von 5 Atmosphären besitzt und der Ausfluß direct in die atmosphärische Luft, ohne Reibung und sonstige Geschwindigkeitsverluste stattfindet?

Erste Auflösung.

Vorausgesetzt, daß nur reiner gesättigter Dampf ohne Beimischung von Wasser zum Ausflusse gelangt. Unter letzterer Voraussetzung ist $y = 1$ und daher $\varkappa = 1,035 + 0,10 = 1,135$, folglich nach I. (wegen $\psi = 1$ und $\Delta = 2,75$, S. 154):

$$v = 4,43 \sqrt{\frac{1,135}{0,135} \cdot \frac{5 \,.\, 10333}{2,75} [1 - (0,2)^{0,119}]}, \text{ oder}$$

$$v = 4,43 \sqrt{8,407 \,.\, 18787,27 \, [1 - 0,8257]}$$

$$v = 4,43 \sqrt{8,407 \,.\, 18787,27 \,.\, 0,1743}$$

$$v = 735,03 \text{ Meter.}$$

Ist der ausströmende Dampf mit 10 Procent Wasser vermischt, d. h. ist $y = 0,9$, so wird

$$\varkappa = 1,035 + 0,09 = 1,125,$$

sodann:

$$v = 4,43 \sqrt{9 \,.\, \frac{5 \,.\, 10333}{2,75} [1 - (0,2)^{0,111}]}$$

$$v = 4,43 \sqrt{9 \,.\, 18787,27 \, [1 - 0,8364]}$$

$$v = 13,29 \sqrt{18787,27 \,.\, 0,1636}$$

$$v = 736,798 \text{ Meter.}$$

Zweite Auflösung.

Die Redtenbacher'sche Formel liefert, wenn $\beta = 0,00005$ angenommen wird:

$$v = \sqrt{\frac{19,62}{0,00005} \cdot \text{Lgnt}\left(\frac{0,1427 + 0,0000473 \,.\, 5 \,.\, 10333}{0,06295 + 0,00005 \,.\, 1 \,.\, 10333}\right)}, \text{ d. i.}$$

$$v = 4,43 \sqrt{20000 \text{ Lgnt } 4,46}$$

$$v = 4,43 \,.\, 100 \sqrt{2 \,.\, 1,495148}, \text{ folglich}$$

$$v = 765,96 \text{ Meter.}$$

Letzterer Werth ist größer als der nach der ersteren Formel gefundene, was ganz natürlich ist, indem sich zeigen läßt[1]), daß wenn

---

[1]) In dem Werke Zeuner's „Das Lokomotiv-Blasrohr", findet sich S. 84 eine Tabelle für v, der wir folgende Werthe entnehmen:

	Atmosph.	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
Nach Zeuner	v in Metern	368,09	481,31	553,45	606,00
Nach Redtenbacher	v in Metern	368,38	487,63	565,36	622,87

reiner gesättigter Wasserdampf in die freie Luft strömt, bis zur Ebene der Mündung hin, eine theilweise Condensation stattfindet und zwar, daß die sich condensirende Dampfmenge (die dem Dampfe beigemischte Wassermenge) wächst, je höher der Druck im Kessel ist[1]).

§. 195.

Ausflußmenge der Gase nach Volumen und Gewicht.

Mit Hülfe der in §. 193 für die Ausflußgeschwindigkeit $= v$ der Gase gewonnenen Formel ergiebt sich die secundliche Ausflußmenge $= Q_2$ ganz so wie bei den wasserförmigen Flüssigkeiten, wenn nach §. 82 der Ausflußcoefficient $\mu = \psi\alpha$ gesetzt wird und a der Inhalt der Ausflußmündung ist, zu:

$$Q_2 = \mu a v, \text{ d. i.}$$

$$\text{I. } Q_2 = \mu a \sqrt{2g \frac{P}{\Delta} \frac{n}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Diese Gas- oder Windmenge strömt dabei unter dem Drucke p mit einer gewissen Dichtigkeit $= \Delta_0$ aus, für welche man (nach S. 125) hat:

$$\Delta_0 = \Delta \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ und}$$

$$t_0 = \frac{(1 + \delta t)\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1}{\delta} \text{ [2]).}$$

Daher erhält man für die unter dem inneren Drucke P, bei der Dichtigkeit Δ und der Temperatur t gemessene Luftmenge $= Q_1$:

$$Q_1 = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} Q_2 = \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{n}} Q_2, \text{ d. i.:}$$

---

[1]) Zeuner, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Zweite Auflage, S. 413.

[2]) Es ist nämlich $\frac{T_0}{T} = \frac{t_0 + 273}{t + 273} = \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, d. i. wegen $273 = \frac{1}{\delta}$

$$t_0 + \frac{1}{\delta} = \left(t + \frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \text{ daher auch}$$

$$t_0 = \frac{(1 + \delta t)\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1}{\delta}$$

$$\text{II.}\quad Q_1 = \mu a \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{2g\frac{P}{\varDelta}\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},\ \text{oder}$$

$$\text{III.}\quad Q_1 = \mu a \sqrt{2g\frac{P}{\varDelta}\frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2}{n}}-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]}.$$

Schließlich erhält man die Luftmenge $= Q$, welche Q_1 unter dem äußeren Drucke p, bei der gegebenen Temperatur t und der Dichte $\frac{p}{P}\varDelta$ annimmt:

$$Q = \frac{P}{p} Q_1 = \mu a \frac{P}{p}\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{2g\frac{P}{\varDelta}\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

$$Q = \mu a \left(\frac{P}{p}\right)\left(\frac{P}{p}\right)^{-\frac{1}{n}} \sqrt{2g\frac{P}{\varDelta}\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},$$

oder:

$$\text{IV.}\quad Q = \mu a \left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{n-1}{n}} \sqrt{2g\frac{P}{\varDelta}\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},$$

so wie endlich, wenn man wie S. 639, den Barometerstand b und den Manometerstand h einführt, und überdies beachtet, daß

$$\sqrt{2g\frac{P}{\varDelta}} = 396\sqrt{1+\delta t}\ \text{ist:}$$

$$\text{V.}\quad Q = 396\mu a\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\frac{n}{n-1}(1+\delta t)\left[1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},$$

oder auch:

$$\text{VI.}\quad Q = 396\mu a \sqrt{\frac{n}{n-1}(1+\delta t)\left(\frac{b+h}{b}\right)^2\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}}-1\right]}.$$

Bezeichnet man mit G_1 das Gewicht der Gasmenge Q_1 in II, so ergiebt sich aus II. und III:

$$\text{VII.}\quad G = \varDelta Q_1 = \mu a\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{2g\varDelta P\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

$$\text{VIII.}\quad G = \varDelta Q_1 = \mu a \sqrt{2g\varDelta P\frac{n}{n-1}\left[\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2}{n}}-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]}\ {}^{1}).$$

Zusatz. Man gelangt zu besonders interessanten Resultaten,

---

[1]) Man sehe Richard Rühlmann's (meines Neffen) „Handbuch der mech. Wärmetheorie", Bd. 1, S. 811.

wenn man, zunächst in Bezug auf das in VII. ermittelte Gewicht, die Frage erörtert, für welchen Werth von p dies G ein Maximum wird?

Nach den bekannten Lehren von Maximum und Minimum der Functionen findet man leicht, daß in der That ein Maximum statthat und zwar für:

$$\text{IX.} \quad p = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}} P.$$

Substituirt man diesen Werth in VII, so folgt:

$$\text{X.} \quad G_{max} = \mu a \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{2g\Delta P\left(\frac{n}{n+1}\right)}.$$

Gleichzeitig erhält man für die Maximalgeschwindigkeit, wenn man denselben Werth für $\frac{p}{P}$ aus IX. in IV, §. 193, einführt:

$$\text{XI.} \quad v_{max} = \psi \sqrt{2g \frac{n}{n+1} \frac{P}{\Delta}}.$$

Beachtet man nun, daß nach S. 125

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

ist, wenn T_1 die Temperatur im Gas- oder Windbehälter und T_2 die äußere Temperatur (ohne Vorlage, die der atmosphärischen Luft) bezeichnet, so ergiebt sich mit Zuziehung von Gleichung IX:

$$\text{XII.} \quad T_2 = T_1 \frac{2}{n+1}$$

und da überdies $\frac{P}{\Delta} = RT_1$ ist, schließlich:

$$\text{XIII.} \quad v_{max} = \psi \sqrt{gnT_2 \,.\, R.}$$

Bekanntlich ist aber $R = 29,27$ (nach S. 113, Nr. 7), ferner ist $n = 1,41$, so wie $g = 9,81$ angenommen werden kann, so daß man erhält ($\psi = 1$ gesetzt):

$$\text{XIV.} \quad v_{max} = 20,12 \sqrt{T_2} = 20,12 \sqrt{273 + t_2}.$$ [1])

Daher für $t_2 =$ Null:

$$v_{max} = 332,5 \text{ Meter.}$$

Nach S. 143 sind XIII. und XIV. die Gleichungen für die Geschwindigkeit der Wellen, womit sich Luft in einem cylindrischen Rohre fortbewegt, d. h. die Schallgeschwindigkeit in der atmosphärischen Luft bei der absoluten Temperatur $= T_2$.

Es ergiebt sich ferner der interessante aber wohl mehr zufällige Satz:

„Die Geschwindigkeit eines ausfließenden Luftstrahles in einer Mündung von solcher Gestalt, daß der Coefficient ψ gleich Eins ist, kann im Beharrungszustande niemals größer werden als die Schallgeschwindigkeit“.[2])

---

[1]) Nach Prof. Gustav Schmidt in Prag in der Zeitschrift des österreich. Ingenieur- und Architekten-Vereins, Jahrg. 1873, S. 227.

[2]) Mit Prof. Schmidt verdient hier ein Ausspruch erwähnt zu werden,

Endlich ist noch zu beachten, daß sich für $n = 1,41$ aus IX. ergiebt:

$$\frac{p_{max}}{P} = \left(\frac{200}{241}\right)^{3,439} = 0,5266\ ^{1}),$$

d. h. das Maximum der Ausflußmenge wird erhalten, wenn der äußere Druck p ungefähr die Hälfte des inneren Druckes beträgt.

Von letzterer Grenze an nimmt sonach die Ausflußmenge mit der Verminderung des äußeren Druckes ab und die Formeln zeigen sogar, daß sie für $p =$ Null, d. h. für den Fall, daß der äußere Werth gleich Null wird, ebenfalls die Werthe = Null liefern, so daß nach einem luftleeren Raume hin gar kein Ausströmen mehr stattfände[2]).

Zeuner[3]) dürfte wohl der erste gewesen sein, der auf das widersinnige des letzteren Resultates zuerst in ganz bestimmter Weise aufmerksam machte und zeigte, daß bei der Benutzung vorstehender Formeln eine unzulässige Annahme gemacht wurde.

In einem nächstfolgenden Paragraphen, worin die Geschichte des Ausflusses der Gase aus Gefäßmündungen erörtert wird, kommen wir auf diesen Gegenstand zurück.

Für gewöhnliche technische Anwendungen, insbesondere für Gebläse, Ventilatoren etc. kommt ein Sinken von p unter p_{max} nicht vor, da hier die Pressungsdifferenzen $P - p$ überhaupt verhältnißmäßig klein sind. In diesen Fällen sind diese Formeln ohne Weiteres brauchbar.

Anlangend den bei Gebläsdüsen in Anwendung zu bringenden Ausflußcoefficienten μ, müßte man, streng genommen, den von Weisbach für diese Gattung von Mündungsformen aus sorgfältigen Versuchen abgeleiteten Werth $\mu = 0,917$ in Rechnung bringen, hätte man nicht Rücksicht auf die Verengung zu nehmen, welche die Düse durch Ansätze (Schlackenbildung, Nasenbildung) erfährt. Es wird daher angemessen sein, den Rath des Prof. Schmidt und des Prof. v. Hauer zu befolgen[4]), die für schwach conische Gebläsdüsen $\mu = 0,86$ und für cylindrische Ansatzrohre (bei Bessemergebläsen) $\mu = 0,78$ zu nehmen rathen. Selbst Grashof, bei seiner sonst sehr strengen Auffassung der Ausflußgesetze atmosphärischer Luft, bemerkt[5]), daß der Coefficient μ,

---

den bereits 1861 Holzmann in seiner „Theoretischen Mechanik", S. 376, machte und der folgendermaßen lautet: „Der Beharrungszustand der Bewegung tritt (bei ursprünglich geringer Dichtigkeit vor der Ausflußmündung) erst dann ein, wenn die Dichte so groß geworden ist, daß die Geschwindigkeit des Ausströmens der Geschwindigkeit des Schalles gleich geworden ist".

[1]) Aus II, S. 640, entnahm seiner Zeit (1838) Coriolis

$$\frac{p_{max}}{P} = 0,60653.$$

[2]) Den Ausfluß der Gase in den luftleeren Raum behandelt höchst ausführlich Bauschinger in einem beachtenswerthen Artikel, welcher sich im 8. Jahrgange der Schlömilch'schen „Zeitschrift für Physik und Mathematik", S. 160, abgedruckt vorfindet.

[3]) Protokoll des Sächs. Ingenieur- und Architekten-Vereins. 75. Hauptversammlung (19. Nov. 1871), S. 50.

[4]) v. Hauer, „Die Hüttenwesen-Maschinen". Zweite Auflage (Leipzig 1876), S. 18 und S. 22.

[5]) Theoretische Maschinenlehre. Bd. 1, S. 554.

die Gesammtgröße a der (durch Schlackenansätze möglicherweise verengten) Düsenmündungen und die äußere Pressuug p (mit Rücksicht auf den Widerstand der Schmelzmassen) gewöhnlich mit größeren Fehlern behaftet sind, als die Formel an sich.

Nichtsdestoweniger halten wir für gebildetere Techniker und für Studirende technischer Hochschulen die Ansicht Grashof's[1]) für wichtig, dahin gehend, daß, wenn auch für die technischen Anwendungen vorzugsweise nur der Fall einer mäßigen Verschiedenheit der inneren und äußeren Pressung Wichtigkeit hat, es doch von Interesse ist, die Gesetze der Luftausströmung innerhalb des ganzen Aenderungsgebietes des Verhältnisses $\frac{p}{P}$ von 1 bis 0 zu prüfen.

Wir werden deshalb auch Veranlassung nehmen, in den nachher folgenden „Geschichtlichen Notizen“ auf letzteren Gegenstand ebenfalls zurückzukommen.

Beispiel 1. Am Regulator (Windsammler) eines Cylindergebläses für Hochofenzwecke ist der Stand des Quecksilbermanometers $h = 0^m,038$, die Temperatur der eingeschlossenen Luft beträgt $t = 20^\circ C$, der Barometerstand $b = 0^m,73$, während die conisch convergente Düse den kleinsten Durchmesser $\delta = 0^m,042$ hat.

Es fragt sich, wie groß das unter dem äußeren Drucke gemessene Luftquantum ist?

Auflösung. Hierzu dient unmittelbar die Formel V. dieses Paragraphen, d. i.:

$$Q = 396 \mu a \left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\frac{n}{n-1}(1+\delta t)\left[1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Nach den gegebenen Werthen ist aber:

$$a = \frac{\delta^2 \pi}{4} = 0,785\,(0,042)^2 = 0\square^m,001385.$$

$$\frac{b+h}{b} = \frac{768}{730} = 1,052;\ \frac{n-1}{n} = 0,291;\ \frac{n}{n-1} = 3,439.$$

$$\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{768}{730}\right)^{0,291} = \left(1,052\right)^{0,291};\ \left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(0,95\right)^{0,291},$$

Daher ($\mu = 0,86$ und $\delta = 0,00367$ angenommen):

$$Q = 396 \,.\, 0,86 \,.\, 0,001385 \,.\, (1,052)^{0,291} \sqrt{3,439 \,.\, 1,0734 \left\{1-(0,95)^{0,291}\right\}},$$

d i.: $Q = 0,1119$ Cubikmeter pro Secunde, oder
$60\,Q = 6,714$ „ „ Minute.

Die einfache D. Bernoulli'sche Formel S. 639 giebt $Q_1 = 0,108$ Cubikmeter pro Secunde unter dem inneren Drucke gemessen, folglich unter dem äußeren Drucke gemessen $Q = 0,108\frac{76}{73} = 0,1124$ Cubikmeter pro Secunde, oder $60\,Q = 60 \,.\, 0,1124 = 6,734$ Cubikmeter pro Minute.

Beispiel 2. Aus einem mit Steinkohlengas gefüllten Gasometer sollen für Beleuchtungszwecke pro Stunde 1000 Cubikmeter Gas, unter einem constanten Drucke von 0,045 Meter Wassermanometerhöhe, aus

[1]) Theoretische Maschinenlehre, Bd. 1, S. 554.

einer in dünner Wand zu bildenden kreisförmigen Oeffnung abgeführt werden, wenn die Temperatur des Gases 15° *C* und der äußere Barometerstand $0^m,755$ ist. Es fragt sich, welchen Durchmesser die Ausflußöffnung erhalten muß?

Auflösung. Wird das specifische Gewicht des Steinkohlengases zu 0,40 angenommen, so erhält man zuerst (nach §. 54 und §. 190) für das Gewicht der Cubikeinheit $= \Delta$ dieses Gases: $\Delta = \frac{0,5173 P}{10333 (1 + \delta t)}$.

Ferner folgt, wenn man die Wassermanometerhöhe auf die einer Quecksilbersäule reducirt, der betreffende Manometerstand

$$e = \frac{0,045}{13,6} = 0^m,00331, \text{ also } b + e = 0^m,755 + 0^m,00331 = 0^m,75831.$$

Daher wegen $v = \sqrt{\frac{2g}{\Delta}(P - p)}$, hier

$$v = 4,43 \sqrt{\frac{10333 (1 + \delta t)}{0,5173} \left(\frac{P - p}{P}\right)}, \text{ oder}$$

weil $\frac{P - p}{P} = \frac{e}{b + e}$ und $1 + \delta t = 1 + 0,00367 \,.\, 15 = 1,055$ ist:

$$v = 4,43 \sqrt{\frac{10333 \,.\, 1,055 \,.\, 0,00331}{0,5173 \,.\, 0,75831}}, \text{ woraus folgt:}$$

$$v = 42^m,487.$$

Der Mündungsdurchmesser $= \delta$, da die pro Secunde ausfließende Gasmenge $= Q = \frac{1000}{3600}$ sein soll, berechnet sich hiernach zu

$$\delta = \sqrt{\frac{Q}{3600 \,.\, 0,785 \,.\, \mu \,.\, v}} = \sqrt{\frac{1000}{3600 \,.\, 0,62 \,.\, 0,785 \,.\, 42,487}} = 0^m,1159,$$

sobald der Ausflußcoefficient $\mu = 0,62$ angenommen wird.

§. 196.

Ausflußmenge des gesättigten Wasserdampfes.

Die Geschwindigkeit, womit gesättigter Wasserdampf aus einer Gefäßmündung, unter constantem Drucke, im Beharrungszustande strömt, war nach §. 194:

$$v = 4,43 \psi \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{P}{\Delta} \left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]},$$

daher man für die secundliche Ausflußmenge $= Q$ erhält, wenn wieder a den Flächeninhalt der Mündung und α den Contractionscoefficienten bezeichnet:

$$Q = \alpha a v = 4,43 \alpha \psi a \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{P}{\Delta} \left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]}.$$

Ferner ergiebt sich das Gewicht G dieses Dampfes, die Dichte in der Mündung $= \Delta_0$ gesetzt und beachtet, daß (nach §. 82)

$\psi\alpha = \mu$ ist:

$$G = \Delta_0 a a v,$$

oder wegen (S. 125) $\Delta_0 = \Delta \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$:

$$G = 4{,}43\mu a \,.\, \Delta \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{P}{\Delta} \left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]}, \text{ d. i.}$$

$$\text{I.} \quad G = 4{,}43\mu a \sqrt{\Delta P \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} \left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]}, \text{ oder}$$

$$\text{II.} \quad G = 4{,}43\mu a \sqrt{\Delta P \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \left[\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa}}\right]}.$$

Für Δ setzen wir nach Zeuner (S. 151):

$$\Delta = 0{,}6061 \left(\frac{P}{p}\right)^{0{,}9393}.$$

Unter der (gewöhnlichen) Voraussetzung, daß der Dampfstrahl seine Dichte während des Ausströmens sehr wenig oder gar nicht ändert, also $\Delta_0 = \Delta$ und $P - p$ sehr klein ist, erhält man aus I. (auf demselben Wege wie im Zusatze 3, §. 193 angegeben wurde),

d. h. für $\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = 1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \left(\frac{P - p}{P}\right)$:

$$G = 4{,}43\mu a \sqrt{\Delta (P - p)}, \text{ d. i.}$$

$$\text{III.} \quad G = 4{,}43\mu a \sqrt{\Delta P \left(1 - \frac{p}{P}\right)},$$

sonach wieder denselben Werth, welchen das unter gleichen Umständen ausfließende secundliche Wasserquantum (nach Gewicht) liefert.

Zusatz 1. Für practische Zwecke wird man (übereinstimmend mit Grashof)[1]) für den Ausflußcoefficienten μ einstweilen die betreffenden, für atmosphärische Luft aus Erfahrungen und Versuchen gewonnenen Werthe (S. 652 und S. 669) in Rechnung bringen müssen. Ausnahme hiervon machen gewisse Sicherheitsventile von Dampfkesseln, für welche man, nach directen Versuchen Kolster's[2]), setzen kann:

---

[1]) Redtenbacher's „Resultate für den Maschinenbau". Sechste Auflage (1875), S. 486, Nr. 59.

[2]) Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure. Bd. XI, Jahrg. 1867, S. 433 unter der Ueberschrift: „Ueber das Ausströmen von Dampf und Luft aus Gefäßmündungen und über die Dimensionen der gebräuchlichen Sicherheitsventile". Kolster's Arbeit ist namentlich für Ingenieure höchst beachtenswerth. Derselbe weist u. A. hierbei auch nach, daß, während beim Wasser der Ausflußquerschnitt stets kleiner als der Mündungsquerschnitt ist, bei hochgespannten elastischen Flüssigkeiten gerade das Gegentheil stattfindet, d. h. der

$\mu = 0,977$ für ein Ventil mit ebener Sitzfläche.

$\mu = 0,886$ „ „ „ „ conischer „

Wie schon andere Experimentatoren und ähnlich wie oben beim Ausflusse atmosphärischer Luft, untersuchte auch Kolster in der unten bezeichneten Abhandlung die Spannungsveränderungen in den Querschnitten $\overline{BB'}$, $\overline{EF}$ und $\overline{CD}$ des Gefäßes BD, Fig. 223 (S. 639), berechnet zum näheren Aufschluß der Frage Tabellen, setzt dabei $\left(\frac{z}{P}\right) = y$ und findet (für $\varkappa = 1,135$):

$$y_{max} = 0,5776, \text{ also } z_{max} = 0,5776\,P.$$

Für diesen Werth muß also der variable Querschnitt ω ($= \overline{EF}$) sein Minimum erreichen, so daß die Spannung im engsten Querschnitte nur von der Anfangsspannung abhängig ist und zu dieser in einem constanten Verhältnisse steht[1]). Für $z = 0,5776\,P$ fließt das Maximum des Gewichtes aus etc.

Zusatz 2. Mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie läßt sich zeigen[2]), daß bei der Voraussetzung, unter welchen die vorstehenden Formeln für v und G abgeleitet wurden, in der Ebene der Ausflußmündung die Flüssigkeit stets aus einem Gemische von Wasser und Dampf besteht. Setzt man daher im Dampferzeuger (Kessel) nur reinen Dampf voraus, so muß sich beim Hinströmen nach der Mündung offenbar ein Theil des Dampfes condensiren und zwar läßt sich zeigen, daß die beim Ausströmen in die Atmosphäre beigemischte Wassermenge um so größer wird, je höher der Dampfdruck im Kessel ist[3]).

Der ausströmende Dampfstrahl erweitert sich conisch nach außen hin (bildet bis auf eine gewisse Entfernung hin fast genau einen Kegel)[4]). In verhältnißmäßig geringer Entfernung von der Mündung verschwindet

---

Ausflußquerschnitt größer als der Mündungsquerschnitt ist und daß derselbe stets vor der Gefäßmündung zu suchen ist. Der kleinste Querschnitt des ausfließenden Strahles (mit größerer Spannung) liegt näher der Mündung. Man sehe hierüber auch die Ergebnisse der Forschungen Zeuner's im nachfolgenden Zusatze 2.

[1]) Eine sehr übersichtlich berechnete Tabelle Kolster's (a. a. O., S. 438) giebt nähere Auskunft. Hiernach ist der Strahlquerschnitt, in welchem $z = p$ wird, nicht immer der kleinste, vielmehr kommen zwischen dem Ausflußquerschnitte und dem Ausflußgefäße immer noch kleinere vor.

[2]) Zeuner, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Zweite Auflage, S. 412. — Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. 1, S. 637.

[3]) Nach Zeuner hat zuerst Joule darauf aufmerksam gemacht, daß man unbedenklich die Hand in einen aus einer Mündung selbst unter sehr hohem Drucke tretenden Dampfstrahl halten könne, ohne ein Verbrühen der Hand zu befürchten. Clausius und Zeuner haben gezeigt, daß die mechanische Wärmetheorie diese Erscheinung leicht erklärt. (Man sehe hierüber das citirte Werk Zeuner's, „Das Lokomotiv-Blasrohr“, S. 88.)

[4]) Zeuner, „Das Lokomotiv-Blasrohr“, S. 89. Zeuner hat den Winkel des Strahlkegels durch Versuche ermittelt und denselben zwischen 20° 24′ und 24° 4′ gefunden, den kleineren Winkel bei höherer, den größeren bei niedriger Dampfspannung.

das beigemengte Wasser wieder[1]) und noch weiterhin ist dann der Dampf überhitzt.

Innerhalb welcher Grenzen diese Resultate Gültigkeit haben können, hat vorzüglich Grashof im ersten Bande, §. 111, seiner „Theoretischen Maschinenlehre" erörtert, worauf hier recht angelegentlich verwiesen werden muß.

Zeuner hat zur Beurtheilung der technisch wichtigen Hauptfrage, wie groß nämlich Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge der aus reinem Dampfe und Wasser gebildeten Mischung, unter verschiedenen Pressungen in einem Dampfkessel ist, eine Tabelle unter Zuziehung der streng nach den Sätzen der mechanischen Wärmetheorie entwickelten Formeln berechnet[2]), die leider nicht ohne Hülfe der S. 153 mitgetheilten Tabellen benutzt werden können und weshalb hier diese Ermittelungen (nach Kolster) mit vorstehenden Hauptformeln, nämlich mit

$$v = 4{,}43 \,.\, \psi \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{P}{\varDelta}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}$$

und mit

$$G = 4{,}43\,\mu a \sqrt{\varDelta P \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}$$

vorgenommen wurden.

Um zum Rechnen möglichst einfache Gestalten zu erhalten, wurde (mit Zeuner) der Ausfluß trockenen, gesättigten Wasserdampfes in die freie Atmosphäre vorausgesetzt, wofür ist:

$$\varkappa = 1{,}135;\ \frac{\varkappa}{\varkappa-1} = 8{,}407;\ \frac{2}{\varkappa} = 1{,}762 \text{ und } \frac{\varkappa-1}{\varkappa} = 0{,}119.$$

Ferner (nach S. 151) $\varDelta = 0{,}6061\left(\frac{P}{p}\right)^{0{,}9393}$ und $\psi = \mu = 1$, so wie ebenfalls $a = 1$ und endlich $p = 10333$ angenommen.

Sodann ergiebt sich:

$$\text{III.}\quad v = 1266{,}7\sqrt{P^{0{,}0607}\left[1-\left(\frac{10333}{P}\right)^{0{,}119}\right]} \text{ und}$$

$$\text{IV.}\quad G = 447{,}56\sqrt{P^{0{,}1773}\left[1-\left(\frac{10333}{P}\right)^{0{,}119}\right]}.$$

Zur Berechnung der specifischen Dampfmenge x_2 in der Ebene der Mündung wurde die Zeuner'sche Formel S. 159 benutzt, aus

---

[1]) Beispielsweise war bei einer Mündung von 10 Millim. Durchmesser schon in der Entfernung von 12 Millim. bereits reiner gesättigter Dampf vorhanden, letzteren von keiner höheren Spannung als der von $1\frac{1}{2}$ Atm. Ueberdruck vorausgesetzt.

[2]) Zeuner, Grundzüge etc. S. 411. Die betreffende Formel dieses Autors (die Bezeichnungen nach S. 153 und 169, $\sigma = \frac{1}{1000}$):

$$A\,\frac{v^2}{2g} = \frac{x_1 r_1}{T_1}(T_1 - T_2) + q_1 - q_2 - T_2(\tau_1 - \tau_2) + A\sigma(P - p).$$

$$\left(A = \frac{1}{E} = \frac{1}{425}\right).$$

welcher folgt:

$$x_2 = \frac{T_2}{r_2} \left\{ \frac{x_1 r_1}{T_1} + \tau_1 - \tau_2 \right\},$$

oder für $x_1 = 1$ Kilogramm:

$$x_2 = \frac{T_2}{r_2} \left[\frac{r_1}{T_1} + \tau_1 - \tau_2 \right]$$ [1]).

Kesseldruck in Atmosphären	Secundliche Ausflußgeschwindigkeit $= v$ in Metern		Secundliche Ausflußmenge der Mischung in Kilogrammen $= G$		Secundliche Ausflußmenge in Kilogrammen (nach Zeuner)	
	Nach Zeuner	Vorsteh. Formel	Nach Zeuner	Vorsteh. Formel	Dampf	Wasser
2	481,71	483,58	304,12	304,07	291,86	12,26
5	734,32	736,32	489,38	489,60	444,90	44,48
7	807,57	811,90	548,95	550,04	489,28	59,67
10	878,74	884,84	609,85	600,5	532,40	77,45
14	941,06	946,95	665,67	667,76	570,15	95,52

Zusatz 3. Von den Formeln III. und IV. kann man einigermaßen Gebrauch machen, wenn es sich um angenäherte Berechnung der Größe der Durchmesser von Sicherheitsventilen bei Dampfkesseln handelt.

Nehmen wir beispielsweise an[2]), es wäre der Ventildurchmesser $= d$ (Fig. 57, S. 110) unter der Voraussetzung zu ermitteln, daß der gesättigte Kesseldampf eine Spannung von 4 Atmosphären besitzt, pro Stunde 250 Kilogramm Dampf entwickelt werden müssen[3]) und das

---

[1]) Beispielsweise ist für den Druck von 2 Atmosphären im Kessel, nach der kleinen Tabelle S. 159:

$\frac{r_2}{T_2} = 1{,}4388$; $\frac{r_1}{T_1} = 1{,}3258$; $\tau_1 = 0{,}3681$ und $\tau_2 = 0{,}3135$, daher:

$$x_2 = \frac{1}{1{,}4388} (1{,}3258 + 0{,}3681 - 0{,}3135) = 0{,}9597.$$

Der Gewichtseinheit Mischung wohnt also, in diesem Falle, in der Ebene der Mündung 0,9597 Kilogr. Dampf und 0,0402 Kilogr. Wasser inne. Im Falle, daß (wie in der folgenden Tabelle) $G = 304{,}12$ Kilogr. ist, ergeben sich daher $304{,}12 \times 0{,}9597 = 291{,}86$ Kilogr. Dampf und demnach 12,22 Kilogr. Wasser.

[2]) Der Verfasser entlehnt dies Beispiel (des Vergleichs wegen) absichtlich dem 2. Bande (4. Auflage), S. 968 der Weisbach'schen Ingenieur-Mechanik.

[3]) Setzt man einen mäßig geschonten, cylindrischen (Walzen-) Dampfkessel voraus, so kann man (nach v. Reiche, „Anlage und Betrieb der Dampfkessel". Zweite Auflage, S. 234) annehmen, daß jeder Quadratmeter seiner Heizfläche pro Stunde 16,66 Kilogr. Dampf producirt, die gesammte Heizfläche des fraglichen Kessels also $\frac{250}{16{,}66} = 15$ Quadratmeter betragen muß.

Für sehr stark angestrengte cylindrische Kessel schätzt v. Reiche die stündliche Dampfproduction bis zu 30 Kilogramm. Grove (Die Lokomotive im Allgemeinen) rechnet die Verdampfungsfähigkeit der Lokomotivröhrenkessel zu 32 bis 43 Kilogr. Dampf pro Quadratmeter.

Ventil (Fig. 57) eine ebene Sitzfläche hat, also der Ausflußcoefficient (nach Kolster) $\mu = 0,977$ ist. Die Formel IV. giebt für

$$P = 4 \,.\, 10333 = 41332 \text{ Kilogramm}$$

das Dampfgewicht G für die Einheit der Mündungsfläche zu

$$G = 447,83 \text{ Kilogramm,}$$

daher man erhält, wenn mit G_1 das in Rechnung zu bringende secundliche Dampfquantum bezeichnet wird:

$$G_1 = 447,83 \,.\, \mu \,.\, \frac{d^2\pi}{4}.$$

Nimmt man nun mit den Practikern an, daß das Ventil eine 20fache Sicherheit bieten, also das 20fache der erzeugten Dampfmenge in Rechnung gebracht werden soll, so erhält man

$$G_1 = \frac{250}{3600} \,.\, 20 = 1,388, \text{ daher}$$

$$1,388 = 447,83 \,.\, 0,977 \,.\, 0,785 d^2, \text{ folglich}$$

$$d = \sqrt{\frac{1,388}{447,83 \,.\, 0,977 \,.\, 0,785}}, \text{ d. i.}$$

$$d = 0^m,0635 = 6,35 \text{ Centimeter.}$$

Weisbach findet (a. a. O., S. 969) nach seiner Formel

$$d = 0,178 \text{ Fuß rhn.} = 0^m,0559 = 5,59 \text{ Centimeter.}$$

Zu ferneren Vergleichen werde erwähnt, daß eine aus Versuchen von Thrémery[1]) (1841) ermittelte Formel fordert, daß

$$d = 2,6 \sqrt{\frac{F}{i - 0,412}} \text{ Centimeter}$$

genommen wird, wenn F die Heizfläche in Quadratmetern und i die Dampfspannung im Kessel (also nicht Ueberdruck) in Atmosphären bezeichnet. Für unsern Fall erhält man daher

$$d = 2,6 \sqrt{\frac{15}{4 - 0,412}} = 5,316 \text{ Centimeter.}$$

Ferner daß das frühere Königl. Sächs. Dampfkesselgesetz in gleicher Weise vorschreibt[2]):

$$d = 2,6 \sqrt{\frac{F}{i_1 + 0,588}},$$

wonach für unser Beispiel sich ergiebt (da hier i_1 = Atmosph.-Ueberdruck bezeichnet)

$$d = 2,6 \sqrt{\frac{15}{3,588}} = 5,316 \text{ Centimeter.}$$

Früher mußte zufolge gesetzlicher Bestimmungen in Preußen der Querschnitt des Sicherheitsventiles in Quadratmillimetern folgender Tabelle entsprechen:

---

[1]) Annales des mines. Tome XX, 1841.

[2]) Scholl, Führer des Maschinisten. Neunte Auflage (1875), S. 572.

Dampfüberdruck $= i_1$ in Atmosphär.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	$5\frac{1}{2}$	6
Querschnitt in □mm pro 1□m Heizfläche	482	338	255	207	174	154	135	121	96	89	82

Für unser Beispiel, wo 15 Quadratmeter Heizfläche vorausgesetzt wurden, würde daher bei $i_1 = 3$ Atmosphären Ueberdruck ein Ventildurchmesser d erforderlich gewesen sein, welcher der Gleichung entspricht:

$$\frac{d^2\pi}{4} = 154 \,.\, 15 = 2310^{\square mm} = 23{,}10 \square\text{Centimeter}.$$

Daher

$$d = 5{,}42 \text{ Centimeter}.$$

Rationelle Practiker[1]) betrachten die theoretischen Untersuchungen über die erforderliche Größe des Sicherheitsventiles geradezu als werthlos, weil die Basis, auf welcher sie beruhen, nicht gut fundirt ist.

Hiermit stimmen auch die neuerdings von den meisten Regierungen (u. a. die Preußische) erlassenen gesetzlichen Bestimmungen überein, eine bestimmte Oeffnungsgröße der Dampfkesselventile gar nicht mehr vorzuschreiben, die Ventilbelastungen durch Versuche zu ermitteln und daher das Ventil eigentlich nur als einen Alarmapparat zu betrachten, welcher eine Dampfspannung anzeigt, die jene übertrifft, welche gesetzlich als Maximum zulässig ist.

Höchst bemerkenswerth ist daher der Schlußsatz, welchen Grashof einer interessanten Abhandlung über die Größe der Sicherheitsventile im 1. Bande seiner theoretischen Maschinenlehre, §. 113 beifügt und welcher S. 656 also lautet:

„Zur noch größeren Sicherheit und zur Vermeidung unnöthigen Dampfverlustes bleibt es immerhin rathsam, die Kesselwärter dahin zu instruiren, daß er das Feuer zu mäßigen hat, sobald das Ventil abzublasen anfängt, dieses also in erster Reihe lediglich als Signalvorrichtung zu betrachten".

§. 197.

Ausfluß der Gase und Dämpfe aus Gefäßmündungen bei veränderlicher Druckhöhe.

Um keinen Gegenstand unerörtert zu lassen, der Analogie des Ausflusses tropfbarer Flüssigkeiten, §. 87 und §. 116, zu entsprechen und wie S. 233 für Wasser, so auch für elastische Flüssigkeiten die Ausflußcoefficienten für Gefäßmündungen bei variabeln Pressungen, abnehmenden Manometerständen berechnen zu können, folgen hier nachstehende Erörterungen.

Unter dem äußeren Drucke p gemessen fanden wir S. 650, IV für das secundlich aus einer Gefäßmündung strömende Luftquantum $= Q$ die Gleichung:

[1]) v. Reiche, Anlage und Betrieb der Dampfkessel. Zweite Auflage, S. 246.

$$Q = \mu a \left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{n-1}{n}} \sqrt{2g \frac{n}{n-1} \frac{P}{\varDelta} \left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},$$

oder, wenn man den Barometerstand b und den Manometerstand h einführt und beachtet, daß für atmosphärische Luft

$$\sqrt{2g \frac{P}{\varDelta}} = 396 \sqrt{1 + \delta t} \text{ ist:}$$

$$Q = 396 \mu a \left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\frac{n}{n-1}(1 + \delta t) \left[1 - \left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Ist h variabel, so erhält man hieraus das Ausflußquantum dQ, welches einem Zeitelemente dt entspricht, zu:

$$(1)\ dQ = 396 \mu a dt \left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\frac{n}{n-1}(1+\delta t) \left[1 - \left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{V}$ den Cubikinhalt des Behälters (Kessels), aus welchem die Luft durch die Mündung a strömt, so hat man noch:

$$(2)\ dQ = \frac{\mathfrak{V} dh}{b}\ ^{1)},$$

daher aus (1) und (2):

$$dt = \frac{\mathfrak{V}}{396 \mu a b \sqrt{\frac{n}{n-1}(1 + \delta t)}} \cdot \frac{dh}{\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}}$$

und folglich:

$$\text{I. } t = \frac{\mathfrak{V}}{396 \mu a b \sqrt{\frac{n}{n-1}(1 + \delta t)}} \cdot \int \frac{dh}{\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}}.$$

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß sich statt $\mathfrak{V}$ auch das ursprüngliche Gewicht G des Gases einführen läßt[2]).

---

[1]) Ist h_0 der anfängliche Manometerstand und h_1 der am Ende einer Zeit t, so ist das auf den äußeren Druck (beim Barometerstande b) reducirte Volumen: $\mathfrak{V} \frac{(b + h_0)}{b}$ und am Ende der Zeit t: $\mathfrak{V} \frac{(b+h_1)}{b}$. Daher erhält man für das in der Zeit t ausgeflossene, unter dem äußeren Drucke gemessene Luftquantum: $\frac{\mathfrak{V}}{b}[(b + h_1) - (b + h_0)] = \frac{\mathfrak{V}(h_1 - h_0)}{b}$ und demnach für das Quantum, welches in Zeitelemente dt ausgeflossen ist:

$$\frac{\mathfrak{V} dh}{b}.$$

[2]) Man sehe hierzu die wiederholt citirte Arbeit Kolster's, „Ueber das Ausströmen von Dampf und Luft aus Gefäßmündungen". Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenienre, Bd. XI (1867), S. 715 ff.

Wie S. 233 (§. 87) im ähnlichen Falle beim Wasser, kann man I. auch benutzen, um den Ausflußcoefficient μ aus Versuchen zu ermitteln. Man erhält dann:

$$\text{II. } \mu = \frac{\mathfrak{B}}{396 abt \sqrt{\frac{n}{n-1}(1+\delta t)}} \cdot \int \frac{dh}{\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\left[1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}}.$$

Unter Andern hat Weisbach letztere Formel zur Berechnung von μ aus seinen schönen Versuchen über den Ausfluß der Luft unter hohem Drucke in Anwendung gebracht [1]), die vorgeschriebene Integration aber dadurch ausgeführt, daß er h als Abscisse $= x$ und

$$\frac{1}{\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\left[1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}}$$

als Ordinate $= y$ einer Curve ansah und deren Quadratur $\int y dx$ durch Anwendung der Simpson'schen Regel bestimmte.

Noch andere werthvolle Arbeiten über denselben Gegenstand haben Bauschinger [2]), Grashof [3]) und Herrmann [4]) geliefert.

§. 198.

Geschichtliche Notizen.

(Theorie und Versuche, den Ausfluß elastischer Flüssigkeiten aus Gefäßen betreffend.)

Die Theorie des Ausflusses elastischer Flüssigkeiten aus Gefäßmündungen behandelte zuerst mit Erfolg Daniel Bernoulli in seinem berühmten Werke „Hydrodynamica". [5]) Er setzte dabei die Flüssigkeit im Innern des Gefäßes als ruhend, die Pressungen in der ganzen Ausdehnung des Gefäßes als constant voraus und nahm ferner an, daß die Molecüle, welche die Gefäßmündung durchströmen, eine Geschwindigkeit besitzen, die dem Ueberschusse der inneren Pressung über der äußeren

---

[1]) Civilingenieur, Bd. 5 (1859), S. 6 ff. und Bd. 12 (1866), S. 9.

[2]) Theorie des Ausströmens vollkommener Gase aus einem Gefäße und ihres Einströmens in ein solches. (Ueberall auf Grundlage der mechanischen Wärmetheorie.) Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 8 (1863), S. 81—183.

[3]) Theoretische Maschinenlehre, Bd. 1, S. 569 ff.

[4]) Compendium der mechanischen Wärmetheorie. Berlin 1869, S. 59 ff.

[5]) Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum Commentarii. Argentorati, 1738, Sect. X, Problem 35, Pag. 226 ff. Wer sich für die Bernoulli'sche Behandlung des Gegenstandes besonders interessirt, findet einen passenden Auszug, in deutscher Sprache, im VII. Bande des Physikalischen Wörterbuches von Gehler, Capitel „Pneumatik", von S. 602 ab. Hier werden sowohl betreffende Formeln für den Ausfluß bei constantem als veränderlichem Drucke abgeleitet.

entsprechend ist, der Ausfluß also überhaupt wie bei nicht zusammendrückbaren Flüssigkeiten, d. h. bei constanter Dichte erfolge.

Die betreffenden Formeln für die Ausflußgeschwindigkeit sind dann die des §. 191.

Demselben Gegenstande widmeten sowohl Johann Bernoulli[1]) und Leonhard Euler[2]), als auch d'Alembert[3]) und Bossut[4]) ihre Aufmerksamkeit, ohne jedoch wesentliche Vervollkommnungen der Theorie (insbesondere für die Praxis) zu erringen. Der Einfachheit wegen wurden die Formeln des Daniel Bernoulli von den Deutschen[5]) und Engländern[6]) beibehalten, während sich in den zwanziger Jahren zuerst die Franzosen um genauere Lösung des Problems bemühten.

Die ersten beachtenswerthen Versuche über den Ausfluß atmosphärischer Luft aus Gefäßmündungen, scheinen der Engländer Young und der Schwede Lagerhjelm angestellt zu haben. Ueber die des Ersteren wird berichtet in Gilbert's Annalen der Physik, Bd. XXII, Jahrg. 1801, S. 385.

Die viel bedeutenderen Lagerhjelm'schen Versuche werden behandelt in dem schwedischen Werke „Hydrauliska Försök af Lagerhjelm, Forselles och Kallstenius“, 1 Delen, Stockholm 1818. Ferner berichten über dieselben Saint-Venant und Wantzel in dem Journal de l'école polytechnique, Tome XVI (1838), Pag. 106, ferner Girard in den Annales de Chimie et de Physique, Tome XXI (1822), so wie d'Aubuisson in seinem „Traité d'hydraulique“, seconde édition, Pag. 578. Die für den Ausfluß aus dünner Wand erhaltenen Coefficienten variirten von 0,58 bis 0,70, während der Mittelwerth sich zu 0,62, also im Allgemeinen wie beim Wasser herausstellte (S. 198 und S. 199).

Der erste deutsche Physiker, welcher sich um dieselbe Sache verdient machte, war der Professor Schmidt an der Universität Gießen, der seine Versuche im 66. Bande von Gilbert's Annalen der Physik (1820) veröffentlichte. Führte dieser Physiker auch seine Versuche nur im Kleinen aus, so lieferten sie doch schon sehr brauchbare Ergebnisse. Die vorzüglichsten der damaligen im Großen ausgeführten Versuche sind die von Koch (seiner Zeit Eisenhüttengehülfe zu Königshütte am Harz, später Bergrath in Grünenplan), worüber berichtet wird im 1. Bande (1824), S. 1, der Studien des Göttingen'schen Vereins Bergmännischer Freunde. Da dieser Experimentator nicht von ganz richtigen Principien ausging, so bedurften seine Ergebnisse noch besondere Berechnungen, deren sich nach einander unterzogen Schmidt im 2. Bande (1824), S. 39 von Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie, ferner Buff ebendaselbst im 37. Bande (1836), S. 277. Gerstner legte bei seinen Untersuchungen im 3. Bande seines Handbuches der

[1]) Hydraulica etc. Anno 1732.

[2]) Principes généraux du mouvement des fluides. 1755.

[3]) Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides. 1744.

[4]) Hydrodynamique. 1794.

[5]) Eytelwein, Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. 1800 (Erste Auflage), 1823 (Zweite Auflage), §. 202.

[6]) Robison, Mechanical Philosophy. 1822. — Olinth Gregory, Darstellung der mechanischen Wissenschaften, übersetzt von Dietlein. Halle 1824.

Mechanik die Koch'schen Versuche zu Grunde, verwechselte aber dabei das in Hannover übliche Calenberger Maaß mit dem Rheinländischen, so daß die Koch'schen Versuche nicht zu der verdienten Geltung gelangten.

Die Methoden, nach welchen Schmidt und Koch experimentirten, stimmten im Wesentlichen mit einander darin überein, daß Beide bei veränderlichen Druckhöhen operirten. Das dabei ausgeflossene Luftquantum wurde nach Formeln berechnet, welche im Allgemeinen denen des Wassers gleich kommen, wie solche im §. 87 und ferner aufgestellt wurden.

Das meiste Aufsehen erregten seiner Zeit die Versuche d'Aubuisson's über den Ausfluß der Luft aus Gefäßmündungen, welche derselbe für rein practische Zwecke (wie vor ihm Lagerhjelm) unter constantem Drucke (im Anfange der zwanziger Jahre) anstellte. Ausführliches über diese Versuche findet sich in einer von d'Aubuisson selbst geschriebenen Abhandlung, welche in den Annales des mines, Tome XIII, 1826 abgedruckt wurde. Einen schönen Auszug hiervon giebt d'Aubuisson in der zweiten Auflage (1840) seines „Traité d'hydraulique", Nr. 502 bis mit Nr. 508. Merkwürdiger Weise wichen die d'Aubisson-schen Versuchsresultate (für die drei technisch wichtigen Hauptmündungen, nämlich dünne Wand, kurze cylindrische und kurze conische Ansätze) wesentlich von den Resultaten der Schmidt'schen und Koch-schen Versuche ab. Weisbach[1]) zeigte zuerst, daß die Ursache hiervon besonders in der Unrichtigkeit der von d'Aubuisson zur Berechnung seiner Versuche angewandten Formel lag, eine Behauptung, die durch spätere Versuche von Buff zur Gewißheit wurden. In letzterer Beziehung ist noch zu bemerken, daß Buff's Versuche außerdem den Zweck hatten, die Ausflußcoefficienten für ganz geringe Pressungen zu ermitteln, welche in der Praxis am Meisten vorkommen, da auch die Versuche von Koch über diesen Gegenstand nicht Auskunft gaben, indem diese schon Druckhöhen von $\frac{1}{2}$ bis 7 Fuß Wassersäule umfassen. Buff selbst berichtet über seine Versuche und deren Resultate ausführlich in Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 40 (1837), S. 14 ff.

Die am Ende der dreißiger Jahre gewonnenen Versuchsresultate (und deren Abweichungen) lassen sich aus folgender Tabelle entnehmen:

Mündungsform	Es fand:		
	d'Aubuisson	Buff	Weisbach aus Koch's Versuchen
Für die dünne Wand	$\mu = 0,65$	$\mu = 0,50$ bis $0,60$	$\mu = 0,57$ bis $0,62$
Für kurze cylindrische Ansätze	$\mu = 0,93$	$\mu = 0,72$ bis $0,74$	$\mu = 0,72$ bis $0,76$
Für kurze conische Ansatzröhren von 5° bis 15° Convergenzwinkel	$\mu = 0,94$	$\mu = 0,73$ bis $0,85$	$\mu = 0,85$ bis $0,89$

[1]) Hülse, Allgemeine Maschinenencyklopädie. Bd. 1, S. 626 und 629.

Wir sind mit unserem Referate über Versuchsresultate des Ausströmens atmosphärischer Luft aus Gefäßmündungen der Zeit vorangeeilt, wo Navier seine in §. 192 entwickelten Formeln (1827) veröffentlichte [1]), die jedoch in Deutschland erst durch Weisbach in weiteren Kreisen bekannt wurden. Daher kam es auch, daß alle von Weisbach in der Hülse'schen Maschinenencyklopädie, Artikel „Ausfluß", angewandten Formeln keine anderen als die Navier's sind. Bis zum Jahre 1838 hatte man von keiner Seite erhebliche Einwendungen gegen die Navier'schen Formeln gemacht und stimmten ihre Resultate in der That hinlänglich mit den Versuchen überein, so lange man voraussetzte, daß der Druck in der Ebene der Ausflußmündung gleich dem in der Vorlage, d. h. in dem Raume ist, wohin sich der Luftstrom ergießt.

Coriolis scheint der Erste gewesen zu sein, der (1838) darauf aufmerksam machte, daß diese Annahme nicht mehr gilt, wenn die Pressungsdifferenzen im Ausflußgefäße und in der Vorlage groß sind; sich vielmehr dann derartig sonderbare Schlüsse machen lassen, welche geeignet sind, die Genauigkeit der Hypothese zu verdächtigen, auf welcher die Ableitung der Formeln beruht [2]).

Unter Erklärung, daß die Navier'sche Ausflußformel falsch sei [3]), unternahmen es im Jahre 1839 deshalb die französischen Ingenieure des Ponts et Chaussées, Saint-Venant und Wantzel, eine ganz neue Formel unter der Voraussetzung großer Druckdifferenzen und unter Rücksichtnahme der Temperaturerniedrigung (Abkühlung) des Gases bei dessen Ausdehnung, aufzustellen [4]). Mit Hülfe des potenzirten Mariotte-schen Gesetzes (S. 125) gelangten dieselben zu der Formel für das aus einer Mündung von 1 Quadratmeter Inhalt austretende unter dem inneren Drucke gemessene secundliche Luftquantum (unter Beibehaltung unserer Bezeichnungen bis auf den Coefficienten m):

$$Q = m\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{P}{\varDelta}\,\frac{1-\left(\frac{p}{P}\right)^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}},$$

ein Werth, welcher identisch mit den bereits oben S. 650, Nr. II, gefundenen ist, sobald man dem Coefficienten m den entsprechenden Werth beilegt.

---

[1]) „Sur le mouvement d'un fluide élastique qui s'écoule hors d'un réservoir ou gazomètre", in den Annales de chimie et de physique, Tome XXXIV (1827). Ausführlich in den Mémoires de l'Académie des Sciences. Tome IX (1830), Pag. 311.

[2]) Comptes rendus des séances de l'Academie vom 19. Febr. 1838, Pag. 229. Coriolis zeigt zugleich, daß das beim inneren Drucke gemessene secundliche Luftquantum ein Maximum wird für $\frac{p}{P} = 0{,}60653$. Man vergleiche auch hiermit die betreffenden Resultate auf S. 652.

[3]) Comptes rendus etc. von 1843, Pag. 1140.

[4]) Journal de l'école royale polytechnique. 27e Cahier (1839), Tome XVI, Pag. 85.

Ganz besonders aber heben Saint-Venant und Wantzel hervor, daß in ihrer Formel p nicht als der Druck in der Vorlage, sondern als derjenige in der Ebene der Mündung anzusehen sei und daß beide Pressungen nur so lange identisch seien, als $\frac{p}{P} > 0{,}3$ bis 0,4, sobald aber dieses Verhältniß kleiner sei, so bleibe von da an die Ausflußmenge (selbst bei luftleerer Vorlage) constant. Die Verhältnißwerthe 0,3 bis 0,4 leiten die Experimentatoren aus ihren Versuchen ab, zu deren Berechnung sie merkwürdiger Weise nicht vorstehende Formel, sondern nicht ganz sachgemäße Annäherungsausdrücke benutzten. Letzterer Umstand, so wie die Thatsache, daß die Versuche von Saint-Venant und Wantzel (um entscheidend wirken zu können) unter viel zu geringen Druckhöhen ausgeführt wurden, waren Ursache, daß sich Poncelet (1845) entschieden gegen diese Versuche und deren Resultate aussprach[1]).

Gestützt auf im Anfange der vierziger Jahre angestellte Versuche von Pecqueur, Bontemps und Zambaux und unter Beachtung der älteren Versuche von Girard und d'Aubuisson, gelangte Poncelet in seinem über die Luftausflußfrage der Pariser Akademie der Wissenschaften am 21. Juli 1845 abgestatteten Berichte[2]) zu folgenden Hauptschlüssen:

1) Die Gase folgen beim Ausflusse durch Oeffnungen in Röhren, innerhalb weiter Grenzen, demselben Gesetze wie tropfbare Flüssigkeiten, oder das sie befolgen würden, wenn sie unzusammendrückbar wären.

2) Es findet bei den Gasen die nämliche Contraction und gleicher Verlust an lebendiger Kraft statt, welche für die letzteren Flüssigkeiten genügend genau von Borda angegeben wurden.

3) Bei Oeffnungen in dünner Wand, deren Querschnitt sehr klein ist, im Verhältniß zum Querschnitt des Gefäßes, und durch welche die gasförmige Flüssigkeit unter constantem Drucke ausströmt, ist der Ausflußcoefficient μ der äußeren Contraction, durch welchen die unter dem äußeren Drucke gemessene Ausflußmenge in der Formel:

$$Q = 396\,\mu a \sqrt{\frac{P}{p}(1 + 0{,}004\,t)\left(\frac{P}{p} - 1\right)}\ ^{3)}$$

---

[1]) Poncelet nennt deshalb die Versuche „mikroskopische“ (Comptes rendus, Tome XXI (1845), Pag. 178 und Pag. 387).

[2]) In deutscher Uebersetzung: Hülse, Polytechn. Centralblatt, Jahrg. 1845 (Bd. 6), S. 452.

[3]) Nach §. 195, Gleichung IV ist für sehr geringe Pressungen:

$$Q = \mu a \frac{P}{p}\sqrt{2g\,\frac{(P-p)}{\Delta}}$$

oder da man $\sqrt{2g\,\frac{P}{\Delta}} = 396\sqrt{1 + \delta t}$ hat:

$$Q = 396\mu a \frac{P}{p}\sqrt{(1+\delta t)\left(1 - \frac{p}{P}\right)} = 396\mu a \sqrt{\frac{P^2}{p^2}\,\frac{p}{P}\,(1+\delta t)\left[\frac{P}{p} - 1\right]}, \text{ d. i.}$$

$$Q = 396\,\mu a \sqrt{\frac{P}{p}(1 + \delta t)\left(\frac{P}{p} - 1\right)},$$

wo nur $\delta = 0{,}004$ statt $\delta = 0{,}00367$ zu setzen ist.

bestimmt werden kann,

$$\mu = 0{,}71 \quad 0{,}65 \quad 0{,}58 \quad 0{,}56 \text{ oder } 0{,}55$$

bei Pressungsunterschieden, welche

$$0{,}003, \quad 0{,}010, \quad 0{,}050, \quad 1{,}000$$

mal so groß sind als der äußere Druck, wobei vorausgesetzt wird, daß die Ausströmungsöffnung ganz isolirt von den Seitenwänden des Behälters sich befindet und daß daher die Contraction nicht partiell, sondern total ist.

Ohne von Saint-Venant und Wantzel's Formel Kenntniß zu haben, gelangte 1855 Weisbach (in der dritten Auflage seiner Ingenieur-Mechanik) wieder zu derselben und zwar zufolge der Wahrnehmung, daß bei Versuchen die Temperatur aus Gefäßen strömender atmosphärischer Luft, nach der Navier'schen Auffassung, schon bei $\frac{P}{p} = 2$ sich bis auf $-$ 126,25 Grad erniedrigen, d. h. eine so außerordentliche Kälte entwickeln würde, daß das Quecksilber gefriere, während unter Beachtung der Wärmelehre die Temperatur für den erwähnten speciellen Fall auf nicht mehr als $-$ 34,20 herabgehen konnte.

Die erwähnten, nie zu vergessenden Versuche Weisbach's, welche ganz bestimmt über den Unwerth der Navier'schen Formel entschieden, wurden in den Jahren 1856 bis 1865 angestellt[1]) und zwar mit so großen Mitteln und bei viel bedeutenderen Pressungen (von $\frac{21}{20}$ bis $\frac{5}{2}$ Atmosphären Kesseldruck), als die Versuche sämmtlicher Vorgänger.

Als Luftsammelgefäß benutzte Weisbach einen Dampfkessel, dessen Gestalt (Kreiscylinder mit halbkugelförmigen Enden) aus nachstehender Fig. 223ª erhellt und der bei 1,25 Meter Durchmesser und 5 Meter Totallänge einen durch Aichung ermittelten Inhalt von 4,672 Cubikmetern hatte.

Zur Speisung wurde comprimirte Luft aus dem Windkessel eines als Feuerspritze dienenden Druckwerkes (im Hofe des Königl. Amalgamirwerkes zu Halsbrücke bei Freiberg) durch ein Rohr *CD* in das Innere des Kessels *AB* geleitet und nach gehöriger Füllung ein Kegelventil geschlossen, welches im Gehäuse *E* und durch eine Schraube mittelst eines Handrades *K* stark auf seinen Sitz gepreßt werden konnte. Der Ausfluß gepreßter Luft (unter veränderlichem Drucke) erfolgte bei *M*, wobei die Einrichtung getroffen war, daß daselbst Mundstücke von verschiedener Gestalt und Größe aufgeschraubt werden konnten.

Zur Beobachtung des Druckes und der Temperatur der äußeren Luft diente beziehungsweise ein im Schatten aufgehangenes Barometer und Thermometer. Zum Messen der Temperatur im Innern des Kessels reichte in letzteren ein Thermometer *H* hinein, während die Pressungsdifferenzen mittelst eines Piezometers *FG* bestimmt wurden, welches man durch ein Bleirohr *W* mit dem Innern des Kessels in Communication gesetzt hatte.

Ueber die Art der Ausführung der Versuche müssen wir (leider, des Raummangels wegen) auf die vorher angegebenen Quellen verweisen, so wie erinnern, daß zur Berechnung der Ausflußcoefficienten, nach den Versuchsresultaten, die bereits im vorigen Paragraphen entwickelte Formel II in sinnreich-practischer Weise angewandt wurde.

[1]) Civilingenieur, Bd. V (1859), S. 1 und Bd. XII (1866), S. 1.

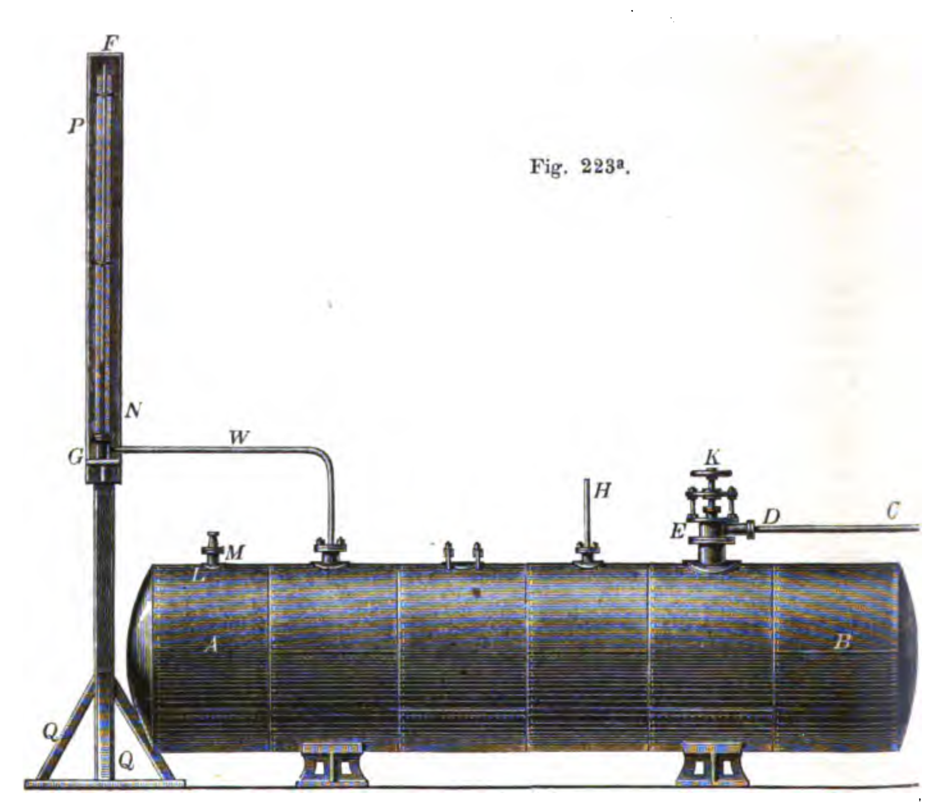


Fig. 223ª.

Der bekanntlich höchst bescheidene Weisbach gesteht in der unten bezeichneten Abhandlung[1]) selbst, daß ihm diese umfänglichen Versuche nicht nur viel Sorge gemacht, sondern auch viel Zeit in Anspruch genommen und ansehnliche Geldausgaben veranlaßt haben!

Anlangend die hauptsächlichen (für practische Zwecke) aus diesen Versuchen gewonnenen Resultate, ist vorerst zu bemerken, daß als Mundstücke an der Ausflußstelle *M*, Fig. 223ª, solche in ebener dünner Wand angebracht wurden, dann solche, daß der Ausfluß durch Oeffnungen in conisch convergenten und divergenten Wänden erfolgte, ferner für kurze cylindrische Ansatzröhren, für conische und conoidische Mundstücke und für conische düsenförmige Mundstücke.

Die dabei erhaltenen Durchschnittsergebnisse waren folgende:[2])

1) Für die dünne Wand, Kreismündungen von 1 bis 2,54 Centimeter Durchmesser bei Druckhöhen von im Mittel:

1,157 Atmosphären (Ueberdruck) ist	$\mu = 0,788$	durchschnittlich.
0,374 „ „ „	$\mu = 0,734$	
0,060 „ „ „	$\mu = 0,562$	

Dabei nimmt μ mit der Mündungsweite $= d$ ab. So ist z. B. bei 0,374 Atmosphären Ueberdruck (wenn in Centimetern):

[1]) Civilingenieur, Bd. XII (1866), S. 1.
[2]) Ebendaselbst, S. 80.

$d =$	1,01	1,408	1,725
$\mu =$	0,671	0,635	0,627

Für practische Zwecke und bei sehr geringen Pressungen, beispielsweise für die gewöhnlichen Blasmaschinen und Sauger, räth daher Weisbach zu nehmen: [1])

$$\mu = 0{,}56.$$

2) Kurze cylindrische Ansatzröhren von verschiedenen Weiten ($d = 1{,}012$, $d = 1{,}402$ und $d = 2{,}488$ Centimeter) gaben bei höherem Ueberdruck $= 0{,}54$ Atmosphären (fast wie beim Wasser):

$$\mu = 0{,}823.$$

Dagegen bei dem kleinen Ueberdruck $= 0{,}072$ Atmosphären:

$$\mu = 0{,}762.$$

Die ebenfalls kurze cylindrische Röhre mit guter innerer Abrundung gab für im Mittel 0,45 Atmosphären Ueberdruck:

$$\mu = 0{,}925,$$

so daß also durch die Abrundung der cylindrischen Röhre der Ausfluß bedeutend vergrößert wurde.

3) Kurze conische Röhre von 7°9′ Seitenconvergenz, der Ausmündungsweite $d = 1{,}004$ Centimeter und der ganzen Länge $= 4$ Centimeter, lieferte bei 0,45 Atmosphären Ueberdruck

$$\mu = 0{,}933.$$

Dagegen wurde bei dem geringeren Ueberdruck von 0,081 Atmosphären erhalten:

$$\mu = 0{,}9106.$$

In seiner Ingenieur-Mechanik [2]) räth Weisbach, für eine solche conische Röhre mit 6° Seitenconvergenz zu nehmen:

$$\mu = 0{,}92.$$

4) Längere conische Ansatzröhren, sogenannte Düsenmundstücke, führten auf noch größere Ausflußcoefficienten.

Beispielsweise gab ein solches Mundstück von 0,966 Centimeter Mündungsweite und von 15,5 Centimeter Länge folgende Werthe:

Beim Ueberdrucke in Atmosphären	1,157	0,466	0,080
$\mu =$	0,984	0,937	0,933

Ein größeres Düsenmundstück von 5,10 Centimeter Weite in der Ein- und 1,580 Centimeter Weite in der Ausmündung und von 20,5 Centimeter Totallänge gab:

für 0,728 Atmosphären Ueberdruck: $\mu = 0{,}953$ und
„ 0,083 „ „ $\mu = 0{,}952$. [3])

[1]) Ingenieur-Mechanik, Bd. 1 (5. Auflage), S. 1099.

[2]) Bd. 1 (5. Auflage), S. 1099.

[3]) Es dürfte hier in Erinnerung zu bringen sein, daß wir oben S. 652, mit Schmidt und v. Hauer, bei den Düsen der Schmelzöfen (mit Rücksicht auf Verengungen durch Ansätze der Ofenbeschickung) $\mu = 0{,}86$ annahmen.

Zusatz. Entsprechend den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie brachte Grashof[1]) in den von Weisbach zur Ermittlung der Ausflußcoefficienten geführten Rechnungen Correctionen an, welche zu etwas anderen Werthen von μ, nämlich zu folgenden führten (überall wachsend mit den Manometerständen):

1) Für die dünne Wand:

$$\mu = 0,641 \text{ bis } 0,723.$$

2) Für das kurze cylindrische Ansatzrohr:

$$\mu = 0,816 \text{ bis } 0,821.$$

3) Für kurze conoidische Mundstücke mit cylindrischer Berührungsfläche an der Mündung auslaufend:

$$\mu = 0,917 \text{ bis } 0,986.$$

§. 199.

Fortsetzung der geschichtlichen Notizen.

Wie wohl allen Fachschriftstellern und Experimentatoren, war auch für Weisbach die Arbeit von Saint-Venant und Wantzel unbekannt geblieben. In der That scheint der Eisenbahningenieur Max Herrmann[2]) (seiner Zeit in Wien) insbesondere das Verdienst zu haben, die Hypothese (oder Ansicht) der genannten Franzosen selbstständig und zwar unter Anwendung der mechanischen Wärmetheorie wiedergefunden zu haben[3]), „daß die Außenspannung nur so lange Einfluß nimmt auf die Ausflußmenge, als das Maximum der letzteren nicht erreicht ist, eine Außenspannung aber, kleiner als die so bestimmte Grenzspannung, alterirt die ausfießende Menge entweder gar nicht, oder doch in so geringem Grade, daß man davon absehen kann". Max Herrmann war es aber auch, der (in der Zeitschrift des österr. Ingenieurvereins) die Saint-Venant und Wantzel'sche Formel zuerst mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie ableitete.

Obgleich von der chronologischen Folge abweichend, dürfte ferner hier die geeignete Stelle sein, hervorzuheben, daß es ebenfalls Max Herrmann war (und zwar in der Zeitschrift des österr. Ingenieurvereins,

---

[1]) Theoretische Maschinenlehre. Bd. 1, S. 585. In einer vortrefflichen Abhandlung Grashof's, „Ueber die Bewegung der Gase in Röhren", welche sich in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. VII (1863) abgedruckt vorfindet, berechnete Grashof ebenfalls aus Weisbach'schen Versuchen (S. 280, Note):

für die dünne Wand . . . . . . $\mu = 0,555$ bis $0,795$
„ das kurze cylindrische Ansatzrohr $\mu = 0,737$ bis $0,89$
„ „ conoidische Mundstück . . $\mu = 0,981$.

[2]) Bruder des Professors Emil Herrmann in Schemnitz, dessen Compendium über mechanische Wärmetheorie wir berits oben S. 662 citirten.

[3]) Max Herrmann's Abhandlung „Theoretische Untersuchungen über den Ausfluß der Gase unter hohem Drucke" findet sich abgedruckt in der Zeitschrift des österr. Ingenieurvereins, XII. Jahrgang (1860), S. 34 ff.

Jahrg. 1867, S. 29), welcher die Hypothese von Saint-Venant und Wantzel auch auf die Dämpfe anzuwenden wagte[1]).

Unbekümmert um diese Vorgänge entwickelte Redtenbacher 1855 in seinem Werke „Gesetze des Lokomotivbaues", S. 34, die bereits oben S. 647 mitgetheilte Formel für den Ausfluß des gesättigten Wasserdampfes, bei welcher die Voraussetzung gemacht wurde, daß die Dichtigkeit Δ nach der von Navier angegebenen empirischen Formel (S. 169) berechnet werden dürfe und stillschweigend angenommen war, daß während des Ausflusses der Dampf gesättigt bleibe.

In den Jahren 1854 und 1856 gelangten Rankine[2]) und Clausius[3]) zu der höchst vortheilhaften Formel (oben S. 159), welche das Mittel an die Hand giebt, für jede Temperatur und den zugehörigen Druck die specifische Dampfmenge zu berechnen.

1859 machte Rankine[4]) den ersten Versuch, das Gesetz der Druckabnahme bei der Expansion des gesättigten Wasserdampfes durch eine einfache empirische Formel darzustellen[5]) und zwar (mit Bezug auf S. 160, III) durch:

$$x = \frac{p}{p_1} = \left(\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}}\right)^{\frac{10}{9}} = \left(\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}}\right)^{1,111},$$

wenn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ die betreffenden Volumina, oder die den Spannungen p und p_1 entsprechenden specifischen Volumina von einem Kilogramme Wasserdampf sind.

Im Vorworte zur ersten (1863 erschienenen) Auflage des schätzbaren Buches „Der Indicator" von Völkers (Pag. XII), zeigte nachher Grashof, daß dies Spannungsverhältniß in etwas höherem Grade wachse und das wahrscheinlich richtiger gesetzt werden könne:

$$x = \frac{p}{p_1} = \left(\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}}\right)^{1,140}.$$

Hierbei ist jedoch angenommen, daß der Wasserdampf im Anfange der Expansion zwar gesättigt, jedoch ihm kein Wasser beigemischt sei.

Endlich gelangte (1866) Zeuner[6]) zu dem bereits S. 160 mitgetheilten Resultate, daß der Exponent x mit der anfänglichen Dampfmenge in der Beziehung variirt, ob dem gesättigten Dampfe anfangs kein Wasser beigemischt ist, oder ob man es mit einer Mischung von Wasser und Wasserdampf zu thun hat, sodann aber gesetzt werden kann:

$$x = 1,035 + 0,10y,$$

worin y angiebt, der wievielte Theil des Ganzen aus wasserfreiem, gesättigtem Dampfe besteht. Ist also nur wasserfreier gesättigter Dampf

[1]) Man sehe hierüber auch Emil Herrmann in der Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architektenvereins. XXVII. Jahrgang (1875), S. 189, in einer Abhandlung, welche die Ueberschrift trägt: „Vollständige Theorie des gesättigten Wasserdampfes".

[2]) Philos. Transact. (1854), Bd. 144, S. 115 bis 175.

[3]) „Ueber die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Dampfmaschine" (1856). Abhandlungen, Bd. I, S. 155 bis 241.

[4]) Manuel of Applied Mechanics. A Manuel of the Steam engine, Pag. 385. London and Glasgow 1859.

[5]) Man sehe hierzu auch den 16. Band des „Civilingenieur" (1870), S. 38 unter der Ueberschrift „Ueber den Ausfluß des Dampfes".

[6]) „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie". 2. Auflage (166), S. 342.

vorhanden, so wird $y = 1$ und

$$\varkappa = 1{,}135.$$

Zeuner[1]) bemerkt allerdings in Bezug auf den Gebrauch des vorstehenden Werthes von $\varkappa$, daß er nur (vermöge der bei der Herleitung gemachten Annahmen) innerhalb der Grenzen von $y = 0{,}70$ bis $y = 1{,}0$ benutzt werden darf, daß dies jedoch die gewöhnlichen Fälle technischer Anwendung umschließe, da man besonders bei Lokomotiven für den aus dem Kessel nach den Dampfcylindern strömenden Dampf annehmen könne, daß letzterem 25% bis 30% Wasser mechanisch beigemengt sei[2]).

Kolster dürfte wohl der Erste gewesen sein, der (1867) für technische Zwecke, in der oben, S. 655 (Note 2) erwähnten Arbeit den Exponenten $\varkappa$, nach der Zeuner'schen Allgemeinheit, in die Saint-Venant und Wantzel'sche Formel einführte.

Da Weisbach bei seinen schönen und großartigen Versuchen nur bis zu einer Atmosphäre Ueberdruck ging, so blieb es sehr wünschenswerth, die Hypothese (S. 666) der genannten Franzosen durch unter höherem Druck ausgeführte Versuche zu bestätigen, was denn auch Zeuner im Jahre 1871 gelang[3]).

Zeuner erstreckte hierzu seine Versuche bis zu 4 Atmosphären Ueberdruck und bediente sich dabei eines Apparates, der jenem Weisbach's, S. 668, ähnlich war[4]). Ein cylindrischer Kessel aus Eisenblech (Dampfkessel) von 4,2 Meter Länge und 0,50 Meter Durchmesser, dessen Inhalt durch Aichung mit Wasser zu 0,81088 Cubikmeter ermittelt worden war, hatte auf seinem Rücken einen Aufsatz mit 6 weiten Hälsen oder Röhren, in welche die Ausflußmündungen eingesetzt werden konnten.

Bei den Versuchen wurde mit dreierlei Mündungen experimentirt, nämlich:

1) mit kurzen, nach innen gut abgerundeten Mundstücken, deren Durchmesser von 4 bis 7 Millimeter variirten;

2) mit kurzen cylindrischen Ansatzröhren, ohne Abrundung im Innern, mit Durchmessern von beziehungsweise 5,79 und 7,00 Millimetern;

3) mit Mündungen in dünner Wand, deren Durchmesser von 4 bis 10 Millimetern variirten.

Die ersten beiden Arten von Mündungen führten auf Resultate, welche die Hypothese von Saint-Venant und Wantzel als richtig erscheinen ließen, während die Mündungen in dünner Wand geringe Abweichungen zeigten, welche aber Zeuner durch den Umstand erklärte, daß sich mit dem Drucke die Stärke der Contraction des Strahles ändert und zwar schien den Versuchen gemäß die Zusammenziehung des Strahles mit dem Ueberdrucke langsam zu wachsen.

Zeuner's Versuche hatten überdies noch einen anderen Zweck. Es kam nämlich Zeuner darauf an, eine neue Methode der Berech-

---

[1]) Grundzüge etc., S. 342.

[2]) Specielles über das fraglich mechanisch mit dem Dampfe fortgerissene Wasserquantum, findet sich u. A. im 3. Bande, S. 544 (2. Auflage) der Allgem. Maschinenlehre des Verfassers.

[3]) Protokoll des Sächs. Ingenieurvereins vom 12. Nov. 1871, S. 47.

[4]) Civilingenieur, Bd. 20 (1874), Taf. I, mit Beschreibung auf S. 7.

nung jener Widerstände der Prüfung zu unterwerfen, welche beim Ausströmen der elastischen Flüssigkeiten aus Gefäßmündungen (ähnlich wie beim Wasser) auftreten.

Wie hinlänglich bekannt, mußten sowohl die Formeln für die Ausflußgeschwindigkeit der Gase, als die für das Ausflußquantum mit geeigneten Coefficienten multiplicirt werden, um mit der Erfahrung übereinstimmende Resultate zu liefern. Bei solchem Verfahren tritt offenbar die physikalische Bedeutung der Correction durchaus nicht hervor, vielmehr wird hierdurch allein dem practischen Bedürfnisse genügt.

Da jedoch auch die rationelle Technik auf die Fortschritte der ihr zugehörenden Wissenschaften Bedacht zu nehmen hat, so ist es mehr oder weniger Pflicht, mindestens interessant, den Zusammenhang dieser Correctionen mit den Sätzen der mechanischen Wärmetheorie zu untersuchen.

Den ersten Versuch dieser Art machte Grashof in seiner werthvollen Abhandlung „Ueber die Bewegung der Gase in Röhrenleitungen und Canälen", welche sich Bd. VII (1863) der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, S. 243, 273 und 335, so wie in derselben Zeitschrift, Bd. VIII (1864), S. 47 und 101, abgedruckt vorfindet. Für die eigentlichen Ausflußerscheinungen hat jedoch erst Zeuner eine Lösung gegeben, die ganz besonderer Aufmerksamkeit werth ist und zu deren Kenntniß nachstehende Bemerkung dienen mag.

Die Verminderung der Geschwindigkeit, womit Gase und Dämpfe aus Gefäßmündungen fließen, erfolgt wahrscheinlich durch Reibung der Flüssigkeitstheilchen unter sich und hat jedenfalls einen Verlust an Arbeit zur Folge, der mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie ermittelt werden kann. Hierbei ist aber ganz besonders darauf aufmerksam zu machen, daß in Wirklichkeit dieser Verlust an Arbeit nicht in einem Verschwinden von Arbeit, sondern in einer Umwandlung von äußerer Arbeit in innere besteht, oder mit anderen Worten, daß ein Theil der lebendigen Kraft (der kinetischen Energie), welche der Flüssigkeit innewohnt, durch die Widerstände in Wärme (calorische Energie) umgesetzt wird. Dieser letztere Theil muß sich aber dadurch zu erkennen geben, daß die Flüssigkeit, unter sonst gleichen Umständen, mit erhöhter Temperatur ausfließt, wie dies unter Anderm S. 646 an einem Beispiele für atmosphärische Luft gezeigt wurde, wo, durch die Widerstände der aus einer Gefäßmündung strömenden Luft, eine Temperaturerhöhung (Erwärmung) der letzteren um 0,529 Grad C erzeugt wurde.

Von diesen und anderen Gesichtspunkten ausgehend, gelangte Zeuner[1]) zu folgenden Gleichungen für die Ausflußgeschwindigkeit v und für das Ausflußquantum nach Gewicht $= G$:

$$v = \sqrt{2g\,\frac{n}{n-1}\,RT_1\left[1-\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]} \text{ und}$$

[1]) Protokolle des sächs. Ingenieur- und Architektenvereins vom 19. Nov. 1871, S. 49. Eine mit allen Details durchgeführte Ableitung findet sich jedoch erst in dem „Handbuch der mechanischen Wärmetheorie" meines Neffen, des Professor Richard Rühlmann. Bd. I, S. 304 bis 311.

$$G = \sqrt{2g\, \frac{n}{n-1}\, R T_2 \left[\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{m+1}{m}} \right]}.$$

Darin bedeutet m einen constanten Werth, der durch Versuche bestimmt werden muß, welcher kleiner ist als n und den Zeuner den „Ausflußexponenten" genannt hat[1]), wobei allerdings die Contraction des Strahles, wie sie bei gewissen Mündungen stattfindet, noch eine besondere Correction erfordert.

Für m ermittelte aber Zeuner[2]) den Werth

$$m = \frac{n(1 + \eta_n}{1 + n \,.\, \eta_n}\text{ }^{3}).$$

Zufolge Neuberechnung der Weisbach'schen Versuche findet beispielsweise Grashof (Theoret. Maschinenlehre I, S. 585), für Kreismündungen in dünner Wand, so wie (angenähert) auch für conoidische Mundstücke $\eta_n = 0{,}04$[3]), daher, weil für atmosphärische Luft $n = 1{,}14$ ist, ergiebt sich für die bezeichneten Mündungen:

$$m = \frac{1{,}14 \,.\, 1{,}04}{1 + 1{,}14 \,.\, 0{,}04} = 1{,}388.$$

Bald nacher (1874) gelangte Professor Fliegner in Zürich[4]), bei neuen Versuchen über das Verhalten des Druckes in der Mündungsebene[5]), zu dem Schlusse, daß man, für technische Rechnungen,

---

[1]) Schmidt behauptet allerdings (Civilingenieur, Bd. 17, S. 383), daß die Einführung eines Ausflußexponenten m statt n nicht durch die Natur der Sache gerechtfertigt sei.

[2]) Civilingenieur, Bd. VII (1871), S. 84 und Richard Rühlmann, a. a. O., Bd. I, S. 309.

[3]) Bezeichnet man, wie S. 249, das Verhältniß der effectiven (beobachteten) zur theoretischen Geschwindigkeit (d. h. der ohne hydraulische Widerstände) mit ψ, setzt also

$$\psi = \frac{v}{v_1},$$

nennt dann auch hier (ähnlich S. 226) η_n den hydraulischen Widerstandscoefficienten, so kann man für kurze Ansatzröhren (S. 496, Nr. III) auch schreiben:

$$v_1^2 = v^2\,(1 + \eta_n), \text{ d. i.}$$

$$\frac{v}{v_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_n}}, \text{ also } \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_n}} \text{ und}$$

$$\eta_n = \frac{1}{\psi^2} - 1.$$

Grashof macht (Maschinenlehre I, S. 417, ferner S. 550 und 551) hierzu die ganz richtige Bemerkung, daß, bei Gasen und Dämpfen, zufolge der in Wärme sich umsetzenden Widerstandsarbeit, der Werth von η_n sich vergrößert und gesetzt werden muß:

$$\eta_n = \frac{1}{\psi^2 \left\{1 - \frac{p}{P}\right\}^{\frac{n-1}{n}}} - 1.$$

[4]) Civilingenieur, Bd. 20, S. 44.

[5]) Fliegner bemerkt hierzu noch (a. a. O., S. 45), daß, wenn man früher

beim Ausströmen der Luft durch gut abgerundete Mündungen, die Widerstände vollständig vernachlässigen könne".

Noch weitere (1878) angestellte Versuche Fliegners[1]) über das Ausströmen der Luft durch die dünne Wand, lieferten fernere, wenn auch nicht technisch wichtige, doch immerhin so interessante Resultate, daß auf dieselben mindestens (auch der rationell gebildete Techniker) aufmerksam gemacht werden muß. Leider gestatten Zweck und Raum hier nicht mehr als folgende Ergebnisse derselben aufzunehmen:

1) Bei Mündungen in dünner Wand darf man, zur Berechnung des ausströmenden Luftgewichtes, nicht den Mündungsquerschnitt mit seinen convergirenden Geschwindigkeitsrichtungen in die Formel für G (S. 650) einsetzen, sondern den Querschnitt des Strahles an der Stelle der stärksten Contraction.

2) Im Querschnitte der stärksten Contraction haben alle Flüssigkeitselemente Bewegungsrichtungen, die unter sich und mit der Mündungsachse parallel sind.

3) Mit abnehmendem Ueberdrucke nimmt auch der Contractionscoefficient ab, bekanntlich ein schon von Weisbach experimentell gefundenes Resultat.

Da zur Berechnung der Contractionscoefficienten die Druckverhältnisse durch geeignete Formeln bestimmt werden mußten, so gelangte Fliegner zu folgendem Ausdruck für gut abgerundete Mündungen und für die Druckverhältnisse $\frac{p_1}{p_m}$ und $\frac{p_0}{p_m}$, wenn p_m die Pressung in dem Raume oder Gefäße bezeichnet, aus welchem das Gas strömt, p_1 der Druck in der Mündungsebene und p_0 der in der Vorlage ist[1]).

$$\frac{p}{p_m} = 0{,}2820 + 0{,}4891\frac{p_0}{p_m} + \sqrt{0{,}0632 - 0{,}2374\left(\frac{p_0}{p_m}\right) + 0{,}2266\left(\frac{p_0}{p_m}\right)^2},$$

worin (der Gleichung einer Hyperbel) für $\frac{p_0}{p_m} = 0$, der Quotient $\frac{p}{p_m}$ den Minimalwerth $= 0{,}5334$ erreicht.

Ferner fand Fliegner für den Ausfluß durch die dünne Wand:[2])

$$\frac{p}{p_m} = 0{,}2716 + 0{,}4962\frac{p_0}{p_m} + \sqrt{0{,}0650 - 0{,}2435\left(\frac{p_0}{p_m}\right) + 0{,}2333\left(\frac{p_0}{p_m}\right)^2}.$$

Den Contractionscoefficienten $= \alpha$ berechnete derselbe aus der Annäherungsformel:

$$\alpha = a + b\cos\frac{p_0}{p_m}\pi,$$

wobei a und b Werthe sind, welche vom Exponenten $n = 1{,}41$ abhängen,

durch Versuche erhebliche Widerstände gefunden habe, der Grund davon in der Annahme liege, daß man p in der Ausflußformel auf den äußeren Druck bezogen habe. Man müsse nur den richtigen Druck in der Mündungsebene einführen, den Fliegner (leider) bis jetzt durch kein bestimmtes Gesetz, sondern nur durch eine Curve dargestellt hat etc.

[1]) Civilingenieur, Bd. XXIV (Jahrg. 1878), S. 402 ff.

[2]) Ebendaselbst, S. 426.

wenn unter Annahme innerer Widerstände die Zustandsänderung nach dem Gesetze (Zeuner's) $p\mathfrak{V}^n$ erfolgt.

Bei dem derzeitigen Standpunkte aller dieser physikalisch höchst wichtigen Erörterungen wird man, in diesem Buche, kein Eingehen auf die mannigfach noch divergirenden Ansichten verlangen, welche gegenwärtig an nachverzeichneten Stellen ausgesprochen werden:

1) Civilingenieur, Bd. 23 (1877), S. 343: Illeck in Wien, „Ueber den Ausfluß der permanenten Gase mit Beziehung auf die Hypothese von Saint-Venant und Wantzel". — S. 571: E. Herrmann in Schemnitz, „Bemerkungen zu Herrn Illeck's Theorie des Ausflusses der Luft durch ein cylindrisches Rohr". — S. 643: Illeck's Erwiederung auf die Einwendungen E. Herrmanns.

2) Civilingenieur, Bd. 24 (1878), S. 47: E. Herrmann's „Bemerkungen zu Fliegner's neueren Versuchen und Ansichten über den Ausfluß der Luft".

Zweiter Abschnitt.

Bewegung elastischer Flüssigkeiten in Röhren [1]).

§. 200.

Setzen wir zunächst nur Gase voraus, welche dem Mariotteschen Gesetze folgen, also namentlich atmosphärische Luft oder Leuchtgas und nehmen ferner an, wie es für letztere Gase im Bereich der technischen Anwendungen der Fall ist, daß die Druckdifferenzen im Ausflußgefäße und in der Vorlage (der Atmosphäre) verhältnißmäßig gering sind, so kann man (wie beim Wasser [2]), §. 160ff.) und mit Bezug auf die Bezeichnungen in umstehender Fig. 225 setzen:

$$\frac{1}{2} M v^2 \left[\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\alpha a_1}\right)^2\right] = gM\,\frac{P-p}{\Delta} - M\,\frac{4l}{d}\,(\alpha_1 v + \beta_1 v^2).$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch $\frac{1}{2}M$, nimmt $a_1 = \Omega$, vernachlässigt α_1 und ersetzt die Querschnitte Ω und ω beziehungsweise durch die Formeln $\frac{d^2\pi}{4}$ und $\frac{\delta^2\pi}{4}$, so folgt:

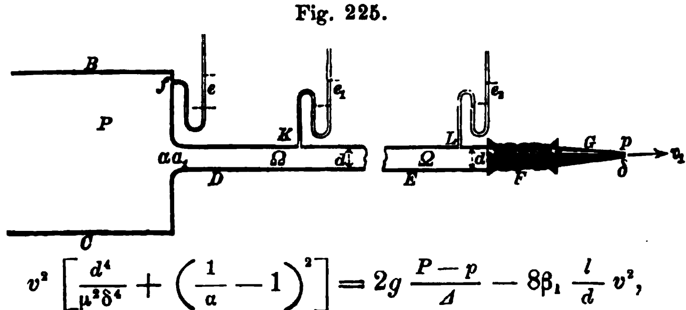
---

[1]) Die vorzüglichsten neueren Arbeiten über Bewegung der Gase in Röhrenleitungen hat Grashof geliefert und finden sich dieselben an folgenden Stellen: 1) In der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. VII (1863), S. 241 und 273. (Vorzugsweise ganz allgemeine Auffassung des Gegenstandes.) 2) Ebendaselbst, Bd. VIII (1864), S. 47 (mit besonderer Berücksichtigung der Theorie der Gebläsmaschinen). 3) Desgleichen Bd. X (1866), S. 456 (besonders Theorie der Zugerzeugung durch Schornsteine). 4) Theoretische Maschinenlehre. Bd. I, S. 532, §. 104 (Bewegung der Luft in Röhren).

Der Verfasser sieht sich, dem practischen Zwecke gegenwärtigen Buches entsprechend, um so mehr veranlaßt, von einer derartigen streng wissenschaftlichen Auffassung des Gegenstandes, wie in den bezeichneten Arbeiten, zu abstrahiren, als Grashof selbst (a. a. O., Bd. VII, S. 243) ausdrücklich Folgendes bemerkt: „Die Theorie der Bewegung der Luft oder irgend eines Gases oder Gasgemisches in einer ausgedehnten Leitung (Röhre oder Canal) auf Grund der allgemeinen mechanischen Principien nicht nur, sondern auch insbesondere des hierbei eine wesentliche Rolle spielenden Principes vom mechanischen Aequivalent der Wärme, ist ziemlich complicirt, wenn dabei auf sämmtliche influirende Umstände, die Reibungs- und anderen Widerstände, die Wärmeleitung der Canalwände etc. Rücksicht genommen wird".

[2]) Nach Zeuner (Blasrohr, S. 100) und Grashof (Maschinenlehre I, S. 620 und 625) ist der Carnot'sche Satz (S. 224, §. 83) auch für elastische Flüssigkeiten brauchbar.

Fig. 225.



$$v^2\left[\frac{d^4}{\mu^2\delta^4}+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2\right]=2g\,\frac{P-p}{\varDelta}-8\beta_1\,\frac{l}{d}\,v^2,$$

oder wenn v durch die Ausflußgeschwindigkeit v_1 an der Mündung G, Fig. 225, ersetzt wird, wegen $\mu\delta^2 v_1 = d^2 v$:

$$\frac{\mu^2\delta^4}{d^4}\,v_1^2\left\{\frac{d^4}{\mu^2\delta^4}+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2\right\}=2g\,\frac{P-p}{\varDelta}-8\beta_1\mu^2\,\frac{l\delta^4}{d^5}\,v_1^2,\ \text{d. i.}$$

$$v_1^2\left\{1+\mu^2\left[\frac{\delta^4}{d^4}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+8\beta_1\,\frac{l\delta^4}{d^5}\right]\right\}=2g\,\frac{P-p}{\varDelta}\ \text{und}$$

$$\text{I.}\quad v_1=\sqrt{\frac{2g\,\frac{P-p}{\varDelta}}{1+\mu^2\left[\frac{\delta^4}{d^4}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+8\beta_1\,\frac{l\delta^4}{d^5}\right]}}.$$

Ist P_1 die Pressung, welche an einem Punkte K (Fig. 225) der Leitung beobachtet wurde, die von der Mündung oder Ausflußöffnung bei G um $KG = \lambda$ entfernt ist, so erhält man auf gleichem Wege:

$$\text{II.}\quad v_1=\sqrt{\frac{2g\left(\frac{P_1-p}{\varDelta}\right)}{1+8\beta_1\mu^2\,\frac{\lambda\delta^4}{d^5}}}.$$

Zur Bestimmung der Pressung P_1, welche bei K in der Entfernung λ von der Mündung statt hat, folgt endlich noch aus I. und II:

$$\text{III.}\quad \frac{P_1-p}{P-p}=\frac{1+8\beta_1\mu^2\,\frac{\lambda\delta^4}{d^5}}{1+\mu^2\,\frac{\delta^4}{d^4}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\frac{8\beta_1 l}{d}\right]}.$$

Für das pro Secunde ausströmende Flüssigkeitsquantum $= Q$, gemessen unter dem inneren Drucke, erhält man wieder:

$$Q=\mu_1\,\frac{\delta^2\pi}{4}\,v_1,$$

so wie, wenn dies Quantum unter dem äußeren Drucke gemessen wird:

$$Q_1=\mu_1\,\frac{\delta^2\pi}{4}\,v_1\,\frac{P}{p}.$$

Für den Fall, daß in I. $\delta = d$ gesetzt und beachtet wird, daß sodann $\mu = 1$ ist:

$$Q_1 = \mu_1 \frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{P}{p} \sqrt{\frac{2g\,(P-p)}{\Delta\left[1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\frac{8\beta_1 l}{d}\right]}},$$

oder für $1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2$ den Werth K eingeführt:

$$\text{IV.}\quad Q_1 = \mu_1 \frac{d^2\pi}{4} \frac{P}{p} \sqrt{\frac{2g\,(P-p)}{\Delta\left(K+\frac{8\beta_1 l}{d}\right)}}.$$

Letztere, zuerst von Poncelet[1]) entwickelte Formel hat einen geschichtlichen Werth, wie §. 202 gezeigt werden wird.

In der unten angegebenen Quelle empfahl Poncelet, als Mittelwerth anzunehmen:

$$\beta = 0{,}00315.$$

Zusatz 1. Führt man in vorstehende Formeln die Manometerstände e, e_1, e_2 etc. e_m, Fig. 225, so wie den Barometerstand b ein, d. h. setzt namentlich in III:

$$\frac{P_1-p}{P-p} = \frac{b+e_1-b}{b+e-b} = \frac{e_1}{e},$$

vernachlässigt man ferner das zweite Glied des Zählers in III. und im Nenner $\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2$ gegen $\frac{8\beta_1 l}{d}$, so erhält man:

$$\frac{e_1}{e} = \frac{1}{1+8\mu^2\beta_1\frac{\delta^4 l}{d^5}}.$$

Den Werth $8\mu^2\beta_1$ im Nenner letzterer Gleichung ermittelte d'Aubuisson für practische Zwecke aus Versuchen und fand dafür die Zahl 0,0238,[2]) so daß überhaupt erhalten wird, wenn e_m den Manometerstand nahe der Düse G in Fig. 225 bezeichnet:

$$\text{V.}\quad e = e_m\left[1+0{,}0238\,\frac{\delta^4 l}{d^5}\right].$$

Der practische Werth dieses Ausdruckes ist unverkennbar, wenn man (wie gewöhnlich) beachtet, daß die erforderliche Größe der z. B. für den Eisenhochofenbetrieb erforderlichen Windspannung sich auf das Manometer an der Düse bezieht[3]).

Zusatz 2. Will man allein den Druckverlust $= z$ berechnen, der auch bei einer überall gleich weiten Röhrenleitung von d Durchmesser und l Länge unvermeidlich ist, so kann man sich hier, wie beim Wasser, der Formel IV, §. 160, S. 496 bedienen, also setzen:

$$z = \eta\,\frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2g},$$

oder da sich leicht nachweisen läßt, daß in Bezug auf vorstehende Formeln $\eta = 8\beta_1$ ist, so folgt auch, wenn man zugleich den von

---

[1]) Mécanique appliquée etc. Section VI, Nr. 36. Deutsch von Schnuse, Bd. II, §. 36.

[2]) Hydraulique, §. 523. (Aus mehr als 300 Beobachtungen.)

[3]) Bei Eisenhochöfen übersteigt e_m selten 19 Centimeter Quecksilbersäule, bei Bessemer-Apparaten selten 115 Centimeter Quecksilbersäule.

Poncelet gewählten Werth von β_1 einführt:

$$z = 0{,}0252 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Diese Widerstandshöhe ($= z$) stellt eine Luftsäule von der Dichte $\varDelta$ dar, die auch als Wassersäule ausgedrückt werden kann, wenn man beachtet, daß dann z in dem Verhältnisse von $\frac{\gamma}{\varDelta}$ kleiner wird, sobald γ die Dichte des Wassers (Gewicht eines Cubikmeters dieser Flüssigkeit) $= 1000$ bezeichnet, demnach sich nach (1), §. 54, ergiebt:

$$\frac{\gamma}{\varDelta} = \frac{1000\,(1 + \delta t)}{1{,}293},$$

also z_1 statt z gesetzt folgt:

$$z_1 = \eta \frac{1{,}293}{1000\,(1 + \delta t)} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

oder auch, wegen $\eta = 8\beta_1$

$$z_1 = \frac{4l}{d} \cdot \frac{1{,}293\,\beta_1}{1000\,(1 + \delta t)} \cdot \frac{v^2}{g},$$

so wie, wenn man $\frac{\beta_1}{g} = b_1$ setzt:

$$z_1 = \frac{4l}{d} \frac{1{,}293 \,.\, b_1 v^2}{1000\,(1 + \delta t)}.$$

Im Vorstehenden war als elastische Flüssigkeit stets atmosphärische Luft vorausgesetzt. Für ein anderes Gas, dessen specifisches Gewicht $= s$ ist (wie in der Tabelle S. 637 das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft = Eins gesetzt), erhält man daher, als Druckverlust eine Wassersäule von z_2 Höhe gemessen:

$$\text{VI.} \quad z_2 = \frac{4l}{d} \frac{1{,}293 \,.\, s \,.\, b_1 v^2}{1000\,(1 + \delta t)}\ ^1).$$

In den Mémoires etc. de la société des Ingenieurs Civils. Année 1867, Pag. 560, wird für practische Zwecke und für gußeiserne Röhren (Metermaaß vorausgesetzt) folgende Formel empfohlen:

$$\text{VII.} \quad z_3 = \frac{4l}{d} \cdot \frac{1{,}293 \,.\, s}{1000\,(1 + \delta t)} \,.\, (av + bv^2).\ ^2)$$

Die Werthe der Coefficienten a und b variiren dabei nach den Durchmessern der eisernen Röhren, zufolge Versuchen Arson's (worüber im folgenden Paragraphen berichtet wird) in nachverzeichneter Weise:

---

[1]) Der Verfasser hat für z_2 deshalb diese Form gewählt, weil sich diese Formel genau so in der Pariser „Agendas Dunod", Nr. 3. Arts et Manufactures Mécanique, Jahrg. 1879, S. 69 vorfindet und die zur Zeit in Frankreich ganz allgemein bei den Practikern Anwendung zu finden scheint. In Paris setzt man für Leuchtgas $s = 0{,}41$.

[2]) Man beachte, daß hiernach $\frac{a}{v} + b = b_1 = \frac{\beta_1}{g}$, folglich wegen $\beta_1 = \frac{\eta}{8}$,

$$\text{auch } \eta = 8g\left(\frac{a}{v} + b\right) \text{ ist.}$$

Letzterer Werth findet sich auch in der vierten (1878) von Hudelo besorgten Ausgabe von Péclet's „Traité de la chaleur". Tome I, Pag. 199.

Durchmesser = d in Metern	Coefficienten	
	a	b
0,050	0,000702	0,000593
0,054	0,000682	0,000575
0,081	0,000589	0,000489
0,100	0,000550	0,000475
0,108	0,000530	0,000560
0,135	0,000470	0,000442
0,150	0,000440	0,000430
0,162	0,000410	0,000420
0,189	0,000355	0,000405
0,200	0,000330	0,000395
0,216	0,000300	0,000382
0,243	0,000257	0,000362
0,250	0,000240	0,000360
0,270	0,000215	0,000350
0,300	0,000180	0,000332
0,325	0,000151	0,000326
0,350	0,000125	0,000310
0,400	0,000075	0,000280
0,500	0,000020	0,000246
0,600	0,000000	0,000220
0,700	0,000000	0,000200

Auf ganz anderem Wege, als sämmtliche vorbemerkte Autoren, berechnet Grashof den Verlust an Druckhöhe oder die Pressungsverluste durch die Röhrenwiderstände in §. 105 und §. 106 des ersten Bandes seiner theoretischen Maschinenlehre.

Derselbe bezeichnet mit H_0 die der Anfangsgeschwindigkeit v_0 entsprechende Höhe, so daß $H_0 = \frac{v_0^2}{2g}$ ist und setzt, dem analog, für die Geschwindigkeitshöhe am Ende einer Röhrenleitung für atmosphärische Luft $H = \frac{v^2}{2g}$. Mit Zuziehung der mechanischen Wärmetheorie findet dann Grashof (a. a. O., S. 597) für eine horizontal gelegte Röhre:

$$\text{VIII.} \quad \frac{H_0}{H} = 1 - \frac{2}{RT}\left[\eta \frac{l}{d} H_0\right],$$

worin $R = 29,4$ für feuchte Luft (statt 29,27, §. 54, Nr. 7), $T = 273 + t$ (S. 113) ist und für η ein Werth in Rechnung gebracht werden muß, welcher sich aus der Gleichung berechnet:

$$\eta = 0,01355 + \frac{0,001235 + 0,01\,d}{d\sqrt{v_0}}.$$

Wird dann, obigen Bezeichnungen entsprechend, mit p_0 die Anfangs- und mit p die (offenbar kleinere) Endpressung in der Leitung bezeichnet, so erhält man, zufolge (1), §. 192, wenn dort $A = \omega = a$ gesetzt wird:

$$\text{IX.}\quad \frac{p}{p_0} = \frac{v_0}{v} = \sqrt{\frac{H_0}{H}}\ ^{1)}.$$

Daher läßt sich auch setzen:

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = 1 - \sqrt{\frac{H_0}{H}},\ \text{d. i.}$$

$$\text{X.}\quad \frac{p_0 - p}{p_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{RT}\left(\eta \frac{l}{d} H_0\right)},$$

oder für viele Fälle genau genug:

$$\text{XI.}\quad \frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{\eta}{RT}\frac{l}{d} H_0.$$

Zusatz 3. Für Leuchtgasleitungsröhren haben Experimente und Erfahrungen zu Formeln geführt, die für practische Zwecke entsprechend zu schätzen sind.

So findet man in der dritten Auflage (1879) des Schilling'schen Handbuches für Steinkohlengasbeleuchtung, S. 484, die Formel:[2])

$$z_4 = 0{,}84\,\frac{lQ^2}{d^5},$$

worin bedeutet:

d den Durchmesser der Rohrleitung in Centimetern,
l die Länge der Rohrleitung in Metern,
Q die Ausflußmenge in Cubikmetern pro Stunde,
z_4 den Druckhöhenverlust in Millimetern Wassersäule
(überall das specifische Gewicht des Gases $s = 0{,}42$ vorausgesetzt).

Die S. 637 genannte Dessauer Gasgesellschaft, welche das specifische Gewicht des Leuchtgases durchschnittlich zu 0,40 rechnet, hat der Redaction der „Hütte“, als Herausgeberin des Ingenieur-Taschenbuches, Elfte Auflage (1877), S. 594, für den Druckverlust $= z_5$ in Metern, folgende Formel mitgetheilt:

$$z_5 = \left(\frac{Q}{0{,}00333\,d^2\sqrt{\frac{d}{l}}}\right)^2.$$

Hierin bezeichnet

Q die Gasmenge in Cubikmetern,

welche in einer Stunde das Rohr durchströmt (1 Flamme = 160 Liter angenommen),

d den Durchmesser des Rohres in Millimetern,
l die Länge der Rohrleitung in Metern.

Für Leuchtgas von s specifischem Gewichte ist in unserer Quelle gesetzt:

$$Q = 0{,}00210\,d^2\sqrt{\frac{hd}{sl}}.$$

---

[1]) Während also bei der Bewegung durch die Röhre die Geschwindigkeit wächst, nehmen Pressung und Temperatur ab. Ausführlich hierüber Grashof in seiner schönen Abhandlung „Ueber Bewegung der Gase in Röhren“. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1863, S. 337.

[2]) Nach D. Monnier's „Aide-Mémoire, pour les calculs des conduites de distribution du gaz d'éclairage et de la chauffage“. Paris 1876 (Baudoyr). Pag. 17.

Beispiel 1. An dem Regulator eines Gebläses steht das Quecksilbermanometer auf $0^m,08$, während der äußere Barometerstand $0^m,73$ und die gleichzeitige Temperatur $10^0\,C$ ist. Vermittelst dieses Gebläses wird Wind durch eine 70^m lange und $0^m,18$ weite Röhre in die Nähe eines Schmelzofens geführt und dort durch eine Düse mit einer $0^m,045$ weiten kreisförmigen (conischen) Mündung in den Schmelzraum geblasen. Es fragt sich, wie groß das unter diesen Umständen gelieferte Windquantum ist, wenn der Contractionscoefficient (für den Eintritt) $\alpha = 0,75$ und der Ausflußcoefficient $\mu = 0,86$ angenommen wird?

Auflösung. Mit Bezug auf Formel (1), §. 54, ist hier

$$\Delta = 1,2932\,\frac{0,73 + 0,08}{0,76}\cdot\frac{1}{1,0367},\text{ so wie}$$

$$P - p = 10333\,.\,\frac{8}{76}\text{ und }\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = \left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 = \frac{1}{9}\,.$$

Daher ($\beta = 0,00315$ angenommen) aus I, S. 678:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,.\,9,808\,.\,\frac{8}{81}\,\frac{1,0367}{1,2932}\,10333}{1 + 0,86^2\,.\left\{\left(\frac{0,045}{0,18}\right)^4\cdot\frac{1}{9} + 8\,.\,0,00315\,\frac{70\,.\,(0,045)^4}{(0,18)^5}\right\}}},$$

d. i.

$$v_1 = \sqrt{\frac{16048,3}{1,028649}} = 124^m,91.$$

Ferner

$$Q = \frac{\mu\delta^2\pi}{4}\,v_1 = \frac{0,86\,(0,045)^2}{4}\,.\,\pi\,.\,124,91,$$

$$Q = 0,17084\text{ Cubikmeter pro Secunde, oder}$$

$$60\,Q = 10,25\text{ Cubikmeter pro Minute,}$$

das unter dem inneren Drucke gemessene Luftquantum.

Reducirt man letzteres Quantum auf den Barometerstand der äußeren Luft und auf 0^0 Temperatur, so folgt:

$$60\,Q_1 = \frac{60\,.\,Q}{1,0367}\,\frac{81}{76} = 10,26\,.\,\frac{81}{76}\cdot\frac{1}{1,0367},\text{ d. i.}$$

$$60\,Q_1 = 10,537\text{ Cubikmeter,}$$

als die auf 0^0 reducirte minutliche Luftmenge unter dem äußeren Drucke gemessen.

Beispiel 2. Wie groß ist der Manometerstand, der, zur Ermittlung der Betriebsarbeit des Gebläses[1]) im vorigen Beispiele, statt $0^m,08$ am Ende der Windleitung in Rechnung zu bringen ist?

Auflösung. Mit Benutzung der oben S. 679 aufgeführten d'Aubuisson'schen Formel V:

$$e = e_m\left[1 + 0,0238\,\frac{l\delta^4}{d^5}\right],$$

erhält man ohne Weiteres:

$$e = e_m\left[1 + 0,0238\,.\,70\,\frac{(0,045)^4}{(0,18)^5}\right],\text{ d. i.}$$

[1]) Man sehe die Beispiele S. 123 und S. 128.

$$e = 0{,}08\ [1 + 0{,}0362] = 0{,}08\ ,\ 1{,}0362, \text{ folglich}$$
$$e = 0^m{,}082896, \text{ oder genau genug}$$
$$e = 0^m{,}083.$$

Beispiel 3. Es ist der Druckverlust und die Geschwindigkeitszunahme zu berechnen, welche erwartet werden müssen, wenn man auf 6 Atmosphären (Innendruck) zusammengepreßte atmosphärische Luft in einer (fast) horizontalen völlig geraden Röhre von $0^m{,}20$ Durchmesser und von 5000 Meter Länge, den vor Ort aufgestellten Bohrmaschinen eines Tunnels zuführt. Die mittlere Temperatur im Tunnel kann zu $27^\circ\,C$ und die Anfangsgeschwindigkeit zu $4^m{,}92$ angenommen werden.

Auflösung. Der hohen Pressungen wegen ist die Lösung dieser Aufgabe nur mittelst der Grashof'schen Formel X, S. 682 zu bewirken, die leicht auf die Form gebracht werden kann:

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{1 - \eta \frac{2}{RT} \cdot \frac{l}{d} H_0}.$$

Es ist aber hier $R = 29{,}4$; $T = 273 + t = 273 + 27 = 300^\circ$; ferner $l = 5000$; $d = 0{,}20$ und

$$H_0 = \frac{(4{,}92)^2}{2g} = 24{,}20\ .\ 0{,}051 = 1{,}2342, \text{ folglich:}$$

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{1 - \eta \frac{2}{29{,}4\ .\ 300} \cdot \frac{5000}{0{,}20}\ .\ 1{,}2342} = \sqrt{1 - 7{,}0192\,\eta}.$$

Aus der von Grashof für η gefundenen Formel, S. 681, ergiebt sich nun:

$$\eta = 0{,}01355 + \frac{0{,}001235 + 0{,}01\ .\ 0{,}20}{0{,}20\sqrt{4{,}92}}$$
$$\eta = 0{,}01355 + 0{,}00729 = 0{,}02084,$$

daher:

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{1 - 7{,}0192\ .\ 0{,}02084}, \text{ d. i.}$$
$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{0{,}85372} = 0{,}924.$$

Der durch die Leitung erzeugte Druckverlust beträgt also noch nicht ganz 10 Procent.

Für die am Ende der Leitung erlangte Geschwindigkeit $= v$ ergiebt sich, wenn v_0 die Geschwindigkeit am Anfange der Leitung bezeichnet, wegen

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{\frac{H_0}{H}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{v^2}} = \frac{v_0}{v}, \text{ d. i.}$$
$$v = \frac{p_0 v_0}{p} = \frac{4{,}92}{0{,}924} = 5^m{,}32.$$

Die Geschwindigkeit der strömenden Luft wächst also, gegen das Ende der Röhre hin, nicht unbedeutend.

§. 201.

Bewegung gesättigter Wasserdämpfe in Leitungsröhren.

Die im vorigen Paragraphen für die Bewegung der Luft und Gase in langen Röhren aufgestellten Gleichungen sind für Dämpfe nicht brauchbar, vornämlich, weil sie auf der Annahme constanter Temperatur[1]) in den Leitungsröhren beruhen und daher für gesättigte Dämpfe die Unzulässigkeit gleichbleibender Pressung einschließen würden.

Unter der Voraussetzung, daß der Wärmeverlust durch die Rohrwand nach außen von der mäßigen Wärmeentwickelung durch den Leitungswiderstand gerade aufgewogen wird, lassen sich dann die Pressungsänderungen durch nachstehende Formel Grashof's bestimmen, deren Fundament auf den Sätzen der mechanischen Wärmetheorie beruht und welche Formel durch Integration einer geeigneten Differenzialgleichung erhalten wird. Wir verweisen auf die unten angegebene Quelle[2]).

Gedachte Formel ist nachstehende:

$$\left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{\varkappa+1}{2}} = 1 - \frac{\varkappa+1}{\varkappa}\frac{H_0\Delta_0}{p_0}\left(\eta\frac{l}{d} + \frac{h}{H}\right).$$

Außer den bereits in dem Vorstehenden benutzten Bezeichnungen ist hier, wie §. 194

$$\varkappa = 1{,}035 + 0{,}10 \,.\, y$$

und h die (positive oder negative) Ansteigung der Röhre, also $h = l\cos\varphi$, sobald φ den Winkel bezeichnet, welchen die Rohrachse mit der Verticalen bildet.

Den Widerstandscoefficienten η räth auch Grashof, wie im Beispiele 3 des vorigen Paragraphen (d. h. wie für atmosphärische Luft, S. 681) zu nehmen.

Endlich anlangend den Einfluß besonderer Widerstände, welche durch Verengungen und Erweiterungen herbeigeführt werden, darf man Zeuner folgen, der (wie bereits oben erwähnt) zeigt[3]), daß man wenigstens annähernd auch bei Dämpfen, den betreffenden Arbeitsverlust nach Carnot (dem Vater) berechnen darf[4]).

Beispiel.[5]) Einer unterirdischen Wasserhaltungsmaschine soll

---

[1]) Wie immer Dampfleitungsröhren vor Abkühlung durch geeignete Umhüllungen geschützt werden mögen, so sind doch Temperaturerniedrigungen und demzufolge theilweise Condensationen des Wasserdampfes unvermeidlich. Deshalb bringt man neuerdings auch, für Heizzwecke, Dämpfe von hoher Spannung in Anwendnng, läßt den Dampf in den Röhren mit secundlichen Geschwindigkeiten von 30 bis 40 Meter strömen, erhält dadurch verhältnißmäßig geringe Rohrdurchmesser, kleinere Außenflächen und vermindert damit Condensation, so weit als möglich.

[2]) Theoretische Maschinenlehre. Bd. 1, S. 659, Gleichung (7).

[3]) Das Lokomotivblasrohr, S. 100.

[4]) S. 224, §. 83. Man sehe deshalb auch Grashof, a. a. O., Bd. 1, S. 620, §. 108 und S. 659 (unten).

[5]) Der Verfasser entlehnte dies Beispiel absichtlich der Grashof'schen theoretischen Maschinenlehre. Bd. 1, S. 660,

der Dampf von dem über Tage aufgestellten Kessel durch eine 180 Meter lange Rohrleitung zugeführt werden, welche 30 Meter weit horizontal bis zur Schachtmündung fortgeführt ist und dann vertical in den 150 Meter tiefen Schacht hinabgeht. Beim Eintritt in die Leitung habe der gesättigte Dampf eine Pressung von 3 Atmosphären. Die Leitungsröhre habe den Durchmesser 0,18 Meter und die secundliche Anfangsgeschwindigkeit des strömenden Dampfes sei zu 19,80 Meter angenommen. Es fragt sich, wie groß die Druckabnahme am Ende der Leitung, also unmittelbar vor der Betriebsdampfmaschine ist?

Auflösung. Mit Bezug auf vorstehende Grashof'sche Formel ist hier:

$$H_0 = \frac{v_0^2}{2g} = (19{,}8)^2 \,.\, 0{,}051 = 19^m{,}994,$$

also rund $H_0 = 20^m$,

Ferner für trockenen Dampf, wo $y = 1$ ist: $x = 1{,}035 + 0{,}1 = 1{,}135$; $x + 1 = 2{,}135$; $\frac{x+1}{2} = 1{,}0675$; $\frac{x+1}{x} = 1{,}881$ und $\frac{x}{2} = 0{,}5675$.

Weiter ist $p_0 = 3 \,.\, 10333$, $\Delta_0 = 1{,}7021$ (nach S. 153), $l = 180$; $h = 150$, $d = 0{,}18$, so wie sich η berechnet (nach S. 681) zu

$$\eta = 0{,}018.$$

Demnach ist

$$\left(\frac{20}{H}\right)^{1{,}0675} = 1 - 1{,}881 \, \frac{20 \,.\, 1{,}7021}{3 \,.\, 10333} \left[0{,}018 \, \frac{180}{0{,}18} - \frac{150}{20}\right],$$

folglich:

$$H = 20^m{,}415.$$

Da nun, wenn v die Geschwindigkeit und Δ die Dichte des Dampfes am Ende der Leitung bezeichnet (also H die correspondirende Geschwindigkeitshöhe ist), gesetzt werden kann:

$$\frac{v_0}{v} = \frac{\Delta}{\Delta_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{H_0}{H}},$$

so folgt:

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{\left(\frac{H_0}{H}\right)^x} = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{x}{2}},$$

daher

$$p = p_0 \left(\frac{H}{H_0}\right)^{-\frac{x}{2}} = 3 \,.\left(\frac{20{,}415}{20}\right)^{-0{,}5675}, \text{ d. i.}$$

$$p = 3 \,.\, (1{,}02075)^{-0{,}5675} = 2.965 \,.\, \text{Atmosph.}$$

Der Verlust folglich:

$$p_0 - p = 3 - 2{,}965 = 0{,}035 \text{ Atmosph.},$$

d. i. circa $3\frac{1}{2}$ Procent.

Die Geschwindigkeit v des Dampfes am Ende der Leitung ist aber:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{H}{H_0}} = 19{,}8 \sqrt{\frac{20{,}415}{20}} = 20^m{,}004,$$

hiernach hat die Geschwindigkeit um sehr wenig, nämlich um

$$20{,}004 - 19{,}994 = 0^m{,}01,$$

d. i. um etwa 1 Procent zugenommen.

§. 202.

Geschichtliche Notizen.

Die ersten beachtenswerthen Versuche zur Ermittelung des Widerstandes, welche atmosphärische Luft bei ihrer Bewegung in Röhren findet, haben seiner Zeit Schmidt in Gießen und Koch zu Königshütte am Harz angestellt.

Ersterer verwandte hierzu Glasröhren von nur $\frac{3}{4}$ Linien Weite, letzterer Messingröhren von etwas über 3 und 4 Linien Weite. Sichere Resultate ergaben sich in beiden Fällen deshalb nicht, weil die betreffenden Röhren noch nicht 40 Zoll Länge hatten. Schmidt's Versuche finden sich beschrieben in Gilbert's Annalen der Physik, Bd. 66 (1820), S. 68, während die von Koch in den „Studien des Göttingischen Vereins bergmännischer Freunde", Bd. I (1824), S. 1 bis S. 232 mitgetheilt werden.

Ausgedehntere Versuche in größerem Maaßstabe unternahmen 1821 Girard und Cagniard de Latour und wurde hierzu der für die Erleuchtung des St. Louis-Hospitals errichtete Steinkohlengas-Apparat benutzt.

Die bemerkenswerthesten Versuche sind die, welche mit Röhren angestellt wurden, die man aus Flintenläufen von $0^m,01579$ zusammengesetzt hatte und wobei die Längen von $37^m,53$ bis $126^m,58$ variirten. Die durchschnittlichen Ergebnisse bei einem constanten Wasserdruck von $0^m,03383$ waren folgende:

Atmosph. Luft	Leuchtgas
$\beta = 0,00323$	$\beta = 0,00326$
$\eta = 8\beta = 0,02584$	$\eta = 8\beta = 0,02608.$

Als Hauptresultate dieser Versuche stellte Girard Folgendes auf:

Atmosphärische Luft und Steinkohlengas bewegen sich in Röhrenleitungen vollkommen nach gleichen Gesetzen, es ist also der Röhrenwiderstand bei gleicher Pressung in einerlei Röhrenleitung derselbe und unabhängig von dem specifischen Gewichte der Gase.

Von 1827 ab stellte d'Aubuisson Versuche über den Luftwiderstand in Röhren an, die an Ausdehnung und Großartigkeit Alles übertrafen, was bis dahin für gleiche Zwecke geschehen war. Die betreffenden Röhren bestanden aus Weißblech mit Durchmessern von $0^m,10$, ferner $0^m,05$ und von $0^m,0235$. Bei ersteren variirten die Längen von 100 Meter bis 387 Meter. Bei den halb so weiten von $9^m,35$ bis $55^m,53$ und bei den engsten von $8^m,90$ bis $50^m,55$. Die betreffenden Quecksilber-Manometerstände variirten von $0^m,0181$ bis $0^m,0610$.

Als Mittelwerth aus mehr als 1000 Versuchen berechnete d'Aubuisson

$$\eta = 8\beta = 0,0238.$$

Die erste gründliche Theorie über die Bewegung der Luft in Röhren lieferte Navier 1827 (auszugsweise) in den Annales de chimie et de physique, Tome XXIV, und ausführlicher in den Memoiren der Pariser Akademie, Tome IX, 1830.

Eine Modification fand letztere Theorie in der Annahme Poncelet's, daß die sich bewegende Luft nicht dem Mariotte'schen Gesetze folge, sondern mit constanter Dichte in der ganzen Ausdehnung des

Reservoirs und der Röhren, also wie das nicht zusammendrückbare Wasser ströme. Diesem gemäß gelangte Poncelet zu der Formel II, §. 200, welche er zuerst 1836 in seinem berühmten Werke „Mécanique appliquée aux machines“, 6me Section[1]), ableitete und dabei $\beta = 0{,}00315$, also $\eta = 8\beta = 0{,}02520$ setzte.

Beachtenswerthe Versuche stellte auch Buff in Gießen im Jahre 1841 an, worüber im 4. Bande, S. 131 der „Studien des Göttingischen Vereins bergmännischer Freunde“ ausführlich berichtet wird und welche den Mittelwerth $\eta = 0{,}0375$ lieferten. Die geringen Durchmesser, namentlich der Bleiröhren, von nur $3\frac{3}{4}$ bis $7\frac{1}{4}$ Pariser Linien, waren wohl Ursache dieses großen Widerstandscoefficienten.

Im Jahre 1845, bei Gelegenheit des Projectes einer atmosphärischen Eisenbahn zwischen Paris und Saint-Germain, unternahm Pecqeur im Vereine mit Bontemps und Zambaux, Versuche über die Bewegung atmosphärischer Luft in langen Leitungsröhren (aus gezogenem Blei) von $0^m{,}01028$ Durchmesser, unter Anwendung eines Druckes von 2 Atmosphären, welche die besondere Aufmerksamkeit aller Betheiligten erregten.

Poncelet erkannte bald nachher, daß diese Versuche, wobei Röhren von $0^m{,}07$ bis $18^m{,}0$ Länge in Anwendung gebracht wurden, die betreffenden pro Secunde ausgeflossenen Luftmengen ($= Q$) sehr gut mit seiner bereits oben (S. 679) mitgetheilten Formel:

$$Q = a\,\frac{P}{p}\sqrt{\frac{2g\,(P-p)}{\Delta\left(K + \frac{8\beta_1}{d}\,l\right)}}$$

übereinstimmend lieferten, wenn darin

$$\Delta = 1{,}30 \text{ Kil. und } \beta_1 = 0{,}00295$$

gesetzt wurde[2]).

Nachträglich ist noch zu bemerken, daß auch bereits vorher anerkennenswerthe Arbeiten in Bezug auf Theorie der Bewegung der Luft in Röhren und deren Anwendung auf die Praxis des Berg- und Hüttenwesens, vom französischen Bergwerksdirector Combes geliefert wurden, die in folgenden beiden Quellen enthalten sind: Annales des mines, Tome XII (1837), Pag. 373 unter der Ueberschrift: „Sur le mouvement de l'air dans les tuyaux de conduite“. Ferner ebendaselbst Tome XV (1839), Pag. 91 unter der Ueberschrift: „Aërage des mines“.

Von den in jüngster Zeit angestellten Versuchen verdienen zuerst die von Weisbach genannt zu werden, worüber ausführlich im Civilingenieur, Bd, V (1859), S. 8 ff. und ebendaselbst Bd. XII (1866), S. 83 berichtet wird.

Weisbach führte diese Versuche auf gleiche Weise aus, wie die über den Ausfluß atmosphärischer Luft durch Wandöffnungen in Gefäßen; auch ist die Berechnung dieser Versuche der Hauptsache nach wie in dem bezeichneten Falle.

---

[1]) Deutsch von Schnuse unter dem Titel: „Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen“. Bd. II, §. 36.

[2]) Hiernach wäre $\eta = 8\beta = 0{,}0236$. Ausführlich wird über diese Versuche berichtet in den Pariser „Comptes rendus etc.“ vom 21. Juli 1845.

Die sich ergebenden Widerstandscoefficienten η bei Geschwindigkeiten der Luft von 25 bis 105 Meter pro Secunde waren folgende:

Für eine Messingröhre von 1 Centimeter Durchmesser und 200 Centimeter Länge:

$$\eta = 0{,}0273 \text{ bis } 0{,}0148.$$

Für eine Glasröhre von gleichen Dimensionen:

$$\eta = 0{,}0274 \text{ bis } 0{,}0139.$$

Für eine Messingröhre von 1,41 Centimeter Weite und 3 Meter Länge:

$$\eta = 0{,}0258 \text{ bis } 0{,}0121.$$

Für eine dergleichen Glasröhre:

$$\eta = 0{,}0266 \text{ bis } 0{,}0094.$$

Für eine Zinkröhre von 2,4 Centimeter Weite und 10 Meter Länge:

$$\eta = 0{,}0230 \text{ bis } 0{,}0129.$$

Ueberall η abnehmend mit wachsender Geschwindigkeit, so daß Weisbach annähernd für Metermaaß setzte[1]):

$$\eta = \frac{0{,}120}{\sqrt{v}}.$$

Als eine Art Ergänzung dieser Weisbach'schen Versuche können die betrachtet werden, welche im Jahre 1861 der Director der Dresdener Gasbeleuchtungsanstalt Blochmann junior[2]) über die Bewegung des Leuchtgases in Röhren anstellte.

Die von verschiedenen Längen angewandten Leitungen waren aus gezogenen schmiedeeisernen Röhren hergestellt, hatten 16,5 und 26 Millimeter inneren Durchmesser und lagen in gerader Richtung genau horizontal. Am Ende strömte das Gas, theils frei, theils angezündet, durch Düsen von 1, 3, 5, 7, 10, 15, 20 und 25 Millimeter Weite oder mit der ganzen Rohröffnung aus.

Die Geschwindigkeiten des Leuchtgases variirten von 0,169 bis 4,206 Meter pro Secunde.

Mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate und entsprechend der von Weisbach für die Bewegung des Wassers in Röhren eingeführten Form des Widerstandscoefficienten η, §. 160, S. 496, fand Blochmann schließlich, Metermaaß vorausgesetzt:

$$\eta = 0{,}009113 + \frac{0{,}06379}{\sqrt{v}}.$$

Neuere Versuche[3]) wurden in den Jahren 1863 und 1864 mit atmosphärischer Luft und Leuchtgas von Arson (Ingénieur en chef de la compagnie parisienne de chauffage et d'éclairage par le gaz) unter Mitwirkung von Monard und Honoré (alle drei ehemalige Zöglinge der école centrale des arts et métiers) angestellt und darüber in den „Mémoires de la société des ingénieurs civils" vom Jahre 1867, Pag. 537 ff. berichtet.

Zu den betreffenden Sammel- oder Ausflußgefäßen benutzte man

[1]) Ingenieur-Mechanik. Fünfte Auflage, S. 1100.

[2]) Civilingenieur. Bd. VII (1861), S. 489.

[3]) Ueber die allerneuesten Versuche von Monnier (S. 682) siehe die Nachträge am Ende dieses Buches.

die großen Gasometer von Saint-Mandé und La Villette, wovon namentlich der erstere einen Inhalt von 15000 Cubikmeter hatte. In den genannten Memoiren ist S. 549 von 88 Versuchen die Rede und zwar mit Röhren von 50 bis 500 Millimeter Durchmesser (84 gußeiserne und 4 Röhren aus Eisenblech), während in den speciellen Versuchstabellen nur Röhren von 50 bis 250 Millimeter Durchmesser mit Längen von 50 bis 86 Millimeter aufgeführt sind[1]). Nach letzteren Tabellen variirten die Druckhöhen von $0^m,0255$ bis $0^m,1186$ in Wassersäulen (Wassermanometerhöhen) ausgedrückt, so daß die Versuche unter sehr geringen Pressungen ausgeführt wurden. Beigegeben sind dem Memoire 11 Tabellen über Druckverluste, welche mittelst der bereits S. 680 mitgetheilten Formel berechnet wurden:

$$z = \frac{4l}{d} \times \frac{1,293 \, . \, s\,(av + bv^2)}{1000},$$

wobei also die Temperatur zu $0^0\,C$ angenommen ist.

Die Berechnung der Coefficienten a und b wurde mittelst einer von Belanger[2]) aufgestellten Formel vorgenommen, gegen welche sich leider mancherlei Bedenken erheben lassen.

Ein ganz besonderes Verdienst hat sich neuerdings Grashof, in Bezug auf die Bestimmung des Widerstandscoefficienten η für die Bewegung der Gase und Dämpfe in langen Röhren dadurch erworben, daß er, übereinstimmend mit den Versuchen Weisbach's und gestützt auf die Form

$$\eta = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{vd},$$

(welche sich aus den Hagen'schen Erörterungen S. 502 ableiten läßt und woraus erhellt, daß η nicht nur mit wachsender Geschwindigkeit, sondern auch mit zunehmendem Rohrdurchmesser abnimmt), für η die Gleichung S. 681 aufstellte:

$$\eta = 0,01355 + \frac{0,001235 + 0,01\,d}{d\sqrt{v}}.$$

Aus Weisbach'schen Versuchsresultaten und damit vorgenommenen Correctionen berechnete ferner Grashof nachstehende Tabelle[3]), die wir deshalb hier aufführen, um die Abnahme von η mit den Rohrdurchmessern (d) und den Geschwindigkeiten (v) der sich in den Röhren bewegenden Luft einigermaßen beurtheilen zu können.

---

[1]) Die Röhren von 500 Millimeter Durchmesser wurden nur in Längen von 100 Metern benutzt.

[2]) Notes sur le Cours d'Hydraulique (Lithographirtes Heft der école des ponts et chaussées. Session 1849—1850), Pag. 163. In den oben genannten Memoiren wird diese Formel, wenn wir unsere Bezeichnungen einführen, folgendermaßen angegeben:

$$\frac{v^2}{2g}\left(g\,\frac{8bl}{d} + 4,6052 \text{ Lgnt } \frac{P}{p}\right) = \frac{10,334\,(1 + \delta t)}{2 \, . \, 1,293 \, . \, s}\left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^2\right] - \\ - \frac{4l}{d}\,av\left(\frac{P + p}{2P}\right).$$

[3]) Theoret. Maschinenlehre. Bd. 1, S. 604.

d	η		
	$0^m,01051$	$0^m,01432$	$0^m,02495$
$v = 30^m$	0,03265	0,02955	0,02441
$v = 70^m$	0,02759	0,02615	0,02066
$v = 110^m$	0,02657	0,02360	0,01922

Von den ferneren Verdiensten Grashof's um die Theorie der Bewegung von Gasen und Dämpfen, auch für die practischen Zwecke der Technik[1]), muß der Verfasser hervorheben, daß beispielsweise Grashof als der Erste zu bezeichnen ist, welcher es verstanden hat, gestützt auf die Principien der mechanischen Wärmetheorie, practisch brauchbare Formeln für die Bewegung hochgespannter Gase und Dämpfe zur Berechnung der Druckverluste dieser Flüssigkeiten bei ihrer Bewegung in langen Röhren aufzustellen!

[1]) Der Verfasser hält für Pflicht, mit gegenwärtigem Schlusse einer ungerechtfertigten Bemerkung Hudelo's in der 4. Auflage (1878), Bd. 1, Pag. 204 des Péclet'schen Werkes „Traité de la chaleur“ entgegenzutreten, woselbst hinsichtlich Grashof's wiederholt citirter, trefflicher Arbeit Folgendes gesagt wird: „On reconnaîtra, aisément que la question de l'écoulement des gaz par de longs tuyaux de conduite, sous de grandes pressions, peut être traitée par le calcul, mais qu'elles doit alors conduire à des résultats que leur complication rend d'un emploi tour à fait impossible dans la pratique“.

Dritter Abschnitt.

Wirkung (Stoß) und Widerstand elastischer Flüssigkeiten.

§. 203.

Im Allgemeinen sind, bei nicht zu großen Geschwindigkeiten (von 10 Meter pro Secunde abwärts), die zur Zeit gewonnenen Resultate über Stoß und Widerstand elastischer Flüssigkeiten mit jenen übereinstimmend, welche in der Hydrodynamik für Wasser etc. aufgeführt wurden.

Deshalb kann man auch (innerhalb gedachter Grenzen) den geraden Stoß $= P$ und Widerstand $= W$ elastischer Flüssigkeiten gegen feste Körper, wie den Gesammtwiderstand, welchen feste Körper erfahren, die sich in bemerkten Flüssigkeiten bewegen, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen, darstellen durch:

$$\text{I.} \quad P = W = k \Delta A \frac{(V \pm v)^2}{2g}.$$

Hierbei ist k verschieden, je nachdem Stoß oder Widerstand in Frage kommt, mit der Größe und Gestalt der betreffenden Körper, ferner verschieden je nachdem die Bewegung geradlinig-fortschreitend, drehend (rotatorisch oder oscillatorisch), gleichförmig oder ungleichförmig ist. k bedarf auch hier (streng genommen) in jedem besonderen Falle einer speciellen Bestimmung.

Von den in diesen Beziehungen gewonnenen Versuchsresultaten werden hier nur einige und zwar diejenigen aufgeführt, welche für die rationelle Technik von Werth sind.

1) Ebene Flächen, normal zur Bewegung gerichtet, letztere überdies gleichförmig und geradlinig.

Entsprechend den beim Wasser (§. 184, S. 597, Note 2) gemachten Voraussetzungen kann man zunächst mit d'Aubuisson den Luftwiderstand (nach Hutton) setzen[1].

$$\text{II.} \quad P = W = 0{,}110\, \Delta A^{1{,}1}\, (V \pm v)^2 \text{ Kilogramm,}$$

wo k in Bezug auf I. ist:

$$k = 2g \,.\, 0{,}110\, A^{0{,}1} = 2{,}1582\, A^{0{,}1}.$$

Wird dagegen $k = 1{,}86$ (wie in §. 183, S. 596) für $A = 0{,}1$

[1]) Traité d'hydraulique. Edit. 2, Pag. 615.

zu Grunde gelegt, so ergiebt sich[1]) das allgemeine k für eine beliebige, aber immer noch kleine Fläche:

$$k = 2{,}34\, A^{0{,}1},$$

so daß aus II. wird:

$$\text{III.}\quad P = W = 0{,}120 \Delta A^{1{,}1} (V \pm v)^2.$$

Poncelet[2]) schlug seiner Zeit vor zu nehmen:

$k = 1{,}85 A^{-0{,}1} = 2{,}316$ für bewegte Luft bei ruhender Fläche;

$k = 1{,}30 A^{-0{,}1} = 1{,}628$ „ ruhende Luft bei bewegter Fläche.

Versuche von Piobert, Morin und Didion[3]) mit dünnen Platten, wobei $A = 0{,}25$ bis $1{,}0$ Quadratmeter war und die secundliche Geschwindigkeit 9 Meter nicht überschritt, stimmten besser, wenn man für P und k zweigliedrige Ausdrücke zu Grunde legte und demgemäß erhielt:

$$\text{IV.}\quad \overset{\text{Kil.}}{P} = \Delta A \left[0{,}03 + 1{,}3574 \frac{V^2}{2g}\right],\ \text{so wie}$$

$$k = 2g \left[\frac{0{,}03}{V^2} + \frac{1{,}3574}{2g}\right] = \frac{0{,}5886}{V^2} + 1{,}3574.$$

2) Ebene Flächen, bei veränderlicher verticaler Bewegung, die betreffende Acceleration oder Bewegung $\frac{dV}{dt}$ gesetzt.

Nach Didion[4]) läßt sich in diesen Fällen für W annehmen (Flächen von nicht über 1 Quadratmeter vorausgesetzt):

$$\text{V.}\quad \overset{\text{Kil.}}{W} = \frac{\Delta}{\Delta_1} A \left(0{,}036 + 0{,}084 V^2 + 0{,}164 \frac{dV}{dt}\right)$$

bei verticalem Niedersteigen,

$$\text{VI.}\quad \overset{\text{Kil.}}{W} = \frac{\Delta}{\Delta_1} A \left(0{,}036 + 0{,}084 V^2 - 0{,}164 \frac{dV}{dt}\right)$$

bei verticalem Aufsteigen.

$\Delta_1 = 1{,}214$ die Dichte der atmosphärischen Luft bei $0^m{,}76$ Barometerstand und 10° Celsius Temperatur.

3) Hohlflächen, speciell Kugelabschnitte, wie bei Fallschirmen, bei verticalem Niedersteigen, ebenfalls nach Didion[5]):

$$\text{VII.}\quad \overset{\text{Kil.}}{W} = \frac{\Delta}{\Delta_1} A \left[0{,}07 + 0{,}163 V^2 + 0{,}142 \frac{dV}{dt}\right].$$

---

[1]) Grashof, Theoretische Maschinenlehre. Bd. 1, S. 898.

[2]) Introduction à la mécanique industrielle. Nr. 407.

[3]) Traité de Balistique. Paris 1848, Pag. 34.

[4]) Poncelet, Introduction etc. Nr. 405 (3. Auflage, Pag. 626).

[5]) Poncelet a. a. O., Nr. 411. Hervorgehoben wird hierbei folgendes Ergebniß: Setzte man (bei gleichförmiger Bewegung) den Widerstand einer ebenen Fläche vom Inhalte $= A$ gleich Eins, so ergab sich dieser Widerstand zu ungefähr 1,94, wenn die hohle (concave) Seite voransging, dagegen zu 0,77, wenn die erhabene (convexe) Seite vorausging. Der Versuchsfallschirm (Parapluie) hatte $1^m{,}27$ Durchmesser und $A = 1{,}20$ Quadratmeter Fläche.

4) Ebene Flächen bei gleichförmiger Drehbewegung.

Aus Versuchen Borda's[1]) mit kleinen Flächen, deren Mitte von der Drehachse um $r = 1,20$ Meter abstand und bei Geschwindigkeiten, die 4 Meter pro Secunde nicht überschritten, ergab sich:

$k = 1,39$, wenn $A = 0,012$ Quadratmeter.
$k = 1,49$, „ $A = 0,026$ „
$k = 1,64$, „ $A = 0,059$ „

Eben so fand Hutton[2]), wenn $r = 1^m,36$ war:

$k = 1,24$ für $A = 0,011$ Quadratmeter.
$k = 1,43$ „ $A = 0,021$ „

Endlich ergab sich aus Versuchen Thibault's[3]) bei $r = 1^m,37$ und für Geschwindigkeiten nicht über 11 Meter pro Secunde:

$k = 1,525$ für $A = 0,026$ Quadratmeter.
$k = 1,784$ „ $A = 0,103$ „

Aus allen diesen Versuchen erkennt man, daß der Widerstandscoefficient k mit der Größe von A wächst. Man wird daher, bis auf Weiteres, wiederum für kleine Flächen mit Weisbach[4]) setzen können:

$$\text{VIII.} \quad k = 1,254 + \frac{1,295 \sqrt{A}}{r}.$$

Duchemin[5]) leitete aus seinen Versuchen für den Widerstandscoefficienten $= k$, wenn ebene Flächen im Kreise von r Halbmesser bewegt werden (wohl früher als Weisbach) den Werth ab:

$$\text{IX.} \quad k = 1,254 + \frac{1,624 \sqrt{A}}{r - s}.$$

Hier bezeichnet s den Abstand des Schwerpunktes des Flächentheiles, welcher auf der entgegengesetzten Seite der Drehachse liegt.

Professor von Miller[6]) will bei der Berechnung eines Windfanges zu Bremszwecken (einer Luftflügelbremse) für Fördermaschinen bei Annahme, daß der Luftwiderstand einfach mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wächst, derartig unbrauchbare Resultate erhalten haben, daß er (ähnlich wie Coulomb und Prony für Wasser S. 399) den gedachten Widerstand dem Werthe proportional setzte:

$$dA\,[3\alpha V^2 + 2\beta V],$$

worin dA ein Element der Flügelfläche ist und α, β Coefficienten

---

[1]) Mémoires de l'Académie des Sciences von 1763, Pag. 359.

[2]) Tracts on mathematical and philosophical subjects. London 1812 und Terquem's Uebersetzung ins Französische, Pag. 117 etc.

[3]) „Recherches expérimentales sur la resistance de l'air". Brest 1826.

[4]) Ingenieur-Mechanik, Bd. III, Erste Auflage, S. 329. (In der zweiten von Prof. Herrmann bearbeiteten Auflage wurde S. 942 derselbe Ausdruck beibehalten).

[5]) Experimentaluntersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten. Deutsche Ausgabe S. 97 (Braunschweig 1844).

[6]) Berg- und Hüttenmännisches Jahrbuch der k. k. Bergakademien Leoben, Schemnitz und Pribram. Bd. XII (1863), S. 225.

sind, für die v. Miller aus Versuchen fand: $\alpha = 0{,}0182$ und $\beta = 0{,}2638$, dabei österr. (Wiener) Fuße und Pfunde vorausgesetzt[1]).

Jedenfalls lehrt das v. Miller'sche Ergebniß, daß es am gerathensten sein wird, für jeden besonderen Fall, so weit als möglich, sorgfältige Versuche anzustellen.

Zusatz 1. Bemerkenswerth sind deshalb folgende drei Fälle:

1) Den Widerstand $= W_r$, welchen die atmosphärische Luft verticalen Wasserrädern bei ihrer Umdrehung entgegenstellt, ermittelte Piobert, Morin und Didion aus directen Versuchen[2]) zu:

$$\text{X.} \quad W_r \overset{\text{Kil.}}{=} 0{,}10 + (0{,}0068 + 0{,}1179\,na)V^2,$$

worin n die Zahl der Schaufeln, a die Fläche einer derselben in Quadratmetern und V die secundliche Umfangsgeschwindigkeit in Metern bezeichnet.

Gewöhnlich nimmt man dafür

$$W_r = 0{,}118\,naV^2,$$

so daß sich der correspondirende Arbeitsverlust $= \mathfrak{A}_r$ herausstellt zu

$$\mathfrak{A}_r^{mk} = 0{,}118\,naV^3.$$

2) Den Widerstand W_e, welchen ein in ruhiger Luft mit der Geschwindigkeit $= v$ pro Stunde in englischen Meilen fahrender Eisenbahnzug erfährt, fand Pambour aus directen Versuchen[3]):

$$\text{XI.} \quad W_e = 0{,}002687\,Av^2 \text{ Pfd. engl.}$$

Die in englischen Quadratfußen auszudrückende Fläche A räth Pambour aus der Formel $A = 70 + 10 \,.\, i$[4]) zu berechnen, worin i die Zahl der überhaupt vorhandenen Wagen (Lokomotive und Tender inbegriffen) bezeichnet.

Für Metermaaße ist ebenfalls nach Pambour:

$$W_e = 0{,}005064\,AV^2 \text{ Kilogramm,}$$

wenn A in Quadratmetern und V in Kilometern pro Stunde ausgedrückt wird.

3) Eine Arbeit über die Mechanik des Fluges, welche der Ingenieur und Assistent Kargl am Züricher Polytechnikum in der unten angegebenen Zeitschrift[5]) veröffentlichte, veranlaßte zu besonderen Versuchen mit ebenen, rotirenden Doppelflügeln, wobei ein eigenthümlicher von Reuleaux angegebener Dynamometer in Anwendung gebracht wurde, führte, was die Formel

---

[1]) Da selbst ein College (?) des Herrn v. Miller, nämlich Herr v. Hauer, in seinem Werke „Die Fördermaschinen", 2. Auflage, S. 458 die v. Miller'schen Coefficienten für „unsicher" erklärt, so möchten auch wir dieser Bestimmung keinen besonderen Werth beilegen!

[2]) Poncelet, Introduction etc., Nr. 404.

[3]) Theoretisch-practisches Handbuch über Dampfwagen. (Deutsch von Schnuse), S. 81 ff.

[4]) Nach Versuchen des Maschinenmeisters Garcke (Thüringische Eisenbahn) wäre gegenwärtig für A zu setzen: $A = 85 + 5 \,.\, i$. Man sehe deshalb Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen. Jahrg. 1855, S. 228.

[5]) Bornemann's Civilingenieur. Bd. 16 (1870), S. 454.

$$W = k\Delta A \frac{V^2}{2g}$$

betrifft, zu dem merkwürdig großen Mittelwerthe von

$$k = 7,$$

vorausgesetzt, daß die secundlichen Geschwindigkeiten nicht viel über 2 Meter betragen.

Zusatz 2. Der Eigenthümlichkeit wegen ist hier noch einer Arbeit des Herrn A. Samuelson, Ingenieur in Hamburg (eines ehemaligen Studirenden der technischen Hochschule in Hannover) zu gedenken, die im 10. Bande (1865) von Bornemann's Zeitschrift „Der Civilingenieur" (S. 323 ff.) veröffentlicht wurde und welche die Ueberschrift trägt: „Der Widerstand der Luft gegen bewegte Körper".

Mit Hülfe der einfachsten Sätze der mechanischen Wärmetheorie beantwortete Samuelson die Frage nach dem Widerstande, welchen die vor und hinter einem sehr dünnen Kolben befindliche atmosphärische Luft der Bewegung entgegensetzt, wenn dieser Kolben dicht schließend in einer unendlich langen Röhre mit variabler Geschwindigkeit verschoben wird.

Samuelson gelangt zu dem etwas complicirten (sonderbaren) Ausdrucke, der für ebene Flächen brauchbar sein soll:

$$\text{XII.} \quad W = A \left\{ P^{\frac{n-1}{n}} + mv^2 \right\}^{\frac{n}{n-1}} - A \left\{ P^{\frac{n-1}{n}} - mv^2 \right\}^{\frac{n}{n-1}},$$

worin n die bekannte Zahl 1,41 bezeichnet und

$$m = \frac{n-1}{n} \frac{\Delta}{2g} P^{-\frac{1}{n}} \text{ ist.}$$

Für $P = 10333$ Kil., $\Delta = 1,293$ Kil. und $2g = 19^m,62$ wird dann:

$$\text{XIII.} \quad W = A \{ (14,697 + 0,0000273 v^2)^{3,439} - (14,697 - 0,0000273 v^2)^{3,439} \}.$$

Offenbar läßt sich für letzteren Ausdruck auch schreiben:

$$W = A \{ (a + b)^n - (a - b)^n \}.$$

Ist nun b ein kleiner Bruch, a dagegen eine größere Zahl, wie dies bei Geschwindigkeiten bis zu 100 Metern pro Secunde der Fall ist, so läßt sich approximativ setzen:

$$W = 2Ana^{n-1}b,$$

woraus folgt, wenn man die ursprünglichen Werthe wieder einführt:

$$\text{XIV.} \quad W = \frac{\Delta}{g} Av^2, \text{ oder}$$

$$W = k\Delta A \frac{v^2}{2g},$$

wenn $k = 2$ angenommen wird.

Letztere Annahme ist in der That zulässig, da sich, für verhältnißmäßig kleine Flächen, nach den Versuchen k bald etwas kleiner, bald größer wie 2 herausstellt [1]).

Endlich erwähnen wir noch einer Formel des Geh. Ober-Bau-

---

[1]) Man sehe eine betreffende Tabelle in der folgenden Anmerkung.

directors Hagen in Berlin, welche Bd. 152 (1874) von Poggend. Annalen, S. 104 mitgetheilt wird und welche, nach Versuchen Hagen's, den Widerstand der Luft gegen Planscheiben darstellen soll, die in normaler Richtung gegen ihre Ebene bewegt werden. Mit Beibehaltung unserer Bezeichnungen ist dieselbe

$$W = (\alpha + \beta \cdot q) A V^2.$$

Nur bezeichnet q den Umfang der benutzten Scheiben und ist

$$\alpha = 2{,}264;\ \beta = 0{,}08942 \text{ für preuß. Maaße.}$$

Anmerkung. d'Aubuisson berechnete mit Hülfe der Formel II (v = Null vorausgesetzt):

$$P = 0{,}11\, \Delta A^{1,1} V^2,$$

nachstehende Tabelle, dabei

$$A = 1 \square^m,\ \Delta = 1{,}231 \text{ Kil.},\ b = 0^m{,}755 \text{ und } t = 12^0\, C.$$

angenommen: [1])

Benennung des Windes	V (Meter pro Sec.)	P (pro □Met.inKil.)
Kaum merkbarer W.	1,0	0,135
Gelinder W.	2,0	0,540
Frischer W. (Brise) Schiffssegel gut spannend	6,0	4,870
Bester Windmühlen W.	7,0	6,460
Sehr frischerW. (sehr gut für Meeresfahrt)	9,0	10,970
Fast stürmisch (die größten Schiffssegel spannend)	12,0	19,50
Stürmisch	15,0	30,47
Ungestümer W.	20,0	54,16
Heftiger Sturm	30,0	122,20
Orkan	36,0	174,81
Großer Orkan	45,0	277,80

Eben so berechnete Samuelson mittelst der Formeln XIII. und XIV. folgende Tabelle:

---

[1]) Richard (Aide Memoire, Pag. 1514) berichtet, daß Fresnel bei der Beurtheilung der Stabilität von Leuchtthürmen pro Quadratmeter 275 Kil. Druck (also das fünffache des Werthes für Orkane in Rechnung gebracht habe, was vielleicht (?), nach den Bidone'schen Beobachtungen der sogenannten ersten Stöße, S. 589, erklärt werden könnte. Deutsche Ingenieure führen bei betreffenden Rechnungen als Maximum des in Europa herrschenden Winddruckes 150 Kilogramm pro Quadratmeter ein. Hiernach wurde neuerdings berechnet, daß der Einsturz der Tay-Brücke bei Dundee (am 28. Decbr. 1879) zufolge fehlerhafter Construction der eisernen Pfeiler, schon bei einem Drucke von 100 Kilogramm pro Quadratmeter erfolgen mußte. Man sehe deshalb die Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1880, S. 69.

	V (Meter pro Sec.)	P (pro □Meter in Kil.)	
		Nach Gleichung XIII	Nach Gleichung XIV
Kaum fühlbarer Luftzug .	1,0	0,13180	0,13178
Guter Segelwind . . .	10,0	13,180	12,899
Tropischer Orkan . . .	50	329,52	329,50

Samuelson hält die Formel XIV für alle Geschwindigkeiten bis zu 100 Metern pro Secunde, vielleicht mit einem Erfahrungscoefficienten berichtigt, für vollkommen (?) genau [1]).

§. 204.

Freier Fall der Körper aus geringen Höhen, mit Beachtung des Widerstandes der atmosphärischen Luft.

Der Verfasser bestrebt sich, mit diesem Paragraphen den doppelten Zweck zu erfüllen, sowohl eine passende Anwendung von Resultaten des vorigen Paragraphen zu machen, als auch das zu ergänzen, was im Abschnitte „Freier Fall der Körper“ in den von ihm verfaßten „Grundzügen der Mechanik“ (Dritte Auflage), §. 38, versprochen wird. Vorausgesetzt ist dabei, daß die fallenden Körper entweder solche sind, deren Widerstand mit Hülfe der §. 187 für die Bewegung im Wasser ermittelten Gesetze bestimmt werden kann, oder daß die Körper von so geringer Dicke sind und solche Gestalt haben, daß sie als Flächen (nach vorigem Paragraphen) in Rechnung genommen werden dürfen. Endlich setzen wir noch voraus, daß die Dichtigkeit der Luft in jedem Augenblicke des Falles constant ist und der Widerstand nur von der augenblicklichen Fallgeschwindigkeit, nicht aber von der Beschleunigung (Acceleration) abhängt, d. h. daß bei Anwendung der Werthe für W Nr. V, VI und VII des vorigen Paragraphen das Glied unbeachtet bleiben darf, welches $\frac{dV}{dt}$ als Factor enthält [2]).

Wird hiernach der dem frei fallenden Körper, vom Gewichte Q, entgegenwirkende Luftwiderstand mit $k\Delta A \frac{v^2}{2g}$ bezeichnet, so hat man (ähnlich wie §. 193 und §. 194):

[1]) Man vergleiche mit vorstehenden Tabellenwerthen die des englischen Ingenieurs Smeaton im ersten Bande, S. 461 und 462, der zweiten Auflage der „Allgemeinen Maschinenlehre“ des Verfassers.

[2]) Allgemeiner, mehr oder weniger ohne die sämmtlichen hier gemachten Voraussetzungen, wird die vorliegende Frage in nachbemerkten Schriften behandelt: Poncelet, Introduction etc., Nr. 450. — Duchemin, Experimentaluntersuchungen, §. 111.

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{dv}{dt} = \frac{Q - k\varDelta A\frac{v^2}{2g}}{\frac{Q}{g}},$$

oder, wenn man $\frac{k\varDelta A}{2Q} = a$ setzt:

$$\frac{dv}{dt} = g - av^2,$$

daher ergiebt sich die Zeit t, nach welcher der Körper die Geschwindigkeit v erlangt hat, zu:

$$\text{I.}\quad t = \int\frac{dv}{g - av^2} = \frac{1}{2r}\,\text{Lgnt}\,\frac{1 + mv}{1 - mv},$$

worin $m = \sqrt{\frac{a}{g}}$ und $r = \sqrt{ag}$ ist.

Aus I. reducirt sich leicht die correspondirende Geschwindigkeit:

$$\text{II.}\quad v = \frac{1}{m}\,\frac{e^{2rt} - 1}{e^{2rt} + 1},$$

wenn e die bekannte Zahl 2,71828 bezeichnet.

Endlich erhält man für den nach der Zeit t zurückgelegten Weg $= x$, wegen $dx = vdt$:

$$dx = \frac{1}{m}\,\frac{e^{2rt} - 1}{e^{2rt} + 1}\,dt, \text{ d. i.}^{1)}$$

$$\text{III.}\quad x = \frac{1}{m}\,\text{Lgnt}\,\frac{2^{2rt} + 1}{2e^{rt}}.$$

Der in II. für die Geschwindigkeit v gefundene Werth läßt sich auch darstellen durch:

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}}\;\frac{1 - \frac{1}{e^{2rt}}}{1 + \frac{1}{e^{2rt}}}.$$

Läßt man daher die Zeit t stetig wachsen, so nimmt $\frac{1}{e^{2rt}}$ rasch ab, folglich nähert sich v der Grenze[2]):

---

[1]) $e^{2rt} - 1 = u$, also $e^{2rt} + 1 = u + 2$ gesetzt, liefert:

$$dx = \frac{1}{m}\cdot\frac{u}{u+2}\cdot\frac{1}{2r}\cdot\frac{du}{1+u}, \text{ d. i.}$$

$$2ax = 2\int\frac{du}{u+2} - \int\frac{du}{1+u} + C,$$

woraus sich ergiebt:

$$2ax = 2\,\text{Lgnt}\,(e^{2rt} + 1) - 2\,\text{Lgnt}\,e^{rt} - 2\,\text{Lgnt}\,.\,2, \text{ d. i.}$$

$$x = \frac{1}{a}\,\text{Lgnt}\,\frac{\frac{1}{2}(e^{2rt} + 1)}{e^{rt}}.$$

[2]) Ein ganz gleicher Fall wurde bereits in §. 80, S. 217, bei der Ermittlung der Ausflußgeschwindigkeit des Wassers aus Gefäßen behandelt.

$$\text{IV.}\quad v = \sqrt{\frac{g}{a}} = \sqrt{\frac{2gQ}{k\Delta A}},$$

woraus erhellt, daß das Fallen der Körper in der Luft zwar eine beschleunigte (accelerirende) Bewegung, jedoch von der Art ist, daß sie sich immer mehr und mehr einem gleichförmigen Beharrungszustande nähert.

Leidet daher der Körper von der Luft einen erheblichen Widerstand, so erkennt man leicht, daß seine Geschwindigkeit jener Grenze IV sehr bald nahe kommt und dann während der übrigen Zeit seines Fallens nur noch geringen Aenderungen unterworfen sein müsse.

Beispiel 1. Eine Kugel von $0^m,03$ Durchmesser und von 0,0113 Kilogramm Gewicht läßt man in ruhiger Luft bei $12°\ C$ Temperatur und $0^m,75$ Barometerstand fallen. Es fragt sich, welchen Weg dieselbe nach $2\frac{1}{2}$ Secunden durchlaufen und welche Geschwindigkeit sie dann erreicht haben wird, sobald man sie vom Zustande der Ruhe aus fallen läßt.

Auflösung. Wir nehmen

$$\Delta = \frac{1{,}293}{1 + 0{,}00367\,.\,12} \cdot \frac{75}{76} = 1{,}222 \text{ Kil.},$$

finden

$$A = \frac{\pi}{4}(0{,}03)^2 = 0\square^m{,}0007065$$

und setzen $k = 0{,}52$ (nach S. 608, Note 2), so erhält man:

$$a = \frac{k\Delta A}{2Q} = \frac{0{,}52\,.\,1{,}222\,.\,0{,}0007065}{2\,.\,0{,}0113} = 0{,}01995$$

und daher

$$r = \sqrt{ag} = \sqrt{0{,}01995\,.\,9{,}81} = 0{,}44233, \text{ so wie}$$

$$m = \sqrt{\frac{a}{g}} = 0{,}0451 \text{ und}$$

$$e^{rt} = 3{,}0217.$$

Daher der in $2\frac{1}{2}$ Secunden durchfallene Weg:

$$x = \frac{1}{0{,}01995} \operatorname{Lgnt} \frac{1 + (3{,}0217)^2}{2\,.\,3{,}0217} = 25^m{,}6.$$

Für die erlangte Geschwindigkeit ergiebt sich nach II:

$$v = \frac{1}{0{,}0451} \cdot \frac{9{,}1307 - 1}{10{,}1307}, \text{ d. i.}$$

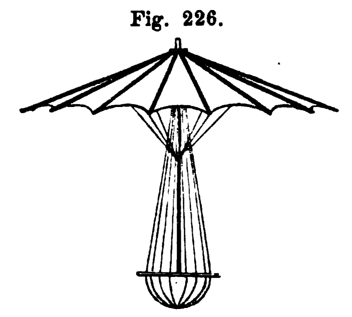
$$v = 17^m{,}80.$$

Beispiel 2.[1]) Mit welcher Geschwindigkeit gelangt ein Luftschiffer, unter Benutzung eines sogenannten Fallschirmes, Fig. 226, von 8 Meter Durchmesser zur Erde, wenn das Gesammtgewicht von Insassen und Schirm 85 Kilogramm beträgt?

---

[1]) Der Verfasser entlehnte dies Beispiel absichtlich der 3. Ausgabe (1870) des Poncelet'schen Werkes „Introduction à la mécanique indust." Nr. 452.

Fig. 226.



Auflösung. Mittelst der Gleichung IV ist hier ohne Weiteres:

$$v = \sqrt{\frac{2gQ}{k\Delta A}}.$$

Mit Bezug auf VII in Nr. 3 des vorigen Paragraphen läßt sich aber, wenn $\Delta = \Delta_1$ angenommen wird, setzen:

$$k\Delta A \frac{v^2}{2g} = 0{,}163\, Av^2, \text{ also}$$

$$k\Delta A = 2g \,.\, 0{,}163\, A,$$

daher für v erhalten wird:

$$v = \sqrt{\frac{Q}{0{,}163\, A}}.$$

Für unseren speciellen Fall also, wo $A = 4^2 . \pi = 16 \,.\, 3{,}145 = 50\Box^m{,}264$ und $Q = 85$ Kil. ist:

$$v = \sqrt{\frac{85}{0{,}163 \,.\, 50{,}264}}, \text{ d. i.}$$

$$v = 3^m{,}224.$$

Diese Geschwindigkeit ist offenbar nicht hinreichend, um große Gefahr in dem Augenblicke befürchten zu müssen, wo die Gondel des Fallschirms die Erdoberfläche erreicht.

Wäre der Luftspringer nur aus der Höhe von 4 Metern herabgesprungen, so würde er mit einer fast dreifach so großen Geschwindigkeit, nämlich mit

$$v = 4{,}43 \sqrt{4} = 8^m{,}86$$

auf den Boden gestoßen sein.

§. 205.

Ist der Luftstrom unter einem Winkel α gegen eine ebene Fläche (Fig. 212) oder gegen einen plattenförmigen Körper geneigt, so sollte nach §. 184 der resultirende Normaldruck im Verhältnisse $\sin^2\alpha$ kleiner sein, als für $\alpha = 90°$. Auf das Unzureichende dieses Satzes, nach betreffenden Versuchen, wurde bereits in der Anmerkung zu §. 184 aufmerksam gemacht, was hier dadurch ergänzt werden mag, daß noch gegenwärtig folgender, von Hutton[1]) aus sorgfältigen Versuchen abgeleiteter Werth einiges Vertrauen verdient[2]):

$$P = W = 0{,}11\, \Delta A^{1,1}\, V^2\, (\sin\alpha)^{1,84 \cos\alpha}.$$

---

[1]) Tracts Nr. XXXVI (oder Vol. III), Pag. 208. London 1812.

[2]) Der Verfasser entlehnte diesen Ausdruck d'Aubuisson (Hydraulique, Nr. 550), der für Meter und Kilogramme aus dem Hutton'schen Originale reducirt ist, an welcher letzteren Quelle (Tract XXXVI, Pag. 208) jedoch folgender Werth angegeben wird:

$$W = P = 0{,}03\, A\, V^{2,04}\, (\sin\alpha)^{1,84 \cos\alpha}.$$

Hinsichtlich anderweiter Bemühungen für die Wirkung (P) oder den Widerstand (W) schiefer Flächen, in Bezug auf ruhende oder bewegte atmosphärische Luft, besser mit den Erfahrungen übereinstimmende Formeln aufzustellen, ist zunächst auf die betreffenden Werthe für Wasser als bewegte oder widerstehende Flüssigkeit Navier's, Duchemin's, Weisbach's und Scheffler's, S. 580, aufmerksam zu machen, welche die genannten Autoren auch für atmosphärische Luft für brauchbar erachteten, zu denen sich später (1865) die Arbeit Samuelson's[1]) gesellte, die sich auf den Widerstand gegen geneigte Flächen erstreckte.

Die Unbrauchbarkeit aller dieser Formeln zur Beurtheilung der Wirkung des Windes gegen größere und namentlich gegen wenig gebogene, sogenannte windschiefe Flächen der Flügel unserer gewöhnlichen Windräder, hat schon Barlow[2]) und nach ihm auch alle anderen Schriftsteller im Gebiete der technischen Mechanik bedauert, die sich mit der praktisch wichtigen Frage beschäftigten, die Arbeit zu berechnen, welche bewegte atmosphärische Luft (d. h. der Wind) auf die Flügel der Windmühlen überträgt.

Deshalb mußten sich selbst scharfe tatentvolle Theoretiker, wie beispielsweise Coriolis[3]) entschließen, dem Vorgange L. Euler's zu folgen und für Windgeschwindigkeiten bis zu 8 Metern pro Secunde das Verhältniß $\sin^2\alpha$ beizubehalten, um zu Differenzialfunctionen zu gelangen, welche noch integrirbar waren und deren Resultate wenigstens einigermaßen mit den Erfahrungen übereinstimmten oder doch zu Vergleichen für technische Zwecke benutzt werden konnten. Die beiden folgenden Paragraphen sind diesem Gegenstande gewidmet.

Beispiel. Eine ebene feste Fläche von 20 Quadratmetern Inhalt (ein Rechteck von 10 Metern Breite und 2 Metern Höhe) wird von einem heftigen Winde unter einem Winkel von $\alpha = 70$ Grad mit der Geschwindigkeit von 10 Metern pro Secunde getroffen. Es fragt sich, wie groß das Verhältniß des hierbei ausgeübten Druckes zu dem Drucke ist, welchen diese Fläche erfährt, wenn der Luftstrom unter einen rechten Winkel gegen dieselbe gerichtet ist?

Das Gewicht eines Cubikmeters Luft sei vorher zu 1,231 Kilogramm ermittelt.

Auflösung. Der schief gerichtete Luftstrom übt einen Druck (Stoß) $= P$ aus, für welchen man erhält, da $A^{1,1} = (20)^{1,1} = 26□,99$, $\sin 70^0 = 7,9397$; $\cos \beta = 0,342$ und

$$1,84 \cos 70^0 = 1,84 \,.\, 0,342 = 0,6292 \text{ ist:}$$

$$P = 0,11 \,.\, 1,231 \,.\, 26,99 \,.\, 10^2 \,(0,9397)^{0,6292}, \text{ d. i.}$$

$$P = 351 \text{ Kilogramm.}$$

---

[1]) Civilingenieur, Bd. 11 (1865), S. 332 ff.

[2]) Encyclop. metrop. Mixed Sciences. T. I, Pag. 360.

[3]) „Traité de la mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines". Pag. 238.

Für den Druck (Stoß) P_0, wenn $\alpha = 90^0$ ist, folgt aber:

$$P_0 = 0{,}11 \,.\, 1{,}231 \,.\, 26{,}99 \,.\, 10^2 \,.\, 0{,}9397^{0,6292}, \text{ d. i.}$$

$$P_0 = 365 \text{ Kilogramm,}$$

demnach

$$\frac{P}{P_0} = \frac{351}{365} = 0{,}962.\ ^{1})$$

§. 206.

Druck (Stoß) der bewegten Luft gegen die schiefe Fläche eines Windrades.

Wie bereits im vorigen Paragraphen erwähnt, hat es weder im letzten noch gegenwärtigen Jahrhundert, selbst den ausgezeichnetsten Meistern der Wissenschaft, gelingen wollen, die in der Ueberschrift bezeichnete Aufgabe anders zu lösen, als den Druck (Stoß) unbegrenzter Luft gegen ein mehr oder weniger schief gestelltes Flächenelement proportional dem Sinusquadrate des Winkels α anzunehmen, unter welchen dasselbe gegen die Windrichtung geneigt ist.

Die Arbeit $= \mathfrak{A}$, welche auf die Summe derartiger Flügelelemente dF übergetragen wird, erhält man daher nach (5), §. 185, indem man Δ statt γ einführt und ferner annimmt, daß die Zahl der vorhandenen Windflügel $= n$ und die Winkelgeschwindigkeit ω constant ist, zu:

$$(1) \quad \mathfrak{A} = nk_1 \frac{\Delta}{2g} \omega \int_{r_0}^{r_1} dF\,(V \sin\alpha - \omega x \,.\, \cos\alpha)^2 x \cos\alpha.$$

Hierbei bezeichnet r_1 die von der Drehachse am weitesten abstehende Sprosse des Windrades und r_0 diejenige, welche die nächste zu gedachter Achse ist.

Da es jedoch zu einfacheren Entwickelungen führt, sobald man x und F als Functionen von α darstellt, so erhält man, sobald sich die Winkel α_1 und α_0 auf die Sprossen in den Entfernungen r_1 und r_0 von der Drehachse beziehen:

$$(2) \quad \mathfrak{A} = n \,.\, \frac{k\Delta\omega}{2g} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dF\,(V \sin\alpha - \omega x \cos\alpha)^2 x \cos\alpha.\ ^{2}).$$

Bildet jeder der n Flügel ein Rechteck von der constanten

---

[1]) Denselben Werth findet Grashof in Bd. 1, S. 898 seiner „Theoretischen Maschinenlehre".

[2]) Für die verlorene Arbeit, welche der Zapfenreibung in der Achsenrichtung der Windradwelle entspricht, erhält man ebenso, wenn f den betreffenden Reibungscoefficient bezeichnet:

$$\mathfrak{A} = \frac{nk\Delta}{2g} \,.\, \tfrac{2}{3} f \varrho\omega \,.\, \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dF\,(V \sin\alpha - \omega x \cos\alpha)^2\, \omega x \sin\alpha.$$

Breite $= b$, so wird $dF = b dx$ und man erhält aus (2) nach einiger Umformung:

$$(3)\quad \mathfrak{A} = n \frac{k\Delta\omega b}{2g} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (V \operatorname{tg} \alpha - x\omega)^2 x dx \cos^3\alpha.$$

Um letzteren Ausdruck in bereits gedachter Weise integrirbar zu machen, nehme man zuerst x und F als constant an und suche denjenigen Werth von α, für welchen

$$f(\alpha) = (V \sin\alpha - x\omega \cos\alpha)^2 \cos\alpha$$

ein Maximum wird.

Nach bekannter Methode erhält man dann leicht:

$$(4)\quad \operatorname{tg} \alpha^3 - 3 \frac{x\omega}{V} . \operatorname{tg} \alpha = 2 \text{ und}$$

$$(5)\quad \operatorname{tg} \alpha = \tfrac{3}{2} \frac{\omega x}{V} + \sqrt{2 + \left(\tfrac{3}{2} \frac{\omega x}{V}\right)^2}\,^{1)}.$$

Aus (4) folgt ferner:

$$\frac{V}{3} . \operatorname{tg} \alpha - x\omega = \tfrac{2}{3} V . \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

und wenn man zu letzterem Werthe auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{2}{3} V \operatorname{tg} \alpha$ addirt, wird:

$$V \operatorname{tg} \alpha - x\omega = \tfrac{2}{3} V \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \tfrac{2}{3} V \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{2}{3} . \frac{V}{\sin\alpha \cos\alpha}.$$

Sonach erhält man aus (3):

$$(6)\quad \mathfrak{A} = \tfrac{4}{9} \frac{kn\Delta b V^2 \omega}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{x dx . \cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

---

[1]) Nimmt man mit Coulomb $\frac{\omega r_1}{V} = 2{,}40$, so folgt aus (5):

$$\operatorname{tg} \alpha = \tfrac{3}{2} . \frac{2{,}4 x}{r_1} + \sqrt{2 + \left(\tfrac{3}{2} . \frac{2{,}4 x}{r_1}\right)^2}, \text{ d. i.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 3{,}6 \frac{x}{r_1} + \sqrt{2 + \left(\frac{3{,}6 x}{r_1}\right)^2}.$$

Hieraus berechnen sich nachstehende Werthe für $r_1 = 12^m$, $r_0 = 2^m$ und $r_m = 7^m$ (Mittelsprosse der Flügelfläche), die mit Werthen von Maclaurin, Smeaton und Coulomb folgende Zusammenstellung liefern:

	Maclaurin (Rechnung)	Smeaton (Versuch)	Coulomb (Versuch)	Vorstehende Formel
α_0	53° 26′	72°	63° 42′	64° 55′
α_m	77° 20′	72°	?	77° 49′
α_1	81° 0°	83°	81° 22′	82° 23′

Ueber die Verdienste von Maclaurin, Smeaton und Coulomb um die Sache wird in den später folgenden Paragraphen unter der Ueberschrift „Geschichtliche Notizen" berichtet. Außerdem sehe man auch des Verfassers „Allgemeine Maschinenlehre", Bd. I, Abschnitt „Windräder".

Um jetzt x durch α auszudrücken, reducire man zunächst aus (4):

$$x = \frac{V}{3\omega}\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = \frac{V}{3\omega}\left(\frac{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right).$$

Durch Differenziation des ersten Werthes folgt:

$$dx = \frac{V}{3\omega}\, d\alpha \left(\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}\right),$$

so wie ferner:

$$x dx = \frac{V^2}{9\omega^2}\left(\frac{\sin^4\alpha - 4\cos^4\alpha}{\cos^3\alpha\sin^3\alpha}\right).\, d\alpha.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung folgt endlich aus (6), wenn gleichzeitig mit Coriolis $k = 3$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{2}{27}\,\frac{n\Delta b V^4}{g\omega}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha\,\frac{\sin^4\alpha - 4\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha\sin^5\alpha} \text{ oder}$$

$$\mathfrak{A} = \tfrac{2}{27}\, n\Delta\,\frac{b V^4}{g\omega}\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha} - 4\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{d\alpha\cos^2\alpha}{\sin^5\alpha}\right].$$

Nach gehöriger Ausführung der Integration findet sich:[1]

$$\mathfrak{A} = \tfrac{2}{27}\,\frac{n\Delta b V^4}{g\omega}\left\{\frac{\cos^3\alpha + \cos\alpha}{2\sin^4\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} + \tfrac{3}{2}\,\mathrm{Lgnt}\,\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha\right\} + C,$$

oder weil $\dfrac{\cos^3\alpha + \cos\alpha}{2\sin^4\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{2\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2\sin^4\alpha\cos\alpha} =$

$$= \frac{1}{\sin^4\alpha\cos\alpha} - \tfrac{3}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \text{ ist:}$$

$$\text{I. } \mathfrak{A} = \tfrac{2}{27}\,.\,\frac{n\Delta b V^4}{g\omega}\left\{\frac{1}{\sin^4\alpha\cos\alpha} - \tfrac{3}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \tfrac{3}{2}\,\mathrm{Lgnt}\,(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha)\right\} + C.$$

---

[1]) Zur Integration wurden folgende Formeln benutzt:

$$\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}$$

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \int\frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} + \mathrm{Lgnt}\,.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x$$

$$\int\frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int\frac{dx\,.\cos^n x}{\sin^{m-2}x}$$

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int dx\sin^m x\cos x^{n-2}$$

und damit erhalten: $\displaystyle\int\frac{d\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} + \mathrm{Lgnt}\,.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha$, so wie

$$\int\frac{\cos^2\alpha\,d\alpha}{\sin^5\alpha} = -\frac{\cos\alpha^3}{4\sin^4\alpha} - \tfrac{1}{8}\,\frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha} - \tfrac{1}{8}\cos\alpha - \tfrac{1}{8}\,\mathrm{Lgnt}\,(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha) =$$

$$-\frac{\cos^3\alpha + \cos\alpha}{8\sin^4\alpha} - \tfrac{1}{8}\,\mathrm{Lgnt}\,(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha).$$

Letzterer Werth, zuerst von Coriolis abgeleitet[1]), läßt sich mit Beachtung der Grenzen und für $n = 4$ auch darstellen durch:

$$\text{II.} \quad \mathfrak{A} = \tfrac{24}{81} \frac{\Delta b V^4}{g\omega} [\psi(\alpha_1) - \psi(\alpha_0)].$$

Zusatz 1. Um zu zeigen, wie weit die Gleichung II. mit den Versuchen Coulombs übereinstimmt, hat Coriolis[2]) eine Tabelle berechnet, der wir nachstehende Zusammenstellung entlehnen:

Windgeschwindigkeit $= V$	Winkelgeschwindigkeit $= \omega$ in 1 Meter Entfernung von der Drehachse	α_0 in 2^m Entfernung von der Drehachse (Gradmaaß)	α_1 in 12^m Entfernung von der Drehachse (Gradmaaß)	Arbeit in Dynamoden, d. i. 1000 Kilogr. pro Sec. auf 1 Meter Höhe erhoben: nach der Formel (ohne Reibungswiderstände)	nach der Beobachtung
$2^m,27$	0,31	63° 42′	81° 17′	0,0105	0,0250
$4^m,05$	0,78	63° 42′	81° 17′	0,1080	0,1480
$6^m,50$	1,36	63° 42′	81° 17′	0,5197	0,6309

Zusatz 2. Noch allgemeiner wie Coriolis, nämlich für trapezförmige Flügel, hat Weisbach die Theorie der Windräder in seiner „Bergmaschinenmechanik“, Leipzig 1836, S. 185, behandelt. Weisbach gelangt dabei zu Formeln, welche mit denen fast identisch sind, welche vorher §. 185, S. 602 bei dem Sprengel'schen Wasserrade entwickelt wurden.

In der That erhält man die Weisbach'schen Formeln, wenn man, wie Coriolis, den veränderlichen Neigungswinkel α der Sprossen des Windrades als unabhängige Variable annimmt und γ_1 durch Δ ersetzt, so daß statt (5) S. 602 erhalten wird:

$$\text{III.} \quad \mathfrak{A} = k_1 \frac{\Delta}{2g} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dF (V \sin\alpha - x\omega\cos\alpha)^2 x\omega\cos\alpha -$$

$$- \tfrac{2}{3} f_1 \varrho_1 k_1 \omega \frac{\Delta}{2g} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dF (V \sin\alpha - x\omega\cos\alpha)^2 \sin\alpha - f_2 \varrho_2 W \,.\, \omega,$$

worin außerdem zu setzen ist:

$$dF = dx \left[b + \frac{B-b}{l-e}(x-e) \right] {}^{3}),$$

---

[1]) Traité de la mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines, seconde édition, Pag. 307.

[2]) a. a. O., Pag. 308. Nach Coulomb's Abhandlung in den Mémoires de l'Académie des Sciences. Année 1781. T. LXV, Pag. 41 unter der Ueberschrift: „Observations sur l'effet des moulins à vents“.

[3]) Durch ein Versehen ist S. 602 statt des gegenwärtigen richtigen Werthes für dF fälschlich gesetzt worden:

$$dF = \left[b + \frac{B-b}{l-e}(l-x) \right].$$

unter Beibehaltung der in Fig. 213ᵃ und 213ᵇ (S. 601) gewählten Bezeichnungen. Für x ist der in gegenwärtigem Paragraphen gefundene Werth, nämlich

$$x = \frac{V}{3\omega}\left(\frac{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

einzuführen.

Die betreffenden Integrationen sind entweder nach denselben oder ganz ähnlichen Formeln auszuführen, wie in der Note von S. 705 angegeben wurde.

In seiner Ingenieur-Mechanik (Bd. 2, S. 793, §. 346 der 4. Auflage) bemerkt Weisbach, daß man für die meisten Fälle die Reibung an der Basis des hinteren Zapfens (der Kleinheit wegen) wird weglassen können, was doch nicht unter allen Umständen zu rathen sein dürfte. Dafür berechnet derselbe Autor die Halsreibung bei eisernen Wellen zu 15 Procent, bei hölzernen Wellen zu 30 Procent der theoretischen Nutzarbeit.

Zusatz 3. Navier[1]) entwickelt, um, wie er sagt, eine Idee der betreffenden Theorie zu geben, unter Voraussetzung eines constanten Neigungswinkels φ für alle Sprossen, die Größe der vom Winde, auf das Rad von F Gesammtfläche der Flügel, übergetragenen mechanischen Wirkung $= \mathfrak{A}$ zu:

$$\mathfrak{A} = \frac{k_1 \Delta F}{2g}(V\sin\varphi - v\cos\varphi)^2 v\cos\varphi,$$

wobei v die Geschwindigkeit des Flügelmittelpunktes bezeichnen soll.

Für $v = \frac{1}{3}V\,\mathrm{tg}\,\varphi$ wird $\mathfrak{A}$ zu einem Maximum $= \mathfrak{A}_1$ und daher

$$\mathfrak{A}_1 = \tfrac{4}{27}\,.\,k\Delta F\frac{V^3}{2g}\,.\,\sin^3\varphi.$$

Statt letzterem Werthe kann man auch setzen:

$$\text{IV.}\quad \mathfrak{A}_1 = m\,.\,FV^3,$$

wo m einen aus Versuchen zu ermittelnden Coefficienten bezeichnet.

Leider kennt man für letzteren Zweck nur einen einzigen von d'Aubuisson[2]) angeführten Versuch Coulomb's[3]), aus welchem sich Nachstehendes entnehmen läßt.

Bei einer gut construirten holländischen Windmühle (in der Umgebung der Stadt Lille), welche sechs Stampfen für Oelsamen bewegte, fand Coulomb die Windgeschwindigkeit $V = 6^m,5$, während jene sechs Stampfen zusammen ein Gewicht von 2741 Kilogrammen hatten, die Hubhöhe jeder Stampfe $0^m,4872$ betrug und pro Minute 26 Hübe erfolgten.

Hiernach ergab sich pro Sec. als Nutzarbeit: $\frac{2741\,.\,0{,}4872\,.\,26}{60} = 578^{mk},6$

Ferner betrug die gleichzeitige Nebenarbeit:

wegen Reibungen	49,0
„ Stößen zwischen Daumen und Heblatten . .	43,7
	$671^{mk},3$

---

[1]) Résumé des leçons, IIIᵉ Partie, Nr. 140.

[2]) Traité d'hydraulique, Pag. 625.

[3]) Théorie des machines simples. Nouvelle Édition. Paris 1821. Pag. 316, Nr. XXIV.

Da nun überhaupt eine Gesammtflügelfläche $= F$ von 81,12 Quadratmeter vorhanden war, so hatte man zur Bestimmung von m:

$$671{,}3 = m \,.\, 81{,}12\,(6{,}5)^3, \text{ woraus sich}$$
$$m = 0{,}0302 \text{ berechnet}$$

und daher wird:

$$\text{V.} \quad \mathfrak{A}_1 = 0{,}0302 \,.\, F \,.\, V^3 \text{ Meterkilogramme.}$$

Wird die Arbeit $\mathfrak{A}_1$ in Pferdekräften $= N$ zu 75 Meterkilogramm ausgedrückt, so folgt:

$$\text{VI.} \quad N = \frac{F V^3}{2483}.$$

Daher, wenn man mit Redtenbacher ein nur aus 4 Flügeln gebildetes Windrad voraussetzt und die Oberfläche dieser Flügel $= \Omega$ annimmt:

$$\text{VII.} \quad N = \frac{\Omega V^3}{621}.$$

Redtenbacher[1]) findet dafür den größeren Werth:

$$N = \frac{\Omega V^3}{577}.$$

Da dieser sonst ausgezeichnete Schriftsteller im Maschinenbaufache nicht angiebt, welche Versuche dem größeren Werthe im Nenner des letzteren Ausdruckes zu Grunde liegen, dagegen die Coulomb'schen Versuche immer noch die einzig zuverlässigen sind, so dürfte zu rathen sein, von der Redtenbacher'schen Formel so lange keinen Gebrauch zu machen, bis das erwähnte Bedenken beseitigt ist.

Um einigermaßen beurtheilen zu können, wie sich nach VII, bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten und bei größeren und kleineren Flügeldimensionen, die Zahl der Maschinenpferdekräfte herausstellt, mögen hier folgende zwei Beispiele Platz finden, überall die Coulomb-schen Werthe für α_1 und α_0 vorausgesetzt:

a. Für $r_1 = 12^m$; $r_0 = 2^m$; $b = 2^m$, also $\Omega = 10 \,.\, 2 = 20^{\square m},0$, ergiebt sich:

wenn $V =$	5^m	6^m	7^m	8^m
wenn $N =$	4,02	6,95	11,04	16,48

b. Für $r_1 = 10^m$; $r_0 = 1^m,5$; $b = 1^m,5$, also $\Omega = 12^{\square m},75$, ergiebt sich:

wenn $V =$	5^m	6^m	7^m	8^m
wenn $N =$	2,58	4,43	7,04	10,51

[1]) „Resultate für den Maschinenbau". Sechste von Grashof erweiterte Auflage, S. 255.

Die den angenommenen Werthen für V correspondirenden Umlaufszahlen $= U$ pro Minute der Windflügel ergeben sich, wenn $\frac{\omega r_1}{V} = 2,4$ gesetzt wird, also $U = \frac{22,92\,V}{r_1}$ ist, wie nachstehend:

c. Für $r_1 = 12^m$, also $U = 1,91\,V$:

wenn $V =$	5^m	6^m	7^m	8^m
zu $U =$	9,55	11,46	13,37	15,28

d. Für $r_1 = 10^m$, also $U = 2,292\,V$:

wenn $V =$	5^m	6^m	7^m	8^m
zu $U =$	11,46	13,75	16,04	18,34

§. 207.

Theorie des Widerstandes von krummen, convexen Flächen begrenzter Körper für einige besondere Fälle.[1])

Der Vollständigkeit wegen behandeln wir hier einige der wenigen Fälle, wobei die mathematische Theorie (so weit überhaupt hier von einer solchen die Rede sein kann) noch zu Resultaten gelangt, welche (einigermaßen) mit der Erfahrung übereinstimmen.

Fig. 227.

Hierzu sei AB die Erzeugungslinie einer der convexen krummen Flächen, welche den vordern Theil eines Körpers begrenzt, der sich in ruhender Luft nach der durch die Mitte C der Figur gehenden Richtung FA (wie der Pfeil angiebt) bewegt. Ferner sei DB der Durchschnitt der Ebene dieser Erzeugungslinie mit dem größten Querschnitt $= A$ dieses Körpers nach der Bewegungsrichtung, α der Neigungswinkel eines Elementes der Curve bei A gegen die Horizontale XX und φ eben dieser Winkel für ein beliebiges Element bei m, an einem Punkte der Curve AB, dessen rechtwinklige Coordinaten x und y sind, während sonst die früheren allgemeinen Bezeichnungen beibehalten werden mögen.

Nach Duchemin[2]) kann man das Differenzial $= dP$ des

[1]) Nach Duchemin's „Recherches Expérimentales etc." im Mémorial de l'Artillerie". Nr. V, Pag. 231. Deutsch von Schnuse, S. 118.

[2]) a. a. O., S. 314.

Druckes auf ein Element m des Vordertheiles darstellen durch:

$$dP = \frac{\Delta k_1}{\sin^2\alpha}\,\frac{V^2}{2g}\,.\,dF\,.\,\sin^3\varphi.$$

Da ferner, für Körper von entsprechend geringer Länge, angenommen werden kann, daß das Integral dieses Ausdruckes den Gesammtwiderstand des Körpers darstellt, indem, unter Voraussetzung von Körpern mit geringer Länge, das gehörig [1]) abgerundete Hintertheil von sehr geringem Einfluß ist, so erhält man für den Gesammtwiderstand:

$$\text{I.}\quad P = \frac{\Delta k_1}{\sin^2\alpha}\,.\,\frac{V^2}{2g}\int dF\,.\,\sin^3\varphi.$$

1) Ist der bewegte Körper eine Kugel vom Radius $= r$, so wird $\alpha = 90^\circ$, $r^2 = x^2 + y^2$, $dF = 2\pi y dy$ und $\sin\varphi = \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r}$, daher für diesen Fall aus I. wird:

$$\text{II.}\quad P = \Delta k_1\,\frac{V^2}{2g}\,.\,\frac{2\pi}{r^3}\int_0^r y dy\,(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{5}\,\Delta k_1\,.\,r^2\pi\,.\,\frac{V^2}{2g},$$

welcher Werth mit den Versuchen von Borda, Hutton und Vince, §. 187, S. 609, recht gut übereinstimmt.

2) Für einen Cylinder mit kreisförmiger Basis, welcher sich rechtwinklig zu seiner Achse bewegt, ist $dF = 2l\,.\,dy$, sobald l die Länge des Cylinders bezeichnet, alles Uebrige aber wie vorher, so daß erhalten wird:

$$P = \Delta k_1 l\,.\,\frac{V^2}{2g}\int_0^r \frac{(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{r^3}\,.\,dy\,^2) = \Delta k_1\,.\,\frac{V^2}{2g}\,.\,\tfrac{3}{8}\,r\pi l,$$

wenn $\pi = \frac{22}{7}$ angenommen wird:

$$P = \tfrac{66}{56}\,.\,\Delta k_1\,\frac{V^2}{2g}\,.\,rl,$$

oder weil $2rl = F =$ der Fläche des großen Querschnittes ist:

$$\text{III.}\quad P = \tfrac{33}{56}\,.\,\Delta k_1 F\,\frac{V^2}{2g} = 0{,}589\,.\,\Delta k_1 F\,.\,\frac{V^2}{2g}\,.$$

Nach §. 187, S. 609, stimmt dies Resultat ebenfalls recht gut mit einem Versuche von Borda, der

$$P = \tfrac{1634}{2864}\,.\,\Delta k_1 F\,.\,\frac{V^2}{2g} = 0{,}570\,.\,\Delta k_1 F\,\frac{V^2}{2g}\ \text{fand}\,^3).$$

---

[1]) Auch Borda schließt aus seinen Versuchen Mém. de l'Acad. des Sciences 1767, Pag. 498, daß für kleine Geschwindigkeiten die Vordertheile der Körper allein die Ursache des Widerstandes sind.

Es kann jedoch nicht genug hervorgehoben werden, daß dennoch allgemein der Gesammtwiderstand aus den beiden Widerständen an der Vorder- und Hinterfläche und aus der Reibung an den Seitenwänden des Körpers zusammengesetzt ist.

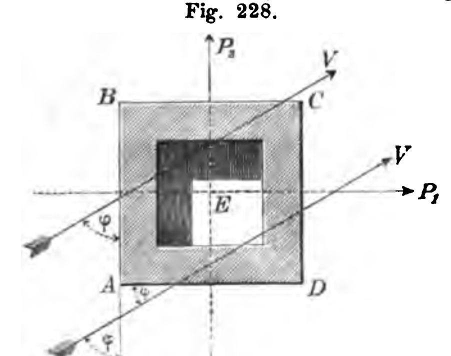
[2]) $\int \frac{(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy}{r^2} = -\left(\frac{y^3}{4r^3} - \frac{5y}{8r}\right)\sqrt{r^2 - y^2} + \tfrac{3}{8}\,r\,\text{arc}\left(\sin = \frac{y}{r}\right).$

[3]) Expérience sur la résistance par M. le Chevalier de Borda in den Mémoires de l'Académie des Sciences. Année 1763, Pag. 367.

Für noch andere derartige Rechnungen sind die unten bezeichneten Werke zu empfehlen[1]). Für Fälle, wovon der im nachstehenden Zusatze einer ist, kann man von diesen Resultaten auch Gebrauch machen, wenn der Körper $ABDF$ ruht und die Luft allein in Bewegung ist.

Zusatz 1. In Fällen, wo es sich um Vergleiche, weniger um absolute Werthe handelt, können vorstehende Endresultate unter Umständen eine zweckmäßige Verwendung finden.

Fig. 228.



Ein Fall dieser Art ist die Beantwortung der Doppelfrage:

1) Wie hat man einen Schornstein von quadratischem Querschnitte zu stellen, damit der Druck des vorherrschenden Windes der möglichst kleinste wird?

2) Wie verhalten sich die Windpressungen zu einander, welche, unter gleichen Verhältnissen und Umständen, gegen Schornsteine von quadratischem und von kreisförmigem Querschnitt ausgeübt werden?

Zur Beantwortung dieser beiden Fragen sei V die mittlere Windgeschwindigkeit, deren für den betreffenden Ort vorherrschende Richtung mit der Fläche $\overline{AB}$ den Winkel φ und mit der $\overline{AD}$ den Winkel ψ einschließt, wobei jedoch $\varphi + \psi = 90^0$ ist.

Hiernach ergiebt sich (zufolge §. 205 und 206), wenn P_1 und P_2 die Größen der betreffenden, gegen die Flächen AB und AD gerichteten Windpressungen sind:

$$P_1 = k_1 \Delta F \frac{V^2 \sin^2\varphi}{2g} \text{ und } P_2 = k_1 \Delta F \frac{V^2 \sin^2\psi}{2g}.$$

Der resultirende Druck $= R_\square$ ist daher:

$$R_\square = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = k_1 \Delta F \frac{V^2}{2g} \sqrt{\sin^4\varphi + \sin^4\varphi}, \text{ oder}$$

$$(1) \quad R_\square = k_1 \Delta F \frac{V^2}{2g} \sqrt{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi}.$$

Dieser Werth wird ein Kleinstes für $\varphi = 45^0$ und zwar ergiebt sich dafür:

$$(2) \quad R'_\square = 0{,}707 k_1 \Delta F \frac{V^2}{2g}.$$

Hieraus folgt zugleich, daß es am Vortheilhaftesten ist, den quadratischen Schornstein so zu stellen, daß die Diagonalen seiner Querschnitte in die Richtung des für den betreffenden Ort vorherrschenden Windes zu liegen kommen.

---

[1]) Duchemin a. a. O., §. 93, §. 98 etc. Scheffler, Principien der Hydrostatik und Hydraulik, Bd. 2, §. 175.

Bezeichnet man ferner mit a die Seite der überall als gleich anzunehmenden Schornsteinsquerschnitte und ist h die Höhe des Schornsteines, so folgt:

$$(3) \quad R'_{\square} = 0{,}707\, k_1 \Delta a h \frac{V^2}{2g}.$$

Nach III. des gegenwärtigen Paragraphen erfährt aber, unter sonst gleichen Umständen, ein Schornstein von überall gleichen Querschnitten, deren Radien $= r$ sind, einen Druck R_0, welcher ist:

$$(4) \quad R_0 = 0{,}589\, k_1 \Delta 2 r h \frac{V^2}{2g}.$$

Setzt man daher voraus, daß $a^2 = r^2\pi$, also

$$r = \frac{a}{\sqrt{\pi}} = 0{,}56419\, a$$

ist, so ergiebt sich aus (4) der Werth:

$$(5) \quad R_0 = 0{,}665\, k_1 \Delta a h \frac{V^2}{2g}.$$

Aus dem Vergleiche von (2) mit (5) folgt daher:

$$R'_{\square} : R_0 = 0{,}707 : 0{,}665 = 1{,}063 : 1{,}0.$$

Der Druck des Windes gegen den viereckigen (quadratischen) Schornstein ist sonach um mehr als 6 Procent größer, wie gegen den runden.

Anmerkung. Der Verfasser benutzt die Gelegenheit, noch auf zwei in mancher Beziehung ähnliche Beispiele aufmerksam zu machen, gegen deren Behandlung sich allerdings Mancherlei einwenden läßt. Es sind dies:

1) Schwammkrug, „Ueber den Einfluß der Winde auf den Zug von Schornsteinen, über die zerstörende Wirkung derselben, so wie über die möglichste Beseitigung der letzteren". Im Jahrbuche für den Berg- und Hüttenmann auf das Jahr 1854, S. 232—247. Herausgegeben von der Königl. Bergakademie zu Freiberg. — 2) A. Euler, „Des Cerfs Volans" (der Drache, das Spielwerk der Kinder, von welchem Franklin Gebrauch machte, um die Electricität der Gewitter zu beweisen). In der Histoire et Mémoires de l'Académie de Berlin. Année 1756, Tome XII, Pag. 322 ff.

§. 208.

Anemometer[1]).

Zum Messen der Geschwindigkeit bewegter elastischer Flüssigkeiten, vorzugsweise der bewegten atmosphärischen Luft, d. i. des Windes, benutzt man mechanische Instrumente, Anemometer[2])

[1]) Von ἄνεμος (anemos), der Wind.

[2]) Zum ausführlichen Studium der Geschichte der Anemometer sind folgende Schriften zu empfehlen: Munke in Gehler's physik. Wörterbuche, Artikel „Windmesser" im 10. Bande, Abschnitt 2, S. 2146. — Hülse, Maschinen-encyklopädie. Bd. 1, S. 214 und S. 223. — Schmid im Lehrbuche der Meteorologie (21. Bd. von Karsten's „Allgemeiner Encyklopädie der Physik"), S. 476. Leipzig 1860. — Carl, Repertorium für physik. Technik. (In fast allen Jahrgängen von 1864 bis zur Gegenwart.)

genannt, die sich, ihrer Anordnung nach, ähnlich wie die Tachometer oder Hydrometer §. 125 bis §. 127, hauptsächlich in zwei Classen[1]) bringen lassen.

Bei der einen Classe bewirkt der Wind die fortschreitende Bewegung fester oder tropfbar flüssiger Körper, während der Wind bei der anderen Classe die Umdrehung geeigneter Räder veranlaßt.

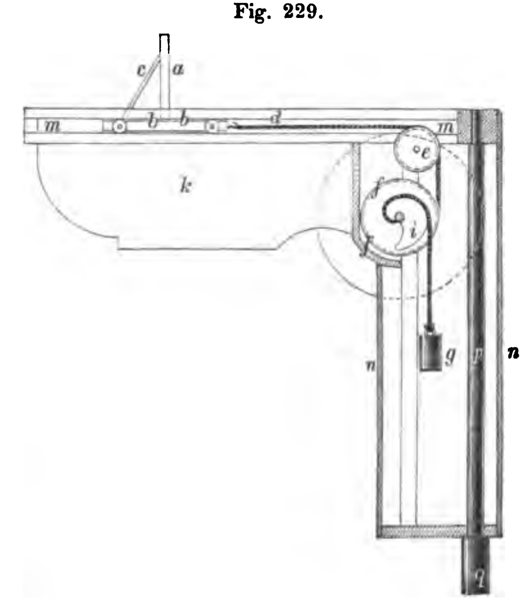
A. Instrumente erster Classe.

Nach Wissen des Verfassers ist es Leupold, der zuerst in seinem bekannten, im Jahre 1724 in Leipzig erschienenen Werke „Theatrum Machinarum Generale“, S. 110 ein Anemometer bekannt machte, das Beachtung verdiente.

Nachstehende Abbildung (Fig. 229) wird zum Verständniß desselben dienen.

Zur Aufnahme des Winddruckes benutzte man eine senkrecht gestellte hölzerne Tafel *a* von 6 Zoll Höhe und 12 Zoll Breite, die man auf einen kleinen Rollwagen *b* befestigt und dabei gehörig durch Streben *c* versteift hatte.

Fig. 229.



Der Wagen *b* war gezwungen, sich mit seinen Rädern zwischen parallelen horizontalen Bahnen *mm* zu bewegen, sobald man den Luftstrom gegen die Vorderfläche von *a* wirken ließ (dabei *c* als die Rückseite vorausgesetzt). Bei dieser Bewegung mußte der Wagen die Erhebung eines Gewichtes *g* bewirken, welches man

[1]) Forbes wollte Windkraft (Windgeschwindigkeit) und Windrichtung durch die Ablenkung von der Verticalen messen, welche freifallende Körper erfahren, wenn man auf dieselben seitlich Wind wirken läßt. Das Nähere der von Forbes getroffenen Anordnungen findet sich insbesondere bei Hülse a. a. O.

am freien Ende einer Schnur befestigt hatte. Eine zweite über eine Leitrolle *e* geschlagene Schnur *d* wurde einerseits am Wagen *b*, andererseits am Umfange einer kreisförmigen (festen) Rolle *ff* befestigt. Mit *f* auf derselben Welle hatte man ein spiralförmiges Bogenstück *i* angebracht und auf dessen Umfange das obere Ende des Seiles befestigt, welches man am unteren Ende mit dem Gewichte *g* belastete.

Aus dieser Anordnung erkennt man leicht, daß der Constructeur des Apparates (Leupold selbst) bemüht war, daß dem mit der Windstärke wachsenden statischen Momente, womit der gegen die Tafel *a* wirkende Wind eine Drehung der Kreisscheibe *f* zu bewirken strebte, ein entsprechendes veränderliches statisches Moment durch ein und dasselbe Gewicht *g* entgegengestellt wurde. Hierdurch wurde auch der Weg beschränkt, den sonst der Wagen *b* bei verschiedenen Windstärken hätte durchlaufen müssen.

Der ganze Apparat, mit der zur Richtungsbestimmung des Windes dienenden Windfahne *k*, drehte sich zugleich mit dem Gehäuse *nn* um die verticale Welle *pq* etc.

In der zwei Jahre später (1726 ebenfalls in Leipzig) erschienenen Fortsetzung des Leupold'schen Schauplatzes der Maschinen etc. findet sich unter dem Titel: „Pars III, Theatri Statici Universalis", S. 303 die Beschreibung und Tafel XXII, die Abbildung eines Registrirapparates zur steten Aufzeichnung von Winddruck und Windrichtung.

Leupold läßt hier einen kräftigen Papierstreifen von Cylindern auf- und abwickeln, wovon einer derselben durch ein Uhrwerk mit Pendel gleichförmig umgedreht wird. Schreibstifte notiren die gedachten Zustände und Wirkungen des Windes.

Besonderes Aufsehen erregten seiner Zeit die 1746 und 1775 von Bouguer angegebenen und in Anwendung gebrachten Instrumente[1]), um (namentlich für Schiffszwecke) insbesondere den Druck des Windes gegen ebene Flächen zu messen.

Bouguer versah die Fläche, gegen welche er den Wind wirken ließ, in der Mitte mit einer geraden vierkantigen Stange, welche in einem Cylinder gehörig horizontal geführt wurde. In diesem Cylinder befand sich eine kräftige Spiralfeder, deren eines Ende mit der gedachten verschiebbaren Stange in Verbindung gebracht war, während man das andere Federende, im Innern des Cylinders, unverrückt befestigt hatte. Ein größeres oder kleineres Eindringen der Druckflächenstange durch den Wind in den Federcylinder veranlaßte eine Zusammendrückung der Feder, woraus die Größe des Winddruckes mindestens annähernd zu berechnen war. Offenbar giebt Bouguer's Apparat (nach gewöhnlicher Anordnung) nur das jedesmalige Maximum des Winddruckes an.

Ein ganz eigenthümliches Anemometer wurde von einem

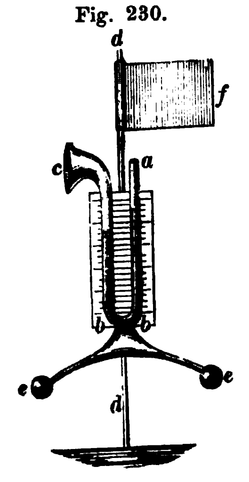
---

[1]) Traité du Navire (Paris 1746), S. 359, mit Abbildung auf Tafel VIII. unter dem Titel „Description d'un Instrument pour mesurer la force du Vent". Dann auch in dessen Werke „De la Manoeuvre des Vaisseaux" (Paris 1757), S. 151. Aus letzterer Quelle in Hülse's Maschinenencyklopädie, Bd. 1, S. 224.

Dr. Hales in Vorschlag gebracht, nachher von Lind ausgeführt und 1775 in den Phil. Transactions beschrieben[1]).

Nachstehende Abbildung (Fig. 230)[2]) wird zur Erläuterung dieses Anemometers dienen.

Fig. 230.



Zwei Glassöhren *ab* und *bc* stehen durch ein Knierohr in geeigneter Verbindung und bilden ein communicirendes Gefäß, welches man theilweise mit Quecksilber füllt. Wird das horizontal umgebogene und trichterförmig erweiterte Ende *c* dem Winde dargeboten, so erhellt ohne Weiteres, daß das Quecksilber in dem Schenkel *ab* höher als in dem Schenkel *bc* stehen und aus der Differenz dieser Höhen der correspondirende Winddruck zu berechnen sein wird[3]).

Die zugehörige Windfahne *f* ist an einer Stange *dd* angebracht, woran auch die heberförmige Glasröhre *abc* befestigt ist und die sich um ihren Unterzapfen gehörig leicht drehen kann. Die am unteren Ende des Gefäßes *abc* angebrachten Kugeln *ee* dienen zur Herstellung des erforderlichen Gleichgewichtes.

Ein großer Uebelstand des Lind'schen Anemometers ist der, daß die Höhenunterschiede der gehobenen Flüssigkeitssäulen selbst für große Geschwindigkeiten verhältnißmäßig gering sind. Ein gewisser Robinson[4]) gab sich Mühe, das Lind'sche Instrument in gedachter Hinsicht zu verbessern, indeß scheint dasselbe dem ungeachtet eine weite Verbreitung nicht gefunden zu haben.

Großen Beifall und vielfache Verwendung fand dagegen das Anemometer mit Registrirapparat (Anemograph), welches der gelehrte Birminghamer Glasfabrikbesitzer A. Follet Osler (Mitglied der Königl. Englischen Gesellschaft der Wissenschaften) im Jahre 1839 zur Ausführung brachte[5]).

Man kann Osler's Instrument als eine Combination und Vervollkommnung der Anemometer von Leupold und Bouguer betrachten. Osler hatte beim Aufzeichnen der Windrichtung eine Zahnstange wirksam gemacht und das Gewicht, wodurch die vom Winde getroffene ebene Fläche zurückgezogen wurde, durch ein paar Stahlfedern ersetzt.

Der Verfasser fand ein vom Engländer Browning etwas verändertes Anemometer bei einem Besuche der Greenwicher Stern-

---

[1]) Auch über Lind's Anemometer berichtet am Ausführlichsten Hülse a. a. O., S. 228.

[2]) Die Abbildung wurde dem Schmid'schen Werke (a. a. O., S. 490) entnommen.

[3]) Betreffende mathematische Formeln finden sich bei Hülse etc.

[4]) Hülse a. a. O., S. 230, Nr. 6.

[5]) Description of a self-registering Anemometer and Rain-Gauge. British Association 7. Report. Birmingham 1839. 4.

warte (am 8. Septbr. 1875) daselbst in Thätigkeit. Specielles hierüber enthalten die unten angegebenen Quellen[1]).

B. Instrumente zweiter Classe.

Es dürfte kaum zu bezweifeln sein, daß die radförmigen Anemometer die allerältesten sind, da ihre Anordnung offenbar den gewiß über 1000 Jahre alten Flügelrädern der Windmühlen mit (fast) horizontaler oder verticaler Achse entnommen ist.

Deshalb darf es nicht auffallen, daß auch schon Leupold derartige Anemometer von Wolff in Halle u. A. bespricht, solche mit horizontaler Achse eigener Construction empfiehlt[2]) und insbesondere eins mit verticaler Achse rühmt[3]), welches seiner Zeit im Dingler'schen Hause zu Dresden aufgestellt und gangbar gewesen sein soll[4]). Die Stärke des Windes wurde hier an Ziffern und Worten einer geeigneten kreisförmigen Scheibe abgelesen.

In betreffenden französischen und selbst deutschen[5]) Schriften wird viel Redens von Anemometern mit Registrirapparat gemacht, dessen Erfinder der Franzose Ons-en-Bray ist und wovon sich Abbildungen und Beschreibung in den Pariser Mémoires de l'Académie Royale des Sciences von 1734, S. 123, vorfinden[6]). Zur Richtungsbestimmung dient hier eine Windfahne, zur Ermittlung der Stärke (und Geschwindigkeit) des Windes aber ein horizontales Windrad. Betreffende Angaben werden auf zwei getrennte Papierstreifen notirt, deren zugehörige Walzen eine gute Pendeluhr in Umdrehung setzt. Ein besonderer Cylinder ist mit 32 Stiften (entsprechend den 32 Strichen der Windrose) ausgestattet, deren Spur eine Spirallinie bildet und wovon man Eindrücke in besonders hierzu bereitetes Papier macht.

Der Verfasser sah wiederholt das gut ausgeführte Exemplar dieses Anemometers, welches im Pariser Conservatorium für Künste und Gewerbe (Rue St. Martin) aufgestellt ist, dessen complicirte Anordnung (namentlich viel Räderwerk) sich jedoch keineswegs zur Nachbildung empfiehlt.

In Deutschland hat ein Anemometer die meiste Anwendung

---

[1]) „Results of the Magnetical and Meteorological Observations made at the Royal Observatory, Greenwich", 1866, S. XLV unter der Ueberschrift: „Osler's Anemometer". Abbildung und Beschreibung des Browning'schen Anemometers hat der Verfasser in den Mittheilungen des Hannoverschen Gewerbevereins, Jahrg. 1875, S. 284 geliefert.

[2]) Leupold's Windmaschine in seinem Theatr. Mach. Generale. Leipzig 1724, S. 111 und in dessen Theatrum Aërostaticum. Leipzig 1726, S. 302. Wolff, seiner Zeit Professor der Mathematik in Halle, scheint diese Windrädchen zuerst als Anemometer benutzt zu haben.

[3]) Leupold nennt diesen Apparat „Gärthner's Artificium".

[4]) Ebendaselbst (an beiden Stellen mit Abbildungen).

[5]) Gehler's Physik. Wörterbuch. Bd. 10, 2. Abth. S. 2164.

[6]) Die Ueberschrift der Abhandlung des Ons-en-Bray, a. a. O., lautet folgendermaßen: „Anémomètre qui marque de lui-même sur le papier, non seulement des Vents qu'il a fait pendant le 24 heures et à quelle heure chacun a commencé et fini, mais aussi leurs différentes vitesses ou forces relatives".

gefunden, welches man gewöhnlich als eine Erfindung des (einstmaligen) Hamburger Wasserbaudirectors Woltmann bezeichnet, obwohl dasselbe nur als eine mechanisch vollkommenere Construction des erwähnten Leupold'schen, richtiger Wolff'schen Instrumentes mit verticalem Windrade ist[1]). Merkwürdiger Weise nehmen auch die Engländer die Erfindung dieses Woltmann'schen Flügels für sich in Anspruch. Als ganz zweifellos wird diese Behauptung im 22. Bande der Transactions of the Royal Irish Academy (1849), Pag. 157 ausgesprochen und die Erfindung dem allerdings auch in anderen technischen Kreisen als Schriftsteller bekannten Engländer Edgeworth[2]) zugeschrieben, der solche 1783 gemacht haben soll. Namentlich wird in gedachter englischer Quelle großer Werth auf den von Edgeworth in Anwendung gebrachten sinnreichen Zählapparat gelegt, dessen Anordnung darin besteht, daß von zwei auf derselben Welle steckenden Cylinderrädern das eine mit n, das andere mit $n + 1$ Zähnen ausgestattet ist und beide in ein und dieselbe endlose Schraube eingreifen, welche man auf der Windradwelle befestigt hat. Aber auch dieser allerdings sinnreiche Zählmechanismus ist alt, indem er gleichfalls schon von Leupold (1739) in seinem Theatri Machinarum Supplementum, S. 17, beschrieben und daselbst Tafel IV durch Abbildung erläutert wird.

Am 11. Novbr. 1837 zeigte der Bergwerksdirector Combes[3]) der französischen Akademie der Wissenschaften ein äußerst sorgfältig gearbeitetes „Windflügel-Anemometer" vor, welches derselbe mit großem Erfolge zum Messen der Geschwindigkeit von Luftströmungen in den Stollen, Gallerien etc. der Bergwerke in Anwendung gebracht hatte[4]).

Um die Bewegung des Windrädchens sofort unterbrechen, die Flügel zum Stillstande bringen zu können, hatte Combes eine Klinke angeordnet, die durch einen eigenthümlichen Drahtzug zum Einfallen zwischen die Arme des Windrädchens veranlaßt werden konnte.

Fast in derselben Zeit hatte sich auch Whewell in England um einen Anemographen bemüht, über welchen er 1837 der Versammlung britischer Naturforscher zu Liverpool Bericht erstattete. Die nachher folgende Ausführung ließ eine Windfahne nebst einem Windrädchen erkennen, die beide auf derselben horizontalen Platte

---

[1]) Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels. Hamburg 1790.

[2]) Allgemeine Maschinenlehre, Bd. 3, S. 81, Note.

[3]) Combes in den Annales des Mines, Troisième Série, Tome XIII (1838) unter der Ueberschrift: „Mémoire sur un nouvel anémomètre, propre au jaugeage des courants d'air qui circulent dans les galeries de mines, les tuyaux des calorifères, les cheminées etc."

[4]) Stanley's in London Bergwerks-Anemometer mit Zeiger und Registrirapparat findet sich ebenfalls im 1. Bande (2. Auflage) der Allgem. Maschinenlehre des Verfassers beschrieben und abgebildet. Biram's Anemometer hat zu viel Flügel. Man sehe hierüber die Mittheilungen des Hannoverschen Gewerbevereins, Jahrg. 1862, S. 24.

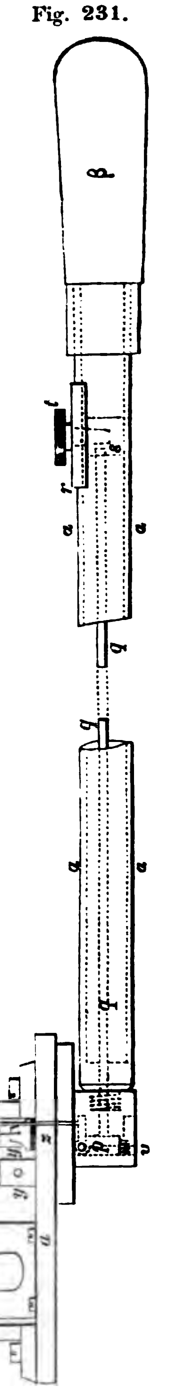
angebracht, unter sich ein rahmenförmiges Gehänge trugen, welches mit der Windfahne zugleich um einen festen (unbeweglichen) Cylinder drehbar gemacht war. Auf dem Mantel dieses Cylinders hatte man 16 sichtbare Verticallinien gezogen, welche 4 Hauptgegenden und 12 Nebengegenden des Compasses entsprachen. Durch mehrere Paare zusammengreifender endloser Schrauben und zugehöriger Räder wurde das Herabsinken eines Gewichtes mit Schreibstift veranlaßt, dessen horizontale Linien auf dem vorgedachten unbeweglichen Cylinder die Richtung des Windes angaben, während aus den Längen der verticalen Linien die Geschwindigkeit des Windes abzuleiten war. Näheres über Whewell's Anemographen ist aus den Beschreibungen (und besonders notirten Schriften) dieses Instrumentes im ersten Bande meiner Allgem. Maschinenlehre, S. 105 (zweite Auflage) zu entnehmen.

Mehr oder weniger etwas abgeänderte Anemometer, ursprünglich Combes'sche Construction, lieferten nachher Linke in Freiberg, Neumann, Clair und Bianchi in Paris. Clair's vortrefflich gearbeiteter und mit schraubenförmigen, aus Aluminmetall gearbeiteten Flügeln ausgestattet, findet sich abgebildet und beschrieben im 1. Bande (2. Auflage), S. 136 der Allgem. Maschinenlehre des Verfassers, während Bianchi's Flügel mit Zählapparat (nach Art der Hubzähler) verbunden in dem unten notirten Werke[1]) zu finden ist. Von Hardy's in Paris neuestem, für die hannoversche technische Hochschule gelieferten, Flügel sind Fig. 231 und 232 betreffende Abbildungen.

Hierbei ist die sichere Art des Aus- und Einrückens des Zählwerkes beim Gebrauche des Flügels als Eigenthümlichkeit hervorzuheben.

In Fig. 231 bedürfen Gestell a, sechsarmiger Flügel d (jeder Flügel 91^{mm} äußeren und 26^{mm} inneren Durchmesser), endlose Schraube e mit zugehörigen Zahnrädern ef[2]), die beide in g gelagert sind,

Fig. 231.



[1]) Péclet, Traité de la Chaleur. Quatrième Édition (von Hudelo in Paris besorgt), T. I, Pag. 262.

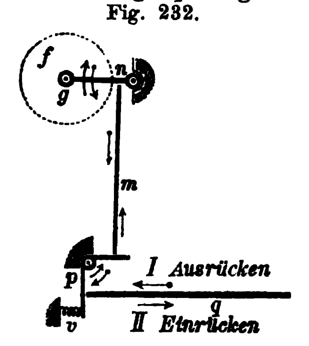
[2]) Zwei Räder gleichzeitig in dieselbe Schraube e fassend, ganz wie beim Clair-schen Flügel, worüber ausführlich in der bereits citirten Allgem. Maschinenlehre, Bd. I, S. 128 (2. Auflage), des Verfassers gehandelt wird.

keiner besonderen Erörterung[1]), weshalb wir uns ohne Weiteres zu dem eigenthümlichen Mechanismus des Ein- und Ausrückens wenden.

Statt der zum Heben und Senken des einarmigen Hebels *gn*, beziehungsweise zum Ein- und Ausrücken von *ff* mit *e*, sonst (bei Combes, Neumann, Clair etc.) gebräuchlichen Doppelschnüre oder Drähte, hat Hardy eine steife Schubstange *q* angeordnet, die sich in der Hülse αα, mit dem zugehörigen Handgriffe β, frei bewegen, d. h. hin und her geschoben werden kann.

Um während des Haltens des Instrumentes mit der einen Hand am Griffe β, mit der andern Hand auf die Schubstange *q* von Außen wirken zu können, ist ein mit Knopf *t* versehener Schieber *r* vorhanden, den man nach unten hin mit einem Stäbchen *s* versehen hat, wodurch von *t* aus ein Druck gegen das hintere Ende der Schubstange *q* ausgeübt werden kann.

Fig. 232.



Mit Zuziehung des besonderen, in Fig. 232 gezeichneten Diagrammes, erhellt ohne Weiteres sowohl Anordnung wie Wirksamkeit des betreffenden Mechanismus, sobald man einen Winkelhebel beachtet, dessen Drehpunkt *p* ist und dessen verticaler Arm stets von einer kleinen Spiralfeder *v* nach rechts gedrückt wird.

Demnach ist zum Ausrücken des Zählwerkes *fe* nur erforderlich, die Zugstange *q* nach links zu drücken, d. h. diese Stange in der Richtung des Pfeiles *I* zu verschieben, wodurch die Spiralfeder *v* zusammengedrückt und einer Schubstange *m* das Niedersinken möglich gemacht wird, die jedoch weder mit *p* noch mit *gn* verbunden ist.

Dem Niedersinken von *m* folgt aber sofort der Niedergang von *fgn*, da der Schwerpunkt dieser Zusammenstellung offenbar zwischen *n* und *g* liegt, d. h. die Zahnräder *ff* rücken aus den Gewinden der endlosen Schraube *e*. Das Einrücken des Zählwerkes *fe* erfolgt beim Zurückziehen der Stange *q*, wodurch die Feder *v* frei und dadurch der Winkelhebel *p* so gedreht wird, daß sein horizontaler Arm aufwärts geht, die Schubstange *m* erhebt und den Arm *ng* ebenfalls zu einer nach oben hin gerichteten Drehung veranlaßt, so daß schließlich die Zähne von *ff* zwischen die Gänge der endlosen Schraube *e* fassen. Ein Zeiger *h* läuft beständig mit *f* herum, während ein Stift *i* den correspondirenden festen Zeiger bildet.

Aehnlich wie bei dem Amsler'schen Flügel, zum Ermitteln der Geschwindigkeiten in Flußbetten oder Canälen strömenden Wassers, Fig. 156 und 156ª (S. 374—377), kann man auch bei Hardy's

---

[1]) Durch *h* ist ein mitgehender, durch *i* ein fester Zeiger notirt, so wie *n* der Drehpunkt für den einarmigen Hebel *gn* ist.

Anemometer je 100 Umläufe eines der beiden Räder *f* durch ein Glockensignal unter Vermittlung eines electrischen Stromes markiren. Hierzu befindet sich an der ebenen Fläche von *f* ein Stift *x*, der zur rechten Zeit den Contact mit einer Metallfeder *w* bildet, während geeignete Klemmen *yy* zur Aufnahme electrischer Leitungsdrähte vorhanden sind.

Ein (nach General Morin's Angaben) [1]) ebenfalls von Hardy ausgeführtes Anemometer mit electromagnetischem Zählwerke für Ventilationszwecke ist in nachstehenden Figuren 234, 235 und 236 dargestellt, die jedoch nicht den unten notirten Quellen entnommen, sondern nach einem von Hardy (1876) für die technische Hochschule in Hannover bezogenen, vortrefflich gearbeiteten Exemplare gezeichnet sind.

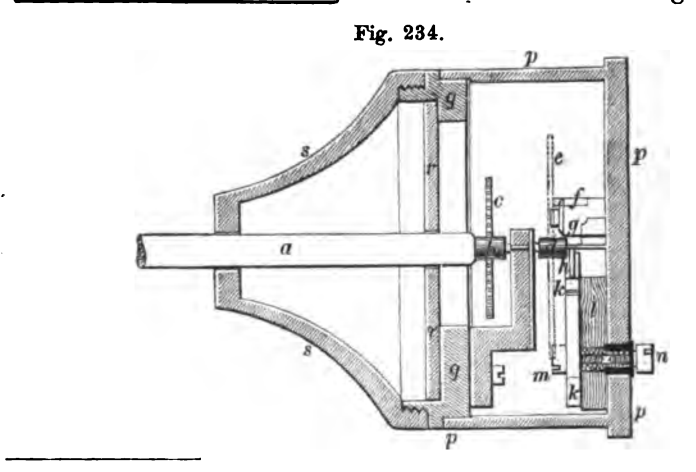
Jeder der 6 aus Aluminiummetall gearbeiteten Flügel des Windrades, Fig. 233, hat 210^{mm} äußeren Durchmesser, während deren innere Kanten von der Drehachse *a* um 45^{mm} abstehen.

Fig. 233.

Wie besonders aus Fig. 234 und 235 erhellt, sitzt an dem einen Ende der Welle *a*, welches in eine Büchse *ps* hineinreicht, ein Getriebe *b* mit 12 Zähnen, welches mit dem Rade *c* (72 Zähne) im Eingriffe steht. Mit *c* auf derselben Welle ist ein Trieb *d* (6 Zähne) befestigt, dessen Zähne in die des Rades *e* (mit 100 Zähnen) fassen.

Aus der Uebersetzungszahl

Fig. 234.



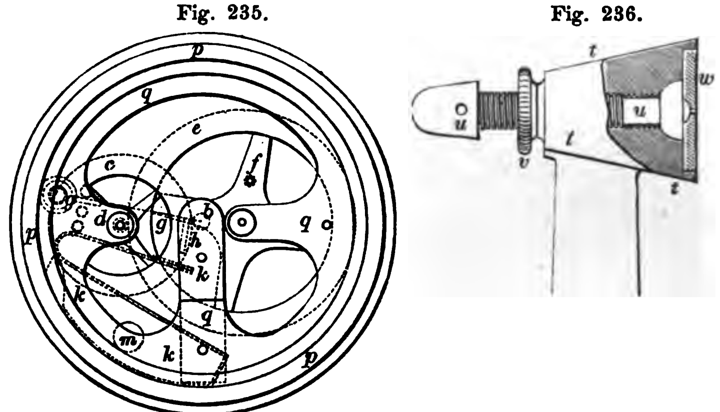
[1]) Anémomètre totaliseur à compteur électrique. Annales du Conservatoire etc. Tome V (1864), Pag. 341 und hieraus in Dingler's Polytechn. Journal, Bd. 177 (1865), S. 200.

$$\frac{c}{b} \cdot \frac{e}{d} = \frac{72}{12} \cdot \frac{100}{6} = 100,$$

ergiebt sich ohne Weiteres, daß bei je 100 Umdrehungen der Welle a ein an der Ebene des Rades e befestigter Stift f gegen eine Feder g drückt, die durch Vermittlung des Hammers h mit einem Bügel k (Fig. 235) in Verbindung tritt.

Das andere Ende der Welle a ist in der Messingscheibe w der Büchse t (Fig. 236) gelagert. Durch geeignetes Stellen der

Fig. 235. Fig. 236.

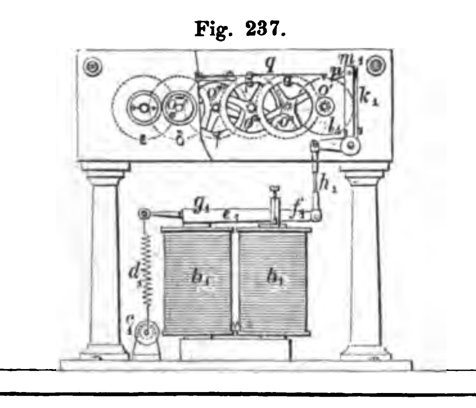


Druckschraube u und der Contremutter v wird die Welle a in ihrer Lagerung justirt und fixirt.

Der erwähnte Bügel k ist mittelst einer Schraube m auf einer Unterlage l aus Hartgummi befestigt und wird überhaupt durch diese Anordnung der Contact für einen electrischen Strom hergestellt, dessen Anschlüsse bei n und x (Fig. 233) mittelst Klemmschrauben erfolgen.

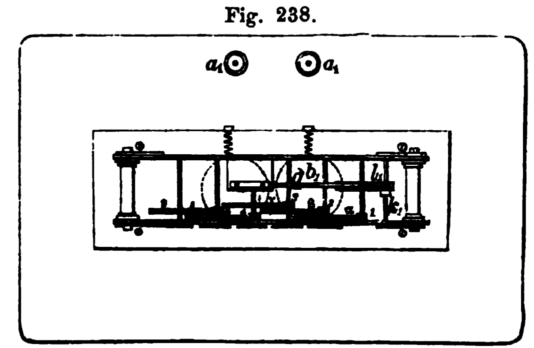
In den electrischen Strom ist auch zugleich der Zählapparat (Figuren 237 und 238) durch die Klemmen $a_1 a_1$ eingeschaltet.

Fig. 237.



Der electrische Strom durchläuft die Spiralen $b_1 b_1$ und bewirkt bei Herstellung des im Anemometer erzeugten Contactes ein Anziehen des Ankers e_1 bei f_1 nach je 100 Umdrehungen des Flügels. Bei dieser Anziehung wird die Zugspannung einer Feder d_1 überwunden, welche in geeigneter Weise durch Drehung einer Spindel c_1 angespannt werden kann.

Fig. 238.



Dem Niedergange des Ankers e_1 folgt die Zugstange h_1 und diese bewirkt, in bekannter Weise, mittelst eines Klinkwerkes $m_1\ n_1\ k_1$ den Schub des ersten Zählrades.

Die Anordnung der übrigen Zählräder α, β, γ, δ . . . . und deren Verbindung mit dem ersten Zählrade l_1 bedürfen selbstverständlich keiner Erörterung.

Eine besondere Gattung eigenthümlicher Windräder sind die des Directors des meteorologischen Observatoriums zu Armagh (Irland), des F. R. Robinson, ehrenwerthes Mitglied der englischen Hochkirche. Diese Instrumente wurden zuerst von dem genannten Herrn in den Transactions der irländischen Akademie der Wissenschaften, Jahrg. 1849 (Vol. XXII) besprochen und durch Abbildungen erläutert [1]).

Der Verfasser gegenwärtigen Buches hat aus der gedachten Quelle Beschreibung und Abbildung des Robinson'schen Instrumentes entnommen und in den Mittheilungen des Hannoverschen Gewerbevereins [2]) veröffentlicht.

Die nachstehende Fig. 239 zeigt ein Robinson'sches Anemometer und zwar nach der Ausführung des Mechanikers Schadewell in Dresden, mit electrischem Zählapparate, ebenfalls für die technische Hochschule zu Hannover angefertigt.

Man erkennt aus der Figur sehr leicht, daß *dd* 4 halbe Hohlkugeln sind, welche an je um 90 Grad von einander entfernt abstehenden Armkreuzen, in gleicher Entfernung von der Umdrehachse *aa* so befestigt sind, daß die Höhlungen (concaven Flächen) jeder Kugel in gleicher Weise derselben Richtung der Kreisperipherie zugekehrt sind.

Bekanntlich wirken (S. 575, Fig. 201) Flüssigkeitsstrahlen gegen die Höhlungen einer Halbkugel mit viel größerer Gewalt wie gegen die erhabene (convexe) Seite derselben Kugel (Fig. 199 und 203), womit auch zugleich der große Vortheil erreicht ist, daß, woher auch immer der Wind wehen mag, die Umdrehrichtung des Halbkugelkreuzes stets dieselbe bleibt.

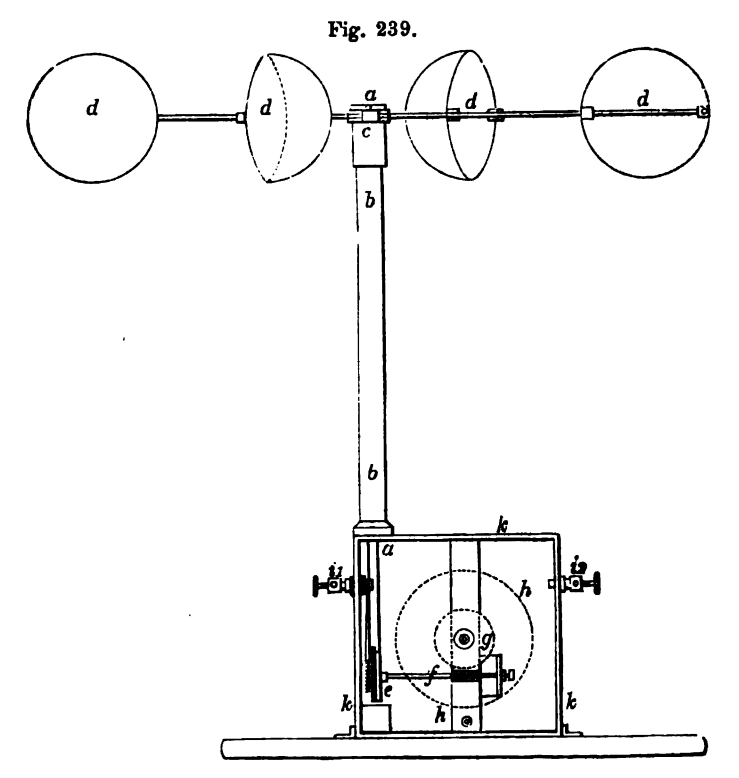
Bei dem Schadewell'schen Instrumente hat jede der vorhan-

---

[1]) Die betreffende Abhandlung trägt nachstehende Ueberschrift: „Description of an improved Anemometer for registering the Direction of the Wind, and the pace which it traverses in given intervals of Time".

[2]) Jahrg. 1875, S. 239.

Fig. 239.



denen aus Messingblech gearbeiteten Hohlkugeln einen Durchmesser von 85mm, während sich diese in 194mm Abstand von der verticalen Drehachse (Welle) *a* befinden. Letztere wird von einer hohlen Säule *bb* umschlossen, die nach unten hin in einen Kasten *kk* endet und daselbst ihr Spurlager findet, während ein geeignetes Halslager oben bei *c* angebracht ist.

Am unteren Ende von *a* befindet sich eine endlose Schraube, in deren Gewinde ein mit 100 Zähnen versehenes Rad *e* greift, welches auf der Welle *f* befestigt ist.

Wie aus der Abbildung erhellt, ist die Welle *f* mit einer endlosen Schraube versehen, deren Gewinde g l e i c h z e i t i g mit den Zähnen zweier Räder *g* im Eingriffe steht. Von diesen beiden Rädern hat das eine 100, das andere 101 Zähne, so daß bei je 100 Umdrehungen des einen Rades das andere um 1 Zahn zurückbleibt. Wie durch diese Anordnung eine verhältnißmäßig große Anzahl Umläufe registrirt und auf einer geeigneten Theilscheibe *h* mittelst Zeiger markirt werden kann, darf wohl hier als bekannt vorausgesetzt werden[1]).

[1]) Man sehe hierzu Note 2, S. 718.

Bei i_1 und i_2 sind auch hier Klemmen vorhanden, um die Leitungsdrähte einer electrischen Batterie anbringen zu können. Nach je einmaliger Umdrehung des Rades e (100 Touren der Welle a) wird durch Herstellung eines Contactes zwischen einem Stifte am Rade e und einer Feder, welche durch die Klemmschraube i_1 festgehalten wird, der Strom geschlossen und ein geeignetes Zeichen gegeben.

Daß sich das Robinson'sche Anemometer weniger für unmittelbar technische Zwecke, sondern vorzugsweise für meteorologische Observatorien und Sternwarten eignet, bedarf wohl kaum der Bemerkung.

Ein derartiges mechanisches Instrument (zugleich Anemograph), von Adie in London, zuerst für das Observatorium in Kew construirt, hat der Mechaniker Landsberg in Hannover für die technische Hochschule daselbst ausgeführt. Hierbei wird zugleich die Richtungsveränderung der Winde durch geeignete Windflügel (nach Art der gewöhnlichen Windräder construirt) registrirt. Beschreibung und Abbildung dieses Instrumentes finden sich in der Allgemeinen Maschinenlehre des Verfassers, Bd. I (Zweite Auflage), S. 107 [1]).

Zu bedauern ist, daß weder das Anemometer von Robinson, noch das von Schadewell, noch der Adie'sche Anemograph die Windgeschwindigkeit direct, sondern nur den Winddruck notiren, woraus allerdings die Windgeschwindigkeit abgeleitet werden kann [2]).

Anlangend die Anemometer, welche mehr oder weniger dem Woltmann'schen Flügel nachgebildet sind, benutzt man zur Berechnung der Windgeschwindigkeit v aus der secundlichen Umdrehzahl $= u$ am besten die unter II, S. 379 angegebene und S. 601 theoretisch entwickelte Formel

$$v = \alpha + \beta u.$$

Zur Ermittlung der Erfahrungscoefficienten α und β verwendet man am besten einen geeigneten Apparat, der hauptsächlich aus einer senkrechten Welle mit einem gehörig langen horizontalen Arme ($2^m,0$ — $2^m,5$ Radius) besteht, an dessen äußerstem Ende der betreffende Flügel befestigt werden kann, eine Anordnung, die im Allgemeinen mit den Apparaten für ähnliche Zwecke von Hutton und Borda übereinstimmt und auf welche wir in einem später folgenden Paragraphen zurückkommen werden, der die Ueberschrift trägt: „Geschichtliche Notizen über Druck und Widerstand atmosphärischer Luft“.

Die betreffenden Versuche können mit großer Genauigkeit angestellt werden, namentlich, wenn man die Arretirung des Zählwerkes durch einen Electromagneten ausführt, wie dies unter Andern auch bei dem Apparate der technischen Hochschule zu Hannover

[1]) Aehnliche mechanische Instrumente verschiedener meteorologischen Stationen und Sternwarten finden sich beschrieben und abgebildet in Carl's Repertorium für Experimental-Physik, Jahrg. 1867—1874 etc.

[2]) Man sehe deshalb die Mittheilungen des Hannoverschen Gewerbevereins, Jahrg. 1863, S. 109 und 111 unter der Ueberschrift: „Ueber Anemographen und insbesondere den von Adie in London“.

der Fall ist, wo diese Arretirungsvorrichtung nach den Angaben des Herrn Professors v. Quintus-Icilius ausgeführt wurde[1]).

Beispielsweise wurden zur Controle für das Flügelanemometer von Neumann in Paris, der die Formel für v bei seinem Instrumente für die Hannoversche Hochschule (für Metermaaße) zu

$$v = 0{,}120 + 0{,}180\,u$$

bestimmt hatte, aus 93 Versuchen des Herrn Professors v. Quintus-Icilius[2]) mit demselben Instrumente, nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet:

$$v = 0{,}11688 + 0{,}17909\,u \pm (0{,}01232 + 0{,}014945\,u),$$

ein Werth, der fast genau mit den von Neumann gefundenen übereinstimmt.

Daß auch bei diesen Anemometern die doppelte Krümmung der Flügelflächen, ähnlich wie bei den Flügeln der Windmühlen, von Vortheil ist, d. h. diese Instrumente sodann empfindlicher sind, dürfte aus der Geschwindigkeitsformel hervorgehen, welche für ein von Clair in Paris bezogenes Anemometer[3]) ermittelt wurde, das mit solchen Flügeln ausgestattet war. Man fand (für Metermaaß):

$$v = 0{,}056 + 0{,}160\,u,$$

also weit geringere Coefficienten, wie bei dem Neumann'schen Instrumente mit nur ebenen, schief gestellten Windflügeln, bei sonst gleichen Dimensionen und derselben Ausführung.

§. 209.

Die ersten Elemente der Ballistik[4]).

Der Vollständigkeit wegen und um einen eben so interessanten wie schwierigen Gegenstand nicht ganz unberücksichtigt zu lassen, behandeln wir hier die in der Ueberschrift bezeichnete Frage für den allereinfachsten Fall, d. h. unter der Voraussetzung, daß auch bei Körpern, welche sich mit sehr großer Geschwindigkeit in der atmosphärischen Luft bewegen (abgeschossen oder geworfen werden), der verursachte Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist[5]).

---

[1]) Mittheilungen des Hannoverschen Gewerbevereins, Jahrg. 1862, S. 265.

[2]) Ebendaselbst, S. 269.

[3]) Clair's Anemometer findet sich beschrieben und abgebildet in den Mittheilungen des Hannoverschen Gewerbevereins, Jahrg. 1875, S. 237 und in der Allgemeinen Maschinenlehre des Verfassers, Bd. I (Zweite Auflage), S. 136.

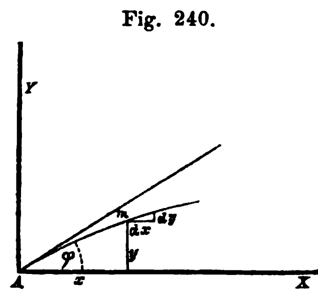
[4]) Vom griechischen Worte βάλλειν (ballein) werfen.

[5]) Otto (Hülfsmittel für ballistische Rechnungen. Berlin 1855) hat den verschiedenen Ausdrücken zur Darstellung des Luftwiderstandes bei Geschützkugeln eine ganz besondere Betrachtung gewidmet, aus welcher im Allgemeinen folgt, daß es für die meisten practischen Fälle ziemlich gleichgültig ist, welches der verschiedenen Luftwiderstandsgesetze man wählt. Eine ganz vorzügliche Arbeit hat später Otto (als Königl. Preußischer Generalmajor) im 11. Jahrgange (1866) der Schlömilch'schen Zeitschrift für Mathematik und

Es bezeichne hierzu G die widerstehende Acceleration, welche die Luft einem Projectile entgegensetzt, φ den Elevationswinkel, Fig. 240, und x, y die Coordinaten desjenigen Punktes m der Trajectorie, in welchem sich der geworfene Körper am Ende einer Zeit t befindet.

Ferner sei s der Bogen Am, den der Schwerpunkt des Körpers am Ende der Zeit t beschrieben hat, so wie $v = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung im Punkte m der Bahn. Von der gleichzeitigen Drehung des Körpers wird abgesehen[1]), wonach angenommen werden kann, daß die Bewegung in einer Verticalebene erfolgt, die durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit $= V$ gelegt ist. Hiernach folgt: $G = nv^2$, wo n einen aus der untenstehenden Note[2]) zu entnehmenden constanten Werth bezeichnet.

Fig. 240.



Für die Acceleration, beziehungsweise parallel der Achsen UX

Physik (S. 515) unter der Ueberschrift geliefert: „Ein Beitrag zur Ermittlung des Luftwiderstandsgesetzes". Hierin zeigt Otto, daß nicht das quadratische (Newton'sche Gesetz), sondern das cubische, also nv^3 das empfehlenswertheste Gesetz für den Luftwiderstand der Geschosse zur Rechnungsbasis zu nehmen sei. Für die Zwecke seines Buches hält es der Verfasser (mit andern Fachautoren) für angemessener, das quadratische Gesetz beizubehalten.

[1]) Wie man die (in der Wirklichkeit stets vorhandene) Umdrehbewegung der Projectile in Rechnung zieht, zeigt u. A. recht einfach Otto a. a. O. S. 27. Ausführlicher in den Abhandlungen Poisson's und Didion's, welche hier unter der Rubrik „Literatur der Ballistik" am Ende des §. 211, S. 731 verzeichnet sind.

[2]) Ist das Projectil eine Kugel und bezeichnet d den Durchmesser und q das Gewicht der Cubikeinheit derselben, so ist

$$G = \frac{\text{Widerstand}}{\text{Masse}} = \frac{k'\Delta \frac{d^2\pi}{4} \frac{v^2}{2g}}{\frac{1}{6} q \frac{d^3\pi}{g}} = \frac{3}{4} \frac{k'\Delta}{qd} \cdot v^2 = nv^2,$$

wobei k' einen Coefficienten bezeichnet, der aus folgender Tabelle entnommen werden kann, die Poncelet (Introduction etc., Nr. 428) aus Versuchen von Robins und Hutton berechnete:

v	1^m	3^m	5^m	10^m	25^m	50^m	100^m	200^m	300^m	400^m	500^m	600^m
k'	0,59	0,61	0,63	0,65	0,67	0,69	0,71	0,77	0,88	0,99	1,04	1,01

Hiernach ergiebt sich z. B. der Widerstand $= W$ einer mit 400 Meter Anfangsgeschwindigkeit abgeschossenen eisernen Kugel von 12,01 Kilogramm Gewicht (24 Pfünder), deren Durchmesser $0^m,1485$ beträgt, da für diesen Fall $k' = 1$, $\Delta = 1,3$ gesetzt werden kann, zu:

$$W = \Delta \frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{v^2}{2g} = 1,3 \,.\, (0,1485) \,.\, 0,785 \,.\, 0,021 \,.\, (400)^2 = 177 \text{ Kilogr.}$$

und UY (wovon letztere in der Richtung der Schwerkraft liegen mag), Fig. 240, ergiebt sich aber:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - G \cos \alpha \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = - g - G \sin \alpha,$$

wo α der Winkel ist, welcher die Tangente am Punkte m mit dem Horizonte einschließt.

Führt man in letztere beiden Gleichungen $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$ und $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$ ein, so folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - nv^2 \frac{dx}{ds};\ \frac{d^2y}{dt^2} = - g - nv^2 \frac{dy}{ds}, \text{ oder}$$

$$(1)\ \frac{d^2x}{dt^2} = - n \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \frac{dx}{ds};\quad (2)\ \frac{d^2y}{dt^2} = - g - n \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dy}{ds}.$$

Zuerst werde (1) integrirt und diese Gleichung zu diesem Ende geschrieben (t als unabhängige Variable vorausgesetzt):

$$\frac{\frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = - n \,.\, ds,$$

woraus erhalten wird:

$$\text{Lgnt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \text{Const.} - n \,.\, s.$$

Setzt man Const. = Lgnt B, wobei B ebenfalls eine constante Größe bezeichnet, und multiplicirt ferner auf beiden Seiten der Gleichung mit Lgnt . $e = 1$, so findet sich:

$$\text{Lgnt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \text{Lgnt}\,\frac{B}{e^{ns}}, \text{ d. i.}$$

$$(3)\ \frac{dx}{dt} = B \,.\, e^{-n \cdot s}.$$

B findet sich, wenn man beachtet, daß für $s =$ Null, die horizontale Geschwindigkeitscomposante $V . \cos \varphi$, d. h.

$$V . \cos \varphi = B \,.\, e^0 \text{ ist.}$$

Daher statt (3), die veränderliche Fortschreitungsgeschwindigkeit $= v$:

$$\text{I.}\quad v = \frac{dx}{dt} = V . \cos \varphi \,.\, e^{-ns}.\text{[1]}$$

§. 210.

Die Differenzial-Gleichung der Geschoßbahn (Trajectorie) läßt sich jetzt mit Hülfe des Vorstehenden leicht entwickeln.

Aus (1) folgt:

---

[1]) Um hiernach Zahlenbeispiele zu berechnen, ist für Anfänger besonders zu empfehlen: Timmerhans, „Essai d'un Traité d'Artillerie". Liége 1842, Pag. 124 etc.

$$n \, . \, ds = - \frac{d^2 x}{dx}$$

und ebenso aus (2):

$$d^2 y = - g dt^2 - n \, . \, ds \, . \, dy,$$

daher aus der Verbindung letzterer beiden Werthe:

$$d^2 y = - g dt^2 + \frac{d^2 y}{dx} \, . \, dy, \text{ oder}$$

$$\frac{dx \, d^2 y - dy \, d^2 x}{dx} = - g dt^2, \text{ d. i.}$$

$$dx \, . \, d \left(\frac{dy}{dx} \right) = - g dt^2,$$

oder auch, wenn $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird:

$$(4) \quad dx \, . \, dp = - g dt^2.$$

Nun folgt aber aus I. des vorigen Paragraphen: $dt = \frac{dx \, . \, e^{ns}}{V \, . \cos \varphi}$, daher aus (4):

$$dx \, . \, dp = - g \, \frac{dx^2 \, e^{2ns}}{V^2 \cos^2 \varphi}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{g}{V^2 \cos^2 \varphi} \, . \, e^{2ns}.$$

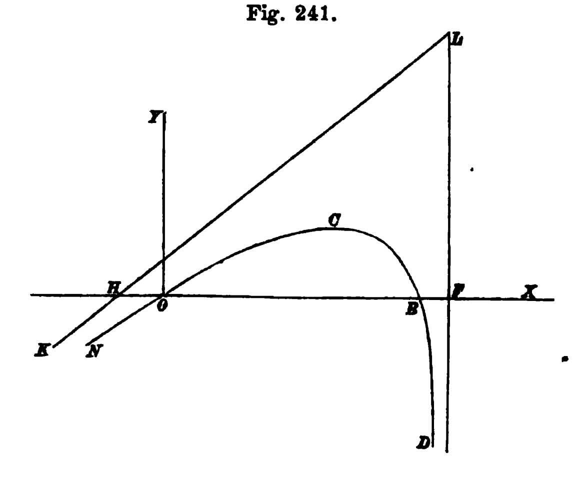
Oder wenn hier endlich die zur Anfangsgeschwindigkeit V gehörige Höhe $= H$ eingeführt, also $V^2 = 2gh$ gesetzt wird:

$$\text{II.} \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{1}{2 H \cos^2 \varphi} \, . \, e^{2ns},$$

eine Gleichung, deren Integration unter endlicher Form nicht möglich ist.

Anmerkung. Hinsichtlich der Integration von II. muß verwiesen werden auf Poisson (Mechanik, Bd. 1, §. 211 etc.), insbesondere aber auf Didion (Traité de Balistique, §. 55—57), welcher letzterer Schrift-

Fig. 241.



steller zugleich (Pag. 147) die reichhaltigste Literatur des ganzen Gegenstandes (der Ballistik) liefert und ganz besonders die verschiedenen Annäherungsmethoden zur Behandlung der beiden Fundamentalgleichungen (als Methode der Quadraturen) und die Methode Euler's, (§. 111), Methode der Reihenentwickelungen von Lambert, (§. 118), Borda (§. 122), Tempelhof (§. 123) und Français (§. 124), und endlich Annäherungsverfahren von Borda (§. 134), Besout (§. 135) und Legendre (§. 136), ausführlich erörtert.

Poisson zeigt übrigens noch (a. a. O., §. 214), daß im Allgemeinen sowohl der aufsteigende Ast *NOC* der Bahn, Fig. 241, als der absteigende *CBD* zur Gattung der Hyperbeln gehört, deren Asymptoten *KL* und *LF* sich in einem Punkte *L* schneiden und wovon die eine *KL* (des nach unten verlängerten aufsteigenden Astes) gegen den Horizont geneigt ist, die andere *LF* (des absteigenden Astes) auf denselben rechtwinklig steht oder vertical ist. Ganz dasselbe zeigt Hutton durch Raisonnements (A Cours of Mathematics. Vol. III, Pag. 318, London 1827, 4. Edition).

§. 211.

Unter Voraussetzung so kleiner Elevationswinkel (unter 10 Grad), daß man die Horizontalprojectionen der Bahnen statt der wirklich durchlaufenen Bögen in Rechnung bringen darf, gestalten sich die vorstehenden Entwickelungen außerordentlich einfach.

Zunächst folgt aus II. des vorigen Paragraphen:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{e^{2nx}}{2H\cos^2\varphi},$$

wovon das Integral ist:

$$p = -\frac{e^{2nx}}{4nH\cos^2\varphi} + \text{Const. oder}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{2nx}}{4nH\cos^2\varphi} + \text{Const.}$$

Für $x =$ Null wird aber $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$, daher:

$$dy = dx \,.\, \operatorname{tg}\varphi + \frac{(1 - e^{2nx})\,dx}{4nH\cos^2\varphi}.$$

Aus der Integration dieser Gleichung ergiebt sich:

$$y = x \,.\, \operatorname{tg}\varphi + \frac{x}{4nH\cos^n\varphi} - \frac{e^{2nx}}{8n^2H\cos^2\varphi} + \text{Const.}$$

Da für $x =$ Null auch $y =$ Null wird, so ist

$$\text{Const.} = \frac{1}{8n^2H\cos^2\varphi},$$

daher das bestimmte Integral:

$$\text{III.}\quad y = x\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{4nH\cos^2\varphi}\right) - \frac{(e^{2nx} - 1)}{8n^2H\cos^2\varphi}.$$

Schreibt man hier z statt $2nx$, setzt $n = \frac{1}{2x}$, nimmt φ so klein, daß man den Cosinus mit der Einheit verwechseln kann und führt wieder $V^2 = 2gH$ ein, so erhält man:

$$\text{III}^a. \quad y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{V^2}(e^z - 1 - z),$$

eine Gleichung, welche Otto (Hülfsmittel zu ballistischen Rechnungen, 1. Lieferung, S. 24, Formel Nr. 17 und S. 41 etc.) zu vergleichenden Berechnungen mit gemachten Beocachtungen verwendet und worauf hier zum Weiterstudium aufmerksam gemacht werden mag.

Endlich folgt noch aus I, §. 209:

$$dt = \frac{e^{nx} \cdot dx}{V \cos \varphi},$$

woraus sich ohne Weiteres ergiebt:

$$\text{IV.} \quad t = \frac{1}{n \cdot V \cos \varphi}(e^{nx} - 1).$$

Für $y =$ Null folgt noch aus III:

$$\text{V.} \quad \sin 2\varphi = \frac{e^{2nx} - 2nx - 1}{4n^2 Hx},$$

ein Ausdruck, mittelst welchen die Anfangsgeschwindigkeit [1] $V = \sqrt{2gH}$ oder die größte Entfernung (Wurfweite) $= x$ zu berechnen ist, die bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit und gegegebenem Elevationswinkel eine bestimmte Kugel erreichen kann.

Für die Abscisse x_1, welche der größten Ordinate der Trajectorie entspricht, findet sich noch aus III, indem man $\frac{dy}{dx} = 0$ entwickelt:

$$\text{VI.} \quad x_1 = \frac{\text{Lgnt}\,(1 + 2nH \cdot \sin 2\varphi)}{2n\,\text{Lgnt} \cdot e}.$$

Beispiel. Zu welcher Höhe hat sich eine 12 Pfünder Kugel von $0^m,1161$ Durchmesser erhoben, welche bei 1 Grad Elevationswinkel und 543 Meter Anfangsgeschwindigkeit in einer Entfernung von 605 Meter wieder den Horizont erreichte?

Auflösung. Für $\Delta = 1,2291$ und $q = 7000$, $k' = 1,032$ und $d = 0,1161$ folgt $n = 0,00116$ und sodann aus III: $y = 4^m,35$, während (nach Timmerhans, Essai d'un Traité d'Artillerie, Pag. 386) die Beobachtung $y = 4^m,24$ lieferte. (Mehrere ähnliche Beispiele finden sich ebenfalls bei Timmerhans.)

Anmerkung. Außer den bereits mehrfach citirten Werken und

---

[1]) Ueber die Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit der Geschosse aus zuverlässig ermittelten Schußweiten, Papierscheiben, die sich um feste Achsen drehen, sogenannte ballistische Pendel etc., handelt am Ausführlichsten Didion in seiner Ballistik, §. 174 bis mit §. 201. Minder ausführlich, aber übersichtlich Hartmann in seiner „Einleitung in die Ballistik", S. 29. Ueber die neuesten Apparate (elektromagnetische Chronographen), um aus der Zeit, in welcher das Geschoß eine gewisse sehr kurze Wegstrecke zurücklegt, auf die Geschwindigkeit zu schließen, insbesondere über die Apparate von Navez und Boulengé, berichtete Maresch (a. a. O., Erster Abschnitt, S. 33) und Otto in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik. Jahrg. XI (1866), S. 530 etc.

Abhandlungen über Ballistik kann den Studirenden noch besonders empfohlen werden:

Poisson, „Sur le Mouvement des Projectiles dans l'air, en ayant égard à leur rotation". Journal de l'Ecole Polytechnique. 27. Cahier, Tome XVI, Pag. 1. Paris 1839. — Magnus, „Ueber die Abweichung cylindrischer Geschosse etc." Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie, Bd. 88 (1852). — J. Hartmann (Capitain der K. hannov. Artillerie), „Vorträge über Artillerie. Einleitung in die Ballistik". Hannover 1856. (Ein mit Fleiß und Sachkenntniß bearbeitetes Werkchen, was Anfängern nicht genug empfohlen werden kann.) — F. Otto (K. preuß. Artilleriemajor), „Ueber den Luftwiderstand in der Ballistik und Kritik des Didion'schen (oben citirten) Werkes über Ballistik". Archiv für die Officiere der K. preuß. Artillerie und des Ingenieurcorps, Bd. 33, S. 75 und Bd. 35, S. 105. (Werthvolle Abhandlungen.) — Rouveroy (K. sächs. Artilleriegeneral), „Bemerkungen und Untersuchungen über einige Gegenstände der Ballistik". (Eine beachtenswerthe Arbeit.) Zeitschrift für Mathematik und Physik (von Schlömilch und Witschel). Erster Jahrgang (1856), S. 325. — Mayevski, „Traité de Balistique". Paris 1872. (Dieses schätzbare Werk eines russischen Generals hat besonders in Frankreich und Belgien Anerkennung gefunden.) — Maresch (österr. Artilleriehauptmann), „Waffenlehre". Wien 1875. Sechster Abschnitt, S. 4 und insbesondere §. 8 („Die ballistische Curve"). Eine empfehlenswerthe, vorzugsweise practische Arbeit. — Tilly (belg. Artilleriecapitain), „Ballistique". 2e Edit. Bruxelles et Paris 1876. Ein nur 244 kleine Octavseiten umfassendes gutes Buch, was Anfängern sehr zu empfehlen ist. — Haupt (Hauptmann im Generalstabe der preußischen Armee), „Mathematische Theorie der Flugbahnen gezogener Geschosse". Berlin 1876. Eine beachtenswerthe übersichtliche, allerdings streng theoretische Arbeit, welche sich das cubische Luftwiderstandsgesetz zur Basis nimmt und nach einander behandelt: 1) Die Bewegung der gezogenen Geschosse nach vorwärts. 2) Die Rotation und Seitenabweichung der gezogenen Geschosse.

§. 212.
Geschichtliche Notizen
über Wirkung (Stoß) und Widerstand elastischer Flüssigkeiten.

Die hier zusammengestellten geschichtlichen Notizen erstrecken sich, diesem Buche angemessen, auf physikalische, artilleristische (ballistische) und mechanisch technische Zwecke.

Als Galilei 1602 die Fallgesetze entdeckt[1]), in seinen Gesprächen über die Bewegung vorgetragen[2]) und damit gleichsam den Grund zu unserer ganzen neueren Mechanik gelegt hatte, fanden sich natürlich auch Gegner dieser Theorie, die zwar Galilei selbst, ferner Riccioli[3]) und Grimaldi durch directe Fallversuche zu bestätigen suchten,

[1]) Gehler, Physikalisches Wörterbuch (alte Auflage von 1789). Artikel „Fall der Körper", S. 120.

[2]) Discorsi e dimostrazione matematiche etc. Leiden 1638.

[3]) Almagestum novum. Bologna 1651.

die jedoch sämmtlich die Frage nicht so entschieden, bis 1651 Dechales[1]) bei Fallversuchen mit kleinen Steinen die Abweichung mit der Theorie durch den Widerstand der atmosphärischen Luft erklärte.

Galilei wandte zuerst die Fallgesetze auf die Untersuchungen der Kugelbahnen (in seinen Discorsi 1638) an und zeigte, daß die Bahn jeder abgeschossenen Kugel eine gemeine Parabel sein müsse, jedoch nur unter der Voraussetzung, daß der Widerstand der Luft die Bahn nicht modificire. Letztere Andeutung des Meisters übersah man gänzlich und wandte die parabolische Theorie vollständig auf die Ballistik an, in der Meinung, daß die Luft als ein sehr dünnes Medium auf so dichte und schwere Körper, als eiserne Kugeln sind, keinen Einfluß haben könne.

Unter den in jener Zeit erschienenen Werken wurde besonders Blondel's „L'art de jetter les bombes". Paris 1683, beachtet, wovon selbst 1686 eine deutsche Uebersetzung unter dem Titel: „Blondel's Kunst, Bomben zu werfen", erschien.

Newton[2]) war der erste, welcher 1687 den Einfluß des Luftwiderstandes auf die Bewegung theoretisch formulirte und durch Versuche das Gesetz begründete, „daß der Widerstand eines in Luft und Wasser bewegten Körpers dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportional sei".

Um zu erfahren, wie das quadratische Luftwiderstandsgesetz mit der Erfahrung übereinstimmt, ließ Newton (durch Hawksbee) im Juni 1710 in der St. Paulskirche zu London Fallversuche anstellen. Beim Durchfallen einer Höhe von 220 Fuß engl. stimmten diese Versuche verhältnißmäßig gut mit den theoretischen Berechnungen überein[3]).

Mariotte stellte (1717?) ebenfalls Fallversuche aus Höhen von $166\frac{1}{2}$ Pariser Fuß in der Spindel der Wendeltreppe der Pariser Sternwarte an, die dasselbe Gesetz bestätigten[4]). 1719 wiederholte Desaguliers (zum Theil im Beisein von Halley, Graham etc.) Fallversuche in der Paulskirche aus etwas größerer, nämlich aus 272 Fuß Höhe.

1719 entwickelte Johann Bernoulli[5]) das ballistische Problem für das Luftwiderstandsgesetz (unter Annahme der n^{ten} Potenz für die Geschwindigkeit) mit Hülfe der Differenzial- und Integralrechnung. Indessen gelang es ihm nicht, eine genügende Lösung zu bewirken.

Aus von Newton angestellten Pendelversuchen[6]) und aus Resultaten, welche ein gewisser Günther zu Petersburg aus den Zeitintervallen lothrecht in die Höhe geschossener eiserner Kugeln bis zu ihrem Herabfallen erhielt, folgerte Daniel Bernoulli[7]), daß der Luftwider-

---

[1]) Mundus mathematicus. Tom. II, Stat. Lib. II, prop. I, II (1690).

[2]) Philosophiae naturalis principia matematica. Lib. II, Sect. II—VII. Wolfer's deutsche Bearbeitung der Principien. Berlin 1872. Buch II, Abschnitt II—VII.

[3]) Principien (Wolfer's Ausgabe), S. 349 und 350.

[4]) Gehler's Physikalisches Wörterbuch. Bd. X (1842), S. 1784.

[5]) Ebendaselbst, Bd. I (1825), S. 702.

[6]) Principien (Wolfer's Ausgabe), S. 308 ff.

[7]) Nach den Petersburger Commentarien, Bd. II und IV in Gehler's Physikalischem Wörterbuche, Bd. X (1842), S. 1784.

stand durch zwei Werthe, einen beständigen und einen andern, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen, ausgedrückt werden könne.

Schon etwas vor dieser Zeit (1704) wandte der um die Theorie der Wasserräder verdiente französische Akademiker Parent[1]) das quadratische Luftwiderstandsgesetz auf die Theorie der schief gestellten Flügel der Windmühlen an und zwar so, daß er gleichzeitig den Winddruck (Windstoß) dem Quadrate des Sinus des Einfallswinkels proportional setzte. Hierauf gestützt fand Parent, daß die vortheilhafteste Neigung der Flügel gegen die Richtung des Windes einem Winkel von $54^{\circ}\,44'$ entspreche. Leider hatte hierbei Parent den Irrthum begangen, daß er die Windflügel im Zustande der Ruhe, nicht aber, wie es sein muß, im Beharrungszustande der Bewegung voraussetzte[2]).

Zwar machte schon Daniel Bernoulli[3]) auf die Unrichtigkeit dieses Resultates aufmerksam, allein eine vollständige Auflösung des Problems gelang erst Maclaurin, der solche im 2. Bande seines berühmten, 1742 erschienenen Werkes: „Treatise on Fluxions“ mittheilte und zu jener Formel für die Tangente des Neigungswinkels gelangte, welche bereits S. 704 unter (5) entwickelt wurde.

Besondere Mühe gab sich der Engländer Robins, den Widerstand der Luft namentlich gegen Geschütz- und Gewehrkugeln, theils durch die Theorie, theils durch Versuche zu bestimmen.

Die von Newton selbst zugestandene Mangelhaftigkeit des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes[4]) für große Geschwindigkeiten, wie die aus Geschützen (und Kleingewehren) abgeschossenen Kugeln annehmen, wurde von Robins durch das von ihm erfundene sogenannte ballistische Pendel[5]) zuerst in seinem 1742 in London erschienenen Buche: „New principles of Gunnery“ nachgewiesen. Leonhard Euler besorgte hiervon eine mit vielen Zusätzen versehene Uebersetzung und zwar unter dem Titel: „Neue Grundsätze der Artillerie u. s. w.“ (Berlin 1745).

Zur Bestimmung des Luftwiderstandes von Körpern, die sich mit geringerer Geschwindigkeit bewegen, bediente sich Robins einer sogenannten Wirbelmaschine (whirling-machine).

Fig. 242 zeigt eine Abbildung dieser Maschine.[6]) Dabei ist $BCDE$ ein hohler Messingcylinder, der oben und unten mit Zapfen versehen ist, um die er sich drehen kann. Nach oben hin ist die Welle verlängert und daselbst ein Hohlkegel AG aufgesteckt. Aus dem unteren Theile des Kegels läuft ein dünner hölzerner, (flacher) linealartiger Arm GH, dessen Längenkanten messerartig zugeschärft

---

[1]) Mémoires de l'Académie des sciences. Année 1704. Paris 1706.

[2]) Burg im 8. Bande der Jahrbücher des k. k. polytechnischen Institutes in Wien (1826), S. 90 ff. und d'Aubuisson, Hydraulik, Pag. 620.

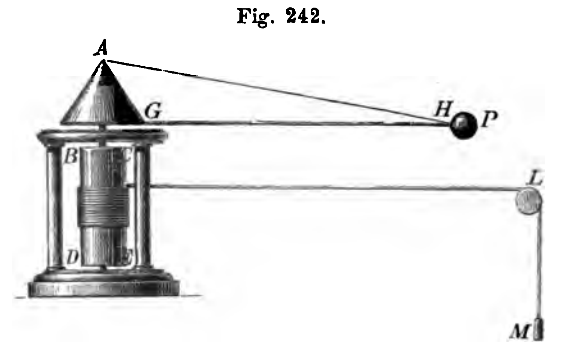
[3]) d'Aubuisson, Hydraulik, Pag. 620.

[4]) Principien (Wolfer's Ausgabe), S. 307 ff.

[5]) Robins bediente sich als Pendel eines geeigneten, außerhalb seines Schwerpunktes aufgehangenen Holzkörpers. Hutton verbesserte nachher dieses ballistische Pendel, wovon sich Beschreibung und Abbildung in dessen Tracts, Nr. 34, Pag. 317, Plate IV und V vorfindet.

[6]) Hutton, Tracts 36, Pag. 164 ff.

Fig. 242.



sind, um dessen Widerstand möglichst herabzuziehen. Eine Zugstange oder Strebe *AH* diente zur Verhinderung des Durchbiegens dieses Armes. Der Körper *P*, dessen Luftwiderstand bestimmt werden sollte, wurde am Ende *H* des Armes gehörig befestigt. Bei den Versuchen wurde um den Messingcylinder *BCDE* eine feine seidene Schnur gewunden, welche über eine an der Wand angebrachte Rolle *L* geführt und an ihrem äußersten Ende mit einem Gewicht *M* belastet wurde.

Man erkennt nun leicht, daß das Gewicht *M*, sich selbst überlassen, senkrecht niedersteigt und dabei die Welle *BCDE*, den Arm *GH* und den daran befestigten Körper *P* in Umdrehung versetzt. Anfänglich ist der Widerstand von Arm und Körper geringer als der des Gewichtes *M*, so daß letzteres eine accelerirende Bewegung erzeugt. Die zunehmende Geschwindigkeit veranlaßt jedoch bald einen entsprechenden großen Luftwiderstand von Arm *GH* und Körper *P* und demzufolge schließlich eine gleichförmige Bewegung des Systemes [1]).

Bei den verhältnißmäßig geringen Geschwindigkeiten der Umdrehung bestätigte sich das quadratische Gesetz des Luftwiderstandes, während sich dasselbe für mit großer Anfangsgeschwindigkeit geschossene Körper nicht anwendbar zeigte.

Leonhard Euler schloß zuerst, aus Versuchen Robins, daß man den Luftwiderstand besser durch die Form

$$A\,(v^2 + Bv^3)$$

darzustellen hätte, wenn v die veränderliche Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung ist, während A und B constante Factoren sind. Später, in der unten [2]) notirten Abhandlung, ging er jedoch auf das Newton'sche (quadratische Gesetz) zurück.

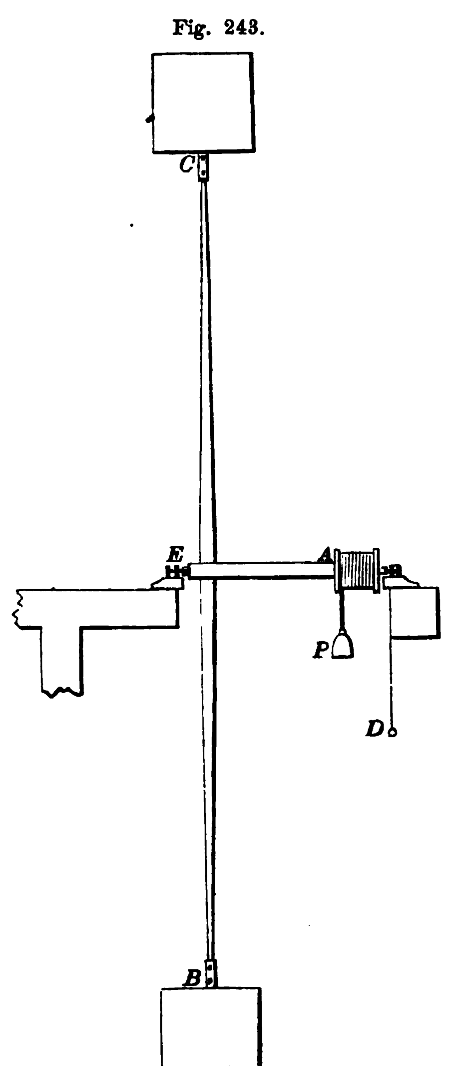
Um die Schwierigkeiten zu vermeiden, welche dennoch bei Behandlung des ballistischen Problems durch die Integration der für die Flugbahn abzuleitenden Differenzialgleichungen entstanden, schlug Euler die Einführung geeigneter Hülfstafeln vor. Eine Probe solcher Tafeln berechnete Euler selbst und theilt dieselben in Nr. 44 ff. der vorher citirten Abhandlung (Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1753) mit.

---

[1]) Zum Studium der betreffenden Rechnungen ist das Mémorial de l'artillerie, Nr. V, Pag. 557 (Paris 1842) zu empfehlen.

[2]) Histoire de Berlin. Année 1753, unter der Ueberschrift: „Recherche sur la veritable courbe que décrivent les corps jetés dans l'air".

Fig. 243.



Beachtenswerthe Versuche über den Widerstand der Luft stellte auch Borda für geringe Geschwindigkeiten der Bewegung ebenso wie für Wasser an. In Bezug auf letzteres wurde bereits S. 608 und 609 berichtet. Die Resultate seiner Versuche über den Widerstand der Luft veröffentlichte Borda in den Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften vom 20. Decbr. 1763, Pag. 358.

Den von ihm hierzu benutzten Apparat zeigt nebenstehende Fig. 243. Wie man sofort erkennt, bildet derselbe ein zweiarmiges Flügelrad (einen Windfang) *CB*, das sich um eine horizontale Achse *AE* dreht. Auf letzterer ist eine geeignete Rolle *A* zur Aufnahme einer sich abwickelnden Schnur befestigt, deren unteres freies Ende mit einem Gewichte *P* belastet ist.

Borda ließ das Gewicht *P* frei herabgehen und begann die erforderlichen Zeitmessungen mittelst eines seitlich aufgehangenen Pendels *D*, wenn nach einer geringen Zahl von Umdrehungen des Flügels die accelerirende Bewegung des Systemes sich in eine gleichförmige umgesetzt hatte [1]).

Bemerkenswerth dürfte vielleicht noch sein, daß der Durchmesser des Flügelrades *BC* $7\frac{1}{2}$ Pariser Fuß (2,44 Meter) betrug, während Borda drei verschiedene quadratische Flächen in Anwendung brachte, beziehungsweise von 9 Zoll, 6 Zoll und 4 Zoll Seitenlänge [2]).

---

[1]) Eine elegante, wissenschaftlich strenge Berechnungsweise dieser Versuche hat Poncelet geliefert in der Section I seines berühmten Werkes „Mécanique appliquée aux machines“, Nr. 52 ff.

[2]) Später hat Duchemin in seinen „Experimental-Untersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten“, §. 108, eine tabellarische Zusammenstellung aus den Borda'schen Versuchen geliefert, aus welcher man den Grad der Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Widerstände entnehmen kann. Das Resultat ist sehr zufriedenstellend.

Das aufgehangene Gewicht P betrug nach einander 8, 4, 2 Pariser Pfund und endlich 1 Pfund und $\frac{1}{2}$ Pfund.

Das Resultat dieser Versuche bestätigte das quadratische Luftwiderstandsgesetz.

Großes Aufsehen erregten seiner Zeit die Versuche des Professors Hutton an der Königl. Militärakademie zu Woolwich, der auch das ballistische Pendel zum ersten Male für größere Kaliber als die des kleinen Gewehres in Anwendung brachte, während er zu den Versuchen für geringe Geschwindigkeiten von der Robins'schen Wirbelmaschine Gebrauch machte.

Die Zusammenstellung aller Hutton'schen Versuche vom Jahre 1775 an bis 1791 findet sich in dessen bereits wiederholt citirten Tracts Nr. 27 bis mit Nr. 37.

Indem der Verfasser auf diese Quellen und auf die Seiten 597, 608, 692 und 701 dieses Buches verweist, notirt er hier die beiden Hauptformeln, welche Hutton seinen Versuchen entlehnte, nämlich die für geringe Geschwindigkeiten:

$$W^{1)} = 0{,}03 \,.\, A V^{2{,}04} \,.\, (\sin \alpha)^{1{,}84 \,.\, \cos \alpha} \text{ (engl. Maaße)}$$

und die für größere Geschwindigkeiten und Geschützkugeln vom Radius $= r$:

$$W^{2)} = \frac{\Delta r^2 \pi}{8g} (nV + mV^2) \text{ (ebenfalls engl. Maaße),}$$

wobei $g = 16$ Fuß, $n = -0{,}00665$ und $m = 0{,}00002665$ ist.

Wie groß der Widerstand der Luft gegen schnell bewegte Körper sei, macht Hutton[3]) anschaulich, indem er berechnet, daß eine 24-pfündige Kugel, welche sich mit 1780 Fuß Geschwindigkeit zu bewegen anfängt, schon nach zurückgelegten 280 Fuß auf 1500 Fuß, und nach 1000 Fuß auf 1367 Fuß dadurch zurückgebracht werde.

Leider geht trotz aller Bemühungen das Schlußresultat zu dieser Zeit noch dahin, daß sich die Theorie mit der Erfahrung keineswegs in gehöriger Uebereinstimmung befand.

Entsprechend dem Zwecke gegenwärtigen Buches ist hier noch der Versuche des Engländers Smeaton und des Franzosen Coulomb zu gedenken, welche diese Ingenieure zur Beurtheilung und Abschätzung der Wirkung des Windes gegen die Flügel der Windmühlen anstellten.

Smeaton las in der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu London den 3. Mai und 14. Juni 1759 einen Aufsatz, welcher das Resultat seiner Versuche nebst den daraus abgeleiteten Regeln enthielt. Betitelt war dieser Aufsatz: „On the construction and effects of Windmill Sails".

Smeaton behauptete, daß, um genaue Versuche mit den Windflügeln anzustellen, der natürliche Wind hierzu zu unsicher sei und daß man daher zu einem künstlich erzeugten Winde seine Zuflucht nehmen müsse. Deshalb benutzte er auch nur ein Modellrad mit vier Flügeln, deren Halbmesser 21 Zoll engl. bei $5\frac{1}{2}$ Zoll Breite betrugen. Dieses

---

[1]) Tract 36, Pag. 208.
[2]) Ebendaselbst 37, Pag. 226.
[3]) Ebendaselbst, Pag. 252.

Windrad placirte er am Ende eines Rotationsapparates, welcher dem vorher mitgetheilten Robins'schen (S. 734, Fig. 242) der Hauptsache nach gleichkam [1]).

Einige technisch wichtige Hauptresultate dieser Versuche finden sich mitgetheilt in des Verfassers Allgemeiner Maschinenlehre, Bd. I, S. 460 und 461 (Zweite Auflage).

Für die größte Arbeitsleistung $= \mathfrak{A}$ eines Windrades von $F^{\square m}$ Flügelfläche läßt sich aus diesen Smeaton'schen Versuchen (Metermaaß) die Formel ableiten:

$$\mathfrak{A} = 0{,}0500\, F V^3 \text{ (Meterkilogramm)},$$

worin V die secundliche Geschwindigkeit des Windes bezeichnet.

Ueber Coulomb's Versuche wurde bereits hier von S. 707 ab ausführlich berichtet, wozu als Ergänzung auf das hingewiesen werden muß, was der Verfasser ebenfalls im 1. Bande, S. 464 (2. Auflage) seiner Allgemeinen Maschinenlehre davon mittheilt.

Jedenfalls ist der aus zahlreichen Versuchen mit großen gut construirten Windrädern verschiedener Windmühlen in der Umgegend von Lille abgeleiteten Formel Coulomb's für die Nutzarbeit, welche der Wind auf derartige Flügel überträgt, vor jener Smeaton's der Vorzug zu geben, d. i. nach V, S. 708, der Formel:

$$\mathfrak{A} = 0{,}0302\, F V^3 \text{ (Meterkilogramm)},$$

worüber an der genannten Stelle unseres Buches ausführlich berichtet wurde.

Vor dem Ende des 18. Jahrhunderts (1795) stellte noch Vince, einer der wenigen Engländer, die sich überhaupt mit technisch-wissenschaftlich hydraulischen Arbeiten beschäftigten und über dessen Experimente bereits S. 201 berichtet wurde, Versuche mit kleinen Flächen bei geringen Geschwindigkeiten der Bewegung an, welche ebenfalls im Allgemeinen zeigten, daß der Widerstand der Größe der Fläche und den Quadraten der Geschwindigkeiten proportional sei. Näheres über Vince's Versuche findet sich in den unten citirten Quellen [2]).

Im Jahre 1802 stellte der Dr. Benzenberg mit großer Sorgfalt Fallversuche auf dem Michaelisthurme in Hamburg an und zwar zunächst, um die Richtigkeit der täglichen Umdrehung der Erde um ihre Achse und die Abweichung der fallenden Körper nach Osten nachzuweisen [3]).

Die Fallhöhe betrug dabei 235 Pariser Fuß oder 76,4 Meter [4]). Diese Versuche gaben zugleich Veranlassung zu einer Reihe von

---

[1]) Ausführlich berichtet Burg über diese Smeaton'schen Versuche unter Beigabe von Abbildungen in den Jahrbüchern des k. k. polytechnischen Instituts in Wien, Bd. 6, S. 115.

[2]) Philos. Trans. 1795 und 1798 und daraus in Gilbert's Annalen der Physik, Bd. II, S. 401 und Bd. IV, S. 34. Endlich noch Gehler's Physikalisches Wörterbuch, Bd. X, S. 1788. — Duchemin, Experimental-Untersuchungen, S. 63 und 102.

[3]) Gilbert's Annalen der Physik. Bd. XIV (1803), S. 222 ff.

[4]) Die ganze Höhe des Michaelisthurmes von 402 Pariser Fuß (130,65 Meter) ließ sich, des nachtheiligen Luftzuges wegen, in der Spitze nicht zu den Versuchen benutzen.

400 Experimenten über den Widerstand der atmosphärischen Luft bei verschiedenen Fallhöhen. Die Resultate dieser Versuche gingen dahin, daß das quadratische (Newton'sche) Luftwiderstandsgesetz schon beträchtlich von der Erfahrung abzuweichen anfängt, sobald die Geschwindigkeit auf 100 Fuß (35,5 Meter) pro Secunde steigt und daß bei Fallhöhen von 321 Pariser Fuß (104,3 Meter) der Widerstand auf 1½zöllige Bleikugeln gerade noch einmal so groß ist, als die Theorie ihn angiebt.

Thibault (seiner Zeit Marinelieutenant in Brest) stellte (1826) die bereits S. 694 erwähnten Versuche in der atmosphärischen Luft mit einem Rotationsapparate an, welcher fast ganz dem glich, den Borda (S. 735) benutzte. Die Entfernung von der Drehachse, in welcher Thibault bei seinen Versuchen kleine Flächen aus Cartonpappe befestigte, betrug in drei Fällen, wie bereits oben (S. 694) angegeben wurde, 1,37 Meter. Diese Versuche lieferten jedoch verschiedene Resultate, nicht nur bei verschiedener Flächengröße (mit Seitenlinien von $0^m,227$ bis $0^m,454$ Länge, sondern auch bei verschiedener Lage der Fläche (bei Rechtecken, je nachdem die große oder kleine Seite in der Richtung des Radius zu liegen kam, oder nicht). Diese und noch kleinere Flächen wurden in geringeren Distanzen von der Drehachse befestigt, zeigten aber ziemlich gleiche Widerstände bei gleichen Geschwindigkeiten. Ausführliches über diese Thibault'schen Versuche findet sich in den unten citirten Quellen[1]).

Noch andere interessante Versuche stellte Thibault mit hohlen cylindrischen Flächen und mit kleinen Flächen doppelter Krümmung (den von Wind gespannten Segelflächen ähnlich) an, worüber Poncelet in dem unten notirten Werke[2]) berichtet.

Im Jahre 1831 veröffentlichte Professor Schmidt in Göttingen ein Buch unter dem Titel: „Theorie des Widerstandes der Luft bei der Bewegung der Körper", worin besonders ein neues Luftwiderstandsgesetz aufgestellt wurde, was jedoch derartig complicirt war, daß selbst der um den wissenschaftlichen Theil der Ballistik sehr verdiente preußische Artillerieofficier Otto (später Generalmajor in Spandau), der sich von complicirten Rechnungen nicht leicht abschrecken ließ, darüber bemerkt, daß die mathematische Arbeit mit diesem Gesetze, durch ihre Mühsamkeit, ganz dazu angethan sei, um mit der Geduld Bankerott zu machen[3]).

Später zeigte Otto, mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate[4]), daß das complicirte Schmidt'sche Gesetz, gegenüber den quadratischen, cubischen und anderen Gesetzen, den größten wahrscheinlichen

---

[1]) Duchemin, Experimental-Untersuchungen (deutsch von Schnuse), S. 161, §. 123, und Didion, Traité de Balistique, Pag. 31 etc.

[2]) Poncelet, Introduction à la mécanique industrielle, Nr. 409 und 410. Beachtenswerth sind auch noch die Mittheilungen, welche Poncelet von den Thibault'schen Versuchen überhaupt in dem genannten Werke von Nr. 400 bis mit Nr. 402 machte.

[3]) Otto, Hülfsmittel für ballistische Rechnungen. Berlin 1855, S. 20.

[4]) Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 11. Jahrgang (1866), S. 518.

Fehler liefert und deshalb zu rathen sei, von diesem Gesetze, als dem unvortheilhaftesten, ganz abzusehen.

Vom Jahre 1828 an datiren Arbeiten und Versuche des französischen Obersten Duchemin, die sich bis zum Anfange der vierziger Jahre erstreckten und deren Resultate zuerst in dem Mémorial de l'artillerie, Nr. 5 (1842) unter der Ueberschrift erschienen: „Recherches expérimentales sur les lois de la résistances des fluides".

Die Art und Weise, wie Duchemin den Gegenstand auffaßt und bemüht ist, die allerdings durch oft ganz eigenthümliche Wendung gewonnenen mathematischen Theorien durch Experimente zu unterstützen oder zu vervollständigen, nimmt sehr für diese fleißige Arbeit ein (womit auch Duchemin einen desfallsigen, von der Pariser Akademie ausgesetzten Preis zu gewinnen hoffte), allein schließlich ist doch das Ergebniß nicht viel anders als das vieler seiner Vorgänger, d. h. es genügt das Ganze nicht und am allerwenigsten für die meisten und wichtigsten Fälle der practischen Verwendung.

Es muß hier genügen, auf zwei dieser Fälle hinzuweisen. Der erste betrifft den Normaldruck $= N$ des schiefen Stoßes flüssiger Strahlen [1]), der nach Duchemin für atmosphärische Luft von der Dichte Δ, zufolge S. 580 dieses Buches, sein würde: [2])

$$N = \frac{\Delta}{g} Q (V \pm v) \cdot \frac{2 \sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha}.$$

Für geringe Geschwindigkeiten stimmten die Werthe dieser Formel allerdings mit den Beobachtungen innerhalb der Grenzen von $\alpha = 90^0$ bis $\alpha = 45^0$ überein, allein Duchemin beklagt es selbst [3]), daß die Formel für sehr spitze Einfallswinkel bald beträchtlich größere, bald merklich kleinere Resultate als die Experimente liefert.

Unermüdlich in seinen Bestrebungen, bringt deshalb Duchemin geeignete und scheinbar selbst wissenschaftlich nachzuweisende Correctionen an und gelangt (unter Einführung unserer Bezeichnungen) schließlich zu der Formel:

$$N_1 = \frac{\Delta}{g} Q (V \pm v) \frac{2 \sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha} \left(1 \pm \frac{\cos^2\alpha}{15 \sin^2\alpha}\right).$$

Verglichen mit Versuchen von Vince [4]) und Langsdorf [5]) ergiebt sich dann allerdings eine gute Uebereinstimmung.

Mit Bezug auf die aus Versuchen bei kreisförmiger Bewegung dünner Flächen von Hutton und Thibault gewonnenen Resultate gelangte Duchemin zu dem Schlusse [6]) (wie früher schon Borda und

---

[1]) Sowohl im französischen Originale als in der (Schnuse'schen) Uebersetzung §. 53, 57 und 78.

[2]) Poncelet in Nr. 403 seiner „Introduction à la mécanique industrielle" bemerkt allerdings, daß der Hutton'sche Werth (§. 205, S. 701) $(\sin\alpha)^{1,842 \cos\alpha}$ zuweilen mit Vortheil durch den Duchemin'schen $\frac{2 \sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha}$ zu ersetzen sei.

[3]) Duchemin im „Mémorial de l'artillerie", Nr. 5, §. 53. In der Schnuse-schen Uebersetzung, S. 63.

[4]) Ebendaselbst, §. 54.

[5]) Desgleichen, §. 56.

[6]) Desgleichen, §. 80.

andere Beobachter): „daß die Verhältnisse der Widerstände unter übrigens gleichen Umständen für Luft und Wasser dieselben sind“.

Der zweite der oben erwähnten Fälle betrifft die theoretische Behandlung des Widerstandes der von krummen Flächen begrenzten Körper, wenn sich diese in einer ruhenden Flüssigkeit bewegen.

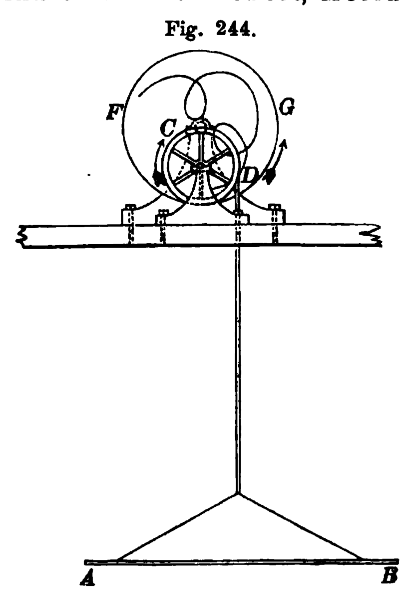
Wie in diesem Buche §. 207 berichtet wurde, basirte Duchemin diese Untersuchung auf folgenden Satz[1]):

„Der Druck, welcher auf die Einheit der vorderen Fläche an einer beliebigen Stelle ausgeübt wird, hat das Gewicht einer Flüssigkeitssäule zum Maaße, deren Höhe der doppelten, der Geschwindigkeit des Körpers entsprechenden Fallhöhe gleich ist, multiplicirt mit dem Cubus des Sinus vom Einfallswinkel des Elementes der Erzeugungslinie der vorderen Fläche des Körpers, in diesem Punkte, und dividirt durch das Quadrat des Sinus vom Einfallswinkel des Elementes dieser Erzeugungslinie, welches an der Achse des Körpers liegt“.

Wie ebenfalls §. 207 hervorgehoben wurde, läßt sich mittelst dieses Satzes zwar der Widerstand einiger von krummen Flächen begrenzter Körper berechnen und zwar derartig, daß die Resultate verhältnißmäßig gut mit der Erfahrung übereinstimmen; allein es ist deshalb keineswegs auf eine allgemeine Anwendbarkeit desselben zu schließen.

Von großer Bedeutung sind die vom Jahre 1835 an, auf Befehl des französischen Kriegsministers, in Metz angestellten Versuche der Artillerieofficiere Piobert, Morin und Didion.

Fig. 244.



Ueber die Versuche, betreffend den Widerstand dünner, mit geringer Geschwindigkeit in der Luft geradlinig bewegter Flächen (Platten), wurde bereits S. 693 gegenwärtigen Buches berichtet, was wir hier noch mit der Beschreibung des betreffenden Versuchsapparates vervollständigen[2]).

AB, in nebenstehender Fig. 244, bezeichnet eine der quadratischen Platten von $0^m,5$ bis $1^m,0$ Seitenlinie, welche man in horizontaler Lage an dem Ende einer seidenen Schnur von geringem Durchmesser befestigte. Gedachte Schnur war auf einer Rolle *CD* mit horizontaler Achse aufgewickelt, wobei letztere so weit vom Erdboden entfernt war, daß Fallhöhen von wenigstens 12 Meter beobachtet werden konnten.

---

[1]) Duchemin, a. a. O., §. 4 und §. 86.

[2]) Didion, „Traité de Balistique“. Paris 1844, Pag. 33, §. 37.

Die betreffenden Geschwindigkeiten, die, wie schon S. 693 bemerkt, 9 Meter pro Secunde nicht überschritten, wurden entweder durch gehörige Zulagegewichte auf die Platte *AB* vergrößert, oder durch geeignete Gegengewichte vermindert.

Seitlich hinter der Rolle hatte man in verticaler Lage eine größere kreisförmige Platte *FG* aufgestellt, diese mit weißem Papier beklebt und ihr sodann durch ein Uhrwerk eine gleichförmige Drehbewegung ertheilt und zwar in entgegengesetzter Richtung der Schnurrolle *CD*.

Befestigte man dann an der Schnurrolle einen Schreibstift, so zeichnete dieser während der Bewegung krumme Linien (eine Art Epicykloiden), aus denen sich die Acceleration oder Beschleunigung der entstehenden ungleichförmigen Bewegung ableiten ließ. Diese Anordnung war streng genommen dieselbe, welche Morin bei seinen in den Jahren 1831 — 1833 in Metz angestellten Reibungsversuchen in Anwendung gebracht hatte und über welche in den unten angegebenen Quellen berichtet wird [1]).

Aus diesen Versuchen wurden die betreffenden Erfahrungscoefficienten, unter Berücksichtigung der Massen des Apparates und der bei der Bewegung auftretenden passiven Widerstände (Reibung und Seilbiegung), ganz auf demselben Wege berechnet, welchen Morin bei der Ermittlung der Reibungscoefficienten aus den vorerwähnten Versuchen einschlug.

Sehr ausführlich werden alle diese Rechnungen, welche die Versuche mit dem vorbeschriebenen Apparate, Fig. 244, erforderten, in dem Mémorial de l'artillerie, Nr. 5 (1842), Pag. 557 etc. mitgetheilt.

In derselben Quelle [2]) wird auch über noch andere Versuchsresultate berichtet, welche durch die geradlinige Bewegung geneigter Flächen und durch die Drehbewegung von Flügelrädern gewonnen wurden.

Vom Jahre 1839 ab beginnen die berühmten Metzer Versuche zur Ermittlung der wichtigsten ballistischen Gesetze durch eine vom französischen Kriegsminister gebildete Commission (Commission des principes du tir), deren Hauptpersonen ebenfalls Piobert, Morin und Didion waren und die sich auf sphärische Projectile (vorzugsweise auf 12pfündige und 24pfündige Kanonenkugeln) erstreckten. Die secundlichen Anfangsgeschwindigkeiten variirten von 200 bis 650 Meter und wurden dieselben mittelst des ballistischen Pendels bestimmt.

Aus den Resultaten dieser Versuche ermittelte man (Meter und Kilogramm zur Einheit genommen) schließlich die Formel:

$$W = 0{,}027\,\pi r^2 \frac{\Delta}{\Delta_1} V^2 \left(1 + \frac{V}{435}\right).$$

---

[1]) Nouvelles expériences sur le frottement, faites à Metz en 1831, 32 et 33. Deutsch bearbeitet von Brix im 16. Jahrgange (1837) der Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen. Der betreffende Apparat wird auch beschrieben und abgebildet in der 3. Auflage der Mechanik und Geostatik des Verfassers, S. 26.

[2]) Didion in seiner Balistique, §. 37, notirt, außer dem Mémorial de l'artillerie, noch ein „Mémoire présenté à M. le Ministre de la guerre et au concours pour le grand prix de Mathématique de l'Institut, sur la Résistance des fluides, par MM. Piobert, Morin et Didion, 1837“.

Später glaubte der sardinische Artillerieofficier Graf Paoli di San Roberto vorstehende Formel besser durch folgende ersetzen zu können:

$$W = 0{,}0387 \,.\, \pi r^2 \frac{\varDelta}{\varDelta_1} V^2 \left[1 + \left(\frac{V}{696}\right)^2\right].$$

In beiden Formeln ist r der Radius des Projectiles und $\varDelta_1$ die Dichte der atmosphärischen Luft für Zeit und Ort der Versuche.

Zweifel, welche über die Resultate der durch das ballistische Pendel bestimmten Anfangsgeschwindigkeiten der vorerwähnten Versuche erhoben wurden, veranlaßten die französische Artilleriecommission, die Versuche unter Anwendung eines von dem belgischen Major Navez[1]) erfundenen Apparates (pendule électro-balistique) zu wiederholen, wozu man wieder vorzugsweise 8pfündige und 24pfündige Kanonenkugeln benutzte und die secundlichen Geschwindigkeiten von 190 Meter bis 560 Meter variiren ließ.

Die Resultate dieser Versuche lieferten die Formel (Meter und Kilogramm wieder als Einheit vorausgesetzt):[2])

$$W = 0{,}000142\, \pi r^2 \frac{\varDelta}{\varDelta_1} V^2.$$

Von deutschen Experimentatoren über Wirkung und Widerstand atmosphärischer Luft sind aus dieser Zeit nur zwei zu verzeichnen, nämlich Magnus[3]) in Berlin für artilleristische Zwecke und Weisbach[4]) über den Stoß isolirter Luftstrahlen bei geringen Geschwindigkeiten.

Die Versuche von Magnus erstreckten sich namentlich auf die eigenthümlichen Erscheinungen bei der Umdrehung von Cylindern um ihre Achse (längliche Projectile) in der umgebenden Luft. Obgleich diese Magnus'schen Versuche von nicht geringem Werthe sind, so gehören sie doch einem Gebiete an, welches die Grenzen unseres Buches bei Weitem übertrifft.

Weisbach's Versuche über den Stoß isolirter Luftstrahlen gegen ebene und hohle Flächen (angestellt mit dem S. 590 beschriebenen, für den Wasserstoß in Anwendung gebrachten Apparate) bestätigten im Allgemeinen nur die bekannten Versuchsresultate anderer Experimentatoren.

In den Jahren 1868 und 1869 wiederholte man in St. Petersburg die Metzer Versuche[5]) und zwar besonders deshalb, weil man bei letzteren Unregelmäßigkeiten wahrgenommen zu haben glaubte, die ihren Grund in der Verwendung des elektro-ballistischen Apparates von Navez haben sollten. Man ermittelte daher die Widerstände aus den in zwei verschiedenen Punkten der Flugbahn (Trajectorie) gemessenen Geschwindigkeiten[6]), welche letztere mit Hülfe zweier elektrischer Chronographen des belgischen Officiers Le Boulengé[7]) geschätzt wurden.

---

[1]) Archiv für preußische Artillerie- und Ingenieurofficiere. Bd. 54, S. 24 ff.

[2]) Mayevski, „Traité de Ballistique". Paris 1872, Pag. 37.

[3]) „Ueber die Abweichung der Geschosse". Berlin 1852 und Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie, Bd. 88, S. 1.

[4]) Bornemann's „Civilingenieur". Bd. 8 (1862), S. 9.

[5]) Mayevsky, „Balistique", §. 24.

[6]) Didion, „Balistique", §. 44.

[7]) Archiv für preußische Artillerie- und Ingenieurofficiere. Bd. 56, S. 189.

Dabei erstreckten sich die Versuche auf Kugeln aus glatten Kanonen und auf Bombenkanonen (canon à bombes), so wie auf Langgeschosse aus gezogenen Kanonen.

Aus diesen und noch anderen in England von Bashforth[1]) im Jahre 1868 angestellten Versuchen entwickelte Mayevski[2]) folgende Formeln, die wohl als das Neueste ihrer Art betrachtet werden müssen.

Diese Formeln sind folgende fünf (dabei wieder Kilogramm und Meter als Einheiten vorausgesetzt):

a. Für sphärische Projectile.

$W = 0{,}061\,\pi r^2 \dfrac{\varDelta}{\varDelta_1} V^2$ für secundl. Anfangsgeschw. von 530^m bis 376^m

$W = 0{,}012\,\pi r^2 \dfrac{\varDelta}{\varDelta_1} V^3 \left[1 + \left(\dfrac{V}{186}\right)^2\right]$ für secundl. Anfangsgeschw. von 376^m und weniger.

b. Für längliche Projectile.

$W = 0{,}044\,\pi r^2 \dfrac{\varDelta}{\varDelta_1} V^2$ für secundl. Anfangsgeschw. von 510^m bis 360^m

$W = 0{,}000\,000\,000\,0026\,\pi r^2 \dfrac{\varDelta}{\varDelta_1} V^6$ für secundl. Anfangsgeschw. von 360^m bis 280^m

$W = 0{,}012\,\pi r^2 \dfrac{\varDelta}{\varDelta_1} V^3 \left[1 + \left(\dfrac{V}{488}\right)^2\right]$ für secundl. Anfangsgeschw. von 280^m und weniger.

Die deutschen Autoritäten im Gebiete der wissenschaftlichen Ballistik, Otto (in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrg. 1866, S. 515) und Haupt (in seiner Theorie der Flugbahnen gezogener Geschütze. Berlin 1876, S. 9), weisen nach, daß sich das sogenannte Luftwiderstandsgesetz $W = AV^3$ wissenschaftlich am besten und jedenfalls am einfachsten rechtfertigen lasse.

---

[1]) Proceedings of the Royal Artillerie Institution. Woolwich 1868.

[2]) „Balistique", §. 28.

[3]) Bei den russischen Versuchen war $\varDelta_1 = 1{,}206$ Kilogramm und $\varDelta$ berechnete man aus der Formel (§. 31 Mayevski):

$$\varDelta = 1{,}293\,\frac{b - \frac{3}{8}F}{760\,(1 + \delta t)},$$

worin b die jedesmalige Barometerhöhe und F den Druck des nicht gesättigten Wasserdampfes von der Temperatur t bezeichnet, ferner $\delta = 0{,}00\,367$ ist.

Nachträge.

I. Bodendruck des Wassers.

Zu §. 11, Seite 26.

Aufmerksam gemacht auf die Behauptung im Handbuche der Ingenieur-Wissenschaften von Franzius und Sonne, Bd. III (Wasserbau), S. 879, daß die Mary'sche Formel (Annales des ponts et chaussées, 1832, 2, Pag. 96) zur Berechnung der Dicke eines Betonbodens, der einem von unten nach oben gerichteten Wasserdrucke zu widerstehen hat, auf mangelhafter theoretischer Basis beruhe, halte ich nachstehende Bemerkung für erforderlich.

Vor mir ist bereits Hagen der Mary'schen Berechnung gefolgt (Handbuch der Wasserbaukunst. Erster Theil, Abschnitt V. Zweite Auflage, S. 802 und Dritte Auflage, Bd. II, S. 344) und hat dabei zugleich nachgewiesen, daß die für einen besonderen Fall berechnete Dicke ganz der Erfahrung entsprach, d. h. die Bettung brach, wenn sich der Wasserstand über die bei der Berechnung zu Grunde gelegte Höhe erhob. Die Mary'sche Formel gab demnach nicht zu große Betonstärken.

Nichts destoweniger rühmt der Aufsteller der gedachten neuen Formel, daß letztere auf viel geringere Betonstärken führe und daß dies der practischen Idee zu danken sei, einen sogenannten Correctionscoefficienten $n = \frac{1}{2}$ bis $n = \frac{1}{4}$ für die wirksame Wasserdruckhöhe eingeführt zu haben.

Hiernach ist gedachte Formel, unsere in §. 11 gewählten Bezeichnungen beibehaltend:

$$\left[\frac{n\,(h+e)\,\gamma - eq}{12}\right] b^2 = \frac{ke^3}{6},$$

worin k die zulässige Beanspruchung eines Quadratmeters Beton, etwa $\frac{1}{8}$ der Druckfestigkeit, d. i. $k = 5000$ Kilo pro Quadratmeter bezeichnet.

Der Verfasser bedauert, der Ansicht nicht völlig beistimmen zu können, welche der Ableitung dieser Formel zu Grunde gelegt wird. Eine ganz streng mathematische Lösung der Aufgabe führt zu sehr complicirten Ausdrücken, nicht zu gedenken, daß es fraglich ist, ob

unsere gegenwärtige Erfahrung über den Widerstand von nur wenig elastischen Baumaterialien hierzu eine hinreichende Grundlage bietet.

Es dürfte nicht uninteressant sein, die Mary und Franzius Formel auf zwei verschiedene Fälle in Anwendung zu bringen, um aus den Endresultaten geeignete Schlüsse bilden zu können. Wir wählen hierzu die Beispiele gegenwärtigen Buches (S. 27) und das des Franzius, Wasserbau, S. 878.

Gegeben ist:

(Beispiel S. 27.)	(Beispiel Franzius S. 878.)
$b = 9^m,1$	$b = 20^m$
$h = 4^m,7$	$h = 4^m,0$
$\gamma = 1000$ Kil.	$\gamma = 1000$ Kil.
$q = 1500$ Kil.	$\gamma_1 = 2000$ Kil.
$m = 68256$ Kil.	$n = \frac{1}{2}$ Kil.
	$k = 5000$ Kil.

Man erhält:

nach Mary's Formel $e = 1^m,34$	nach Mary's Formel $e = 2^m,06$
„ Franzius' „ $e = 1^m,90$	„ Franzius' „ $e = 1^m,30$

II. Kreisproceß der mechanischen Wärmetheorie.

Zu §. 62, Seite 136.

Ein ehrenwerther, einsichtsvoller Recensent[1]) der ersten Hälfte gegenwärtigen Buches wünscht, daß ich im Druckfehlerverzeichnisse der zweiten Hälfte den S. 136 erörterten Kreisproceß schärfer definiren möchte. Ich glaube dem Wunsche dieses Herrn Collegen am Besten zu entsprechen, wenn ich Clausius' vortrefflichem Werke: „Die mechanische Wärmetheorie“, Zweite Auflage, wörtlich das entlehne, was dort S. 34, §. 9 unter der Ueberschrift: „Gleichungen für endliche Zustandsänderungen und Kreisprocesse“, über den fraglichen Gegenstand gesagt ist.

Es heißt daselbst also: Denken wir uns die Gleichung[2])

$$(1)\quad dQ = A\,(dU + dW) \text{ oder } EdQ = dU + dW,$$

welche sich auf eine unendlich kleine Veränderung bezieht, für irgend eine endliche Veränderung, oder auch für eine Reihe von auf einander folgenden endlichen Veränderungen integrirt, so läßt sich das Integral des einen Gliedes sofort angeben. Die Energie U ist nämlich nur von dem gerade stattfindenden Zustande des Körpers, und nicht von der Art, wie er in denselben gelangt ist, abhängig. Daraus folgt, daß, wenn man den Anfangs- und Endwerth von U mit U_1 und U_2 bezeichnet, man setzen kann:

$$(2)\quad \int dU = U_2 - U_1.$$

Demnach läßt sich die durch Integration von (1) entstehende

---

[1]) Professor Dr. Weyrauch an der technischen Hochschule in Stuttgart in der Zeitschrift für Baukunde. Bd. II (1879), S. 684.

[2]) Der Verfasser benutzt hier die in gegenwärtigem Buche, S. 136, gewählten Bezeichnungen.

Gleichung so schreiben:

$$(3)\quad E\int dQ = U_2 - U_1 + \int dW,$$

oder, wenn wir die beiden in dieser Gleichung noch vorkommenden Integrale $E\int dQ$ und $\int dW$, welche die während der Veränderung oder der Reihe von Veränderungen im Ganzen mitgetheilte Wärme und geleistete äußere Arbeit bedeuten, mit Q und W bezeichnen:

$$(4)\quad E\,.\,Q = U_2 - U_1 + W.$$

Als speciellen Fall wollen wir annehmen, der Körper erleide eine solche Reihe von Veränderungen, durch die er schließlich wieder in seinen Anfangszustand zurückkommt. Eine solche Reihe von Veränderungen habe ich einen Kreisproceß genannt. Da in diesem Falle der Endzustand des Körpers derselbe ist, wie der Anfangszustand, so ist auch der Endwerth U_2 der Energie gleich dem Anfangswerthe U_1, und die Differenz $U_2 - U_1$ ist somit gleich Null. Demnach gehen die Gleichungen (3) und (4) für einen Kreisproceß über in folgende:

$$(5)\quad E\int dQ = \int dW,$$

$$(6)\quad EQ = W.$$

Bei einem Kreisprocesse ist also die dem Körper im Ganzen mitgetheilte Wärme (d. h. die algebraische Summe aller einzelnen im Verlaufe des Kreisprocesses mitgetheilten Wärmemengen, welche theils positiv, theils negativ sein können) einfach gleich der im Ganzen geleisteten äußeren Arbeit.

III. Schützenmündung unter Wasser.

Zu §. 104, Seite 273.

Auf meine Bitte verdanke ich Herrn Kunstmeister Bornemann in Freiberg, hinsichtlich der von Herrn Ingenieur Linnenbrügge in Hamburg erhobenen Einwendungen [1]) gegen die Brauchbarkeit der Bornemann'schen Formel zur Berechnung der Wassermengen, welche bei constanter Druckhöhe aus völlig unter Wasser gesetzten Schützenöffnungen fließen, nachstehende Mittheilungen. Eine ausführliche, den fraglichen Gegenstand betreffende Abhandlung Herrn Bornemann's wird noch in diesem Jahre (1880) in der Zeitschrift „Der Civilingenieur" erscheinen.

In einer ersten Mittheilung (vom 25. März 1879) spricht sich Herr Bornemann über die Angelegenheit wie nachstehend aus:

„Der Weg, auf welchem Herr Linnenbrügge die Ausflußmenge der großen $3^m,40$ breiten Schützenöffnung (unter Wasser) zu bestimmen gesucht, verdient recht sinnreich genannt zu werden, nur Schade, daß für die zweite Mündung (Ausfluß in die freie Luft durch eine rectanguläre Mündung mit Druckhöhe über der oberen Kante) von $1^m,0$ Breite, welche ihm als Meßvorrichtung gedient hat, die richtigen Coefficienten fehlen!

[1]) „Civilingenieur". Bd. XXV (1879), S. 25 ff.

[2]) Betreffende Abbildungen in der notirten Zeitschrift „Der Civilingenieur", Tafel III.

Herr L. legt die Lesbros'schen Coefficienten für eine Poncelet-Mündung von 20 × 20 (Centimeter) zu Grunde und bedient sich dann der Weisbach'schen Correction für partielle Contraction[1]). Wenn es nun Herrn L. bedenklich erschienen ist, den von mir bei einem $1^m,13$ breiten Schutze beobachteten Ausflußcoefficienten zu benutzen, weil sich meine Versuche nur auf verhältnißmäßig geringe Druckhöhen und Wassermengen beziehen, so hätte es ihm wohl nicht viel weniger bedenklich erscheinen müssen, sich der Lesbros'schen Coefficienten zu bedienen, welche aus Versuchen mit so sehr viel kleineren Mündungen in der dünnen Wand hervorgegangen sind, er hätte auch in der Anwendung der Weisbach'schen Correction zweifeln sollen, da die letzteren sich nur auf vier Versuche mit einer Poncelet-Mündung von 20×10^{cm} bei 20 bis 26^{cm} Druckhöhe basiren.

Wenn Herr L. ferner glaubt, einen neuen Weg für die Berechnung des Ausflusses bei Schützen unter Wasser ($= A$) angegeben zu haben, so befindet er sich im Irrthum. Er berechnet nämlich zuerst aus der mit Hülfe des zweiten Schützens[2]) (Durchlaßschützen $= B$ mit directem Ausflusse in die freie Luft) ermittelten Wassermenge den Ausflußcoefficienten $\mu_1 = \frac{Q}{ab\sqrt{2gp_1}}$, dann führt er eine ideelle Druckhöhe $= h$ ein, bei welcher unter Annahme des Ausflußcoefficienten 0,65 dieselbe Ausflußmenge stattfinden, also $h = \left(\frac{Q}{0{,}65 \, . \, ab\sqrt{2g}}\right)^2$ sein würde. Demgemäß ist $h = \left(\frac{\mu_1}{0{,}65}\right)^2 p_1$. Nun setzt Herr L.

$$h = \alpha p_1 + \beta p_1 \left(\frac{T - p_1}{T}\right)^2,$$

worin T die Tiefe der Schützenunterkante bei A unter Oberwasser ist und α und β noch zu bestimmende Constanten bedeuten, was jedoch dasselbe ist, als wenn man

$$\left(\frac{\mu_1}{0{,}65}\right)^2 = \alpha + \beta \left(\frac{T - p_1}{T}\right)^2, \text{ oder}$$

$$\mu_1^2 = \alpha_1 + \beta_1 \left(\frac{T - p_1}{T}\right)^2$$

schreibt.

Somit kommt schließlich doch auch Alles darauf an, eine Formel für den Ausflußcoefficienten zu finden".

Unterm 28. März 1880 hatte Herr **Bornemann** ferner die Güte, aus einer ausführlichen, der Redaction des „Civilingenieurs" zu gedachter Zeit bereits eingesandten Arbeit „Ueber den Ausfluß durch breite unter Wasser gesetzte Schützenöffnungen", mir seine neue Formel für den

---

[1]) Mittelwerth aus Versuchen **Bidone's** und **Weisbach's** (S. 275):

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu \left[1 + 0{,}155 \, . \, \frac{n}{p}\right] \text{ für rectanguläre Mündungen.}$$

[2]) „Civilingenieur", Bd. XXV (1879), Taf. III, Fig. 1, woselbst dieser zweite Schützen durch den Buchstaben B markirt ist.

betreffenden Ausflußcoefficienten μ mitzutheilen, welche also lautet:

$$\mu = 0{,}43479 + 0{,}25666 \sqrt{\frac{a}{h_1 + \frac{a}{2}}} + 0{,}03121 \frac{1}{\left(h_2 + \frac{a}{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{b}}.$$

Die Bezeichnungen haben folgende Bedeutung. Es ist:

h_1 die Druckhöhe des Oberwasserspiegels } über der obern
h_2 „ „ „ Unterwasserspiegels } Mündungskante
a „ Höhe der Mündung und
b „ lichte Weite.

Diese Formel ist auf 63 Versuche basirt bei Mündungen von $0^m,52$, $0^m,78$ und $1^m,0$ Weite, Druckhöhen h_1 von $0^m,049$ bis $0^m,415$ und h_2 von $0^m,042$ bis $0^m,264$ und wobei secundliche Wassermengen von 48 bis 135 Liter zur Anwendung gekommen sind.

Allerdings bleibt es immerhin fraglich, ob bei größeren Druckhöhen sich bestätigen würde, daß der Ausflußcoefficient als Function der Verhältnisse

$$\sqrt{\frac{a}{h_1 + \frac{a}{2}}} \text{ und } \frac{\sqrt{\frac{1}{b}}}{h_2 + \frac{a}{2}}$$

anzusehen ist.

Ersteres hat variirt von 0,282 bis 1,205, letzteres von 4,045 bis 9,093.

IV. Wasser- und Arbeitsverlust bei sogenannten Ringkolben ohne Liderung.

Zu §. 105, Partielle Contraction.

Seit Bearbeitung der §§. 83 (Verengungen und Erweiterungen im Innern der Gefäße) und 105 (Partielle Contraction) dieses Buches, hat der Verfasser mehrfach Gelegenheit gehabt, sich von der Nützlichkeit, für practische Zwecke, der Grashof'schen Untersuchungen zu überzeugen, welche derselbe im 1. Bande seiner „Theoretischen Maschinenlehre“, S. 475, über die Vergrößerung des Widerstandes durch mehrfache Querschnittsänderungen, angestellt hat. Es betrifft dies namentlich den speciellen Fall, wenn man den Wasser- und Arbeitsverlust bestimmen soll, welchen sogenannte Ringkolben ohne Liderung, Fig. 245 und Fig. 246, mit sich führen[1]).

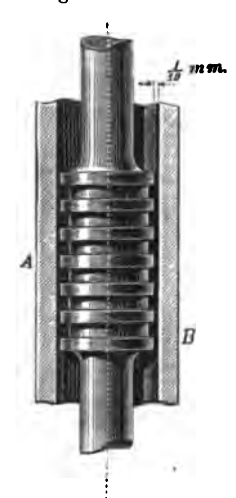
Nach S. 226 dieses Buches läßt sich für den Verlust an Druckhöhe $= z$ bei $n + 1$ Verengungen und n Erweiterungen, in dem Gefäße, worin Wasser fließt, setzen:

$$(1)\quad z = \left\{(n+1)\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + n\left(1 - \frac{A}{A_1}\right)^2\right\} \frac{V^2}{2g},$$

---

[1]) Die Abbildungen beziehen sich auf die Kolben, welche bei der Jordan-schen Wassersäulenmaschine im Marienschachte (Bd. 1, S. 452 der zweiten Auflage meiner Allgem. Maschinenlehre) in Anwendung gebracht wurden.

Fig. 245 und 246.



oder wenn der Werth $\frac{A}{A_1}$ als klein genug außer Acht gelassen wird:

$$(2) \quad z = \left\{\left(n+1\right)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2 + n\right\}\frac{V^2}{2g}.$$

Da jedoch die innere Contraction beim Eintritte in die engeren Abtheilungen nur partiell stattfindet, so ist der Contractionscoefficient α nach §. 105 durch den Mittelwerth zu ersetzen:

$$\alpha_1 = \alpha\left[1 + 0{,}155 \, . \, \frac{n}{p}\right],$$

oder, weil im fraglichen Falle $n = \frac{1}{2}$ und $p = 1$ angenommen werden kann:

$$(3) \quad \alpha_1 = \alpha\left[1 + \frac{0{,}155}{2}\right] = 1{,}077\,\alpha.$$

Führt man daher für α den Werth 0,64 ein, so ergiebt sich:

$$(4) \quad \alpha_1 = 1{,}077 \, . \, 0{,}64 = 0{,}689,$$

folglich ist:

$$\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2 = \left(\frac{1}{0{,}689}-1\right)^2 = (0{,}45)^2 = 0{,}2025,$$

oder genau genug

$$\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2 = 0{,}20 \text{ und somit}$$

$$z = \left\{0{,}20\,(n+1) + n\right\}\frac{V^2}{2g}, \text{ d. i.}$$

$$(5) \quad z = \left\{1{,}20\,n + 0{,}20\right\}\frac{V^2}{2g},$$

wie Grashof in seiner „Theoretischen Maschinenlehre“, Bd. 1, S. 476 findet.

Der Widerstandscoefficient $= \eta$, nach §. 84, S. 226, läßt sich daher auch setzen:

$$(6) \quad \eta = 1{,}20\,n + 0{,}2,$$

so daß für z erhalten wird:

$$z = \eta\,\frac{V^2}{2g}.$$

Bezeichnet nun q den bei der vorhandenen Druckhöhe H entstehenden Wasserverlust, wenn a_0 der Durchflußquerschnitt ist, so ist

$$(7) \quad q = \mu a_0 \sqrt{2gH}$$

anzunehmen und nur noch bestimmte Auskunft über μ zu geben.

Hierzu setzen wir mit Grashof zunächst $\mu = \psi$ (S. 220, §. 82) und finden ψ (zufolge der Note 3, S. 674) aus der Gleichung

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\eta}}.$$

Für den speciellen Fall der Wassersäulenmaschine im Marienschachte ist nun beim Treibkolben dieser Maschine (wonach unsere Figuren 245 und 246 gezeichnet sind) $n = 6$ und $n + 1 = 7$ (d. h.

es sind 6 Vertiefungen und 7 Erhöhungen vorhanden), daher

$$\eta = 1,20 \,.\, 6 + 0,2 = 7,40, \text{ folglich}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{8,40}} = 0,345.$$

Bei der genannten Maschine ist ferner [1]) die lichte Weite des Kolbencylinders $\overline{AB}$ (Fig. 245) $d = 0^m,31132$ und der größte Durchmesser $= d_1$ des Kolbens C (Fig. 246) $d_1 = 0^m,31112$, folglich ist auch:

$$a_0 = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2) = 0,785 \,.\, 0,0001245, \text{ d. i.}$$

$$a_0 = 0,00009773 \square^m.$$

Da endlich $H = 340^m,77$ angenommen werden kann, so folgt schließlich aus (7):

$$q = 0,345 \,.\, 0,00009773 \sqrt{2g \,.\, 340,77}, \text{ oder}$$

$$q = 0,345 \,.\, 0,00009773 \,.\, 4,43 \sqrt{340,77}, \text{ d. i.}$$

$$q = 0,002757 \text{ Cubikmeter pro Secunde.}$$

Sonach ergiebt sich endlich der s e c u n d l i c h e A r b e i t s v e r l u s t $\mathfrak{A}_0$ zu:

$$\mathfrak{A}_0 = 1000\,qH = 2,757 \,.\, 340,77 = 939^{mk},6,$$

oder zu:

$$N_0 = \frac{939,5}{75} = 12,6 \text{ Maschinenpferde.}$$

V. Neues Mundstück an der Herrenhäuser großen Fontäne.

Zu §. 175, Seite 565.

Den conischen Einsatz D, Fig. 190, hat man seit einiger Zeit ganz entfernt, weil er eine Verdrehung und Zusammenziehung des ausgetretenen Strahles bewirkte. Dafür wurde bei D einfach eine ebene Deckplatte eingesetzt, auf deren äußeren Umfang ein erhöhter ($= 30^{mm}$) Rand gebildet und ein eben solcher Rand im Umfange von EE angebracht, so daß der emporsteigende Strahl einen Hohlcylinder von 420^{mm} äußeren Durchmesser und von $4\frac{1}{2}^{mm}$ Wanddicke bildet. Jede Verdrehung und Zusammenziehung des Strahles ist damit weggefallen und die colossale Wassermasse tritt als schöner, durchsichtiger Strahl aus der Mündung.

VI. Woltmann'scher Flügel mit Zeichengebung durch Schallübertragung von Prof. v. Wagner. [2])

Zu §. 126.

Die Anwendung von Elektromagnetismus zur Zeichengebung bei Woltmann'schen Flügeln ist trotz ihrer vielen Vortheile mit manchen Unzuträglichkeiten verknüpft und namentlich gehören oft recht unan-

[1]) H o p p e, „Theoretische Erörterungen über die Zwillingswassersäulenpumpen im Königin-Marienschachte bei Clausthal". Zeitschrift für Berg-, Hütten- und Salinenwesen. Bd. XXVI (1879), S. 208.

[2]) Deutsche Bauzeitung, Jahrg. 1880, Nr. 43, S. 229.

genehme Störungen beim Gebrauche derartiger Instrumente keineswegs zu den Seltenheiten. Diese Umstände haben Herrn Professor v. Wagner in Braunschweig veranlaßt, einen Woltmann'schen Flügel zu construiren, bei welchem die Signalgebung durch einfache Schallübertragung bewirkt wird. Zu diesem Zwecke ist mit der Flügelwelle des mit zwei nach einer Schraubenfläche gekrümmten Flügeln versehenen Instruments durch ein Scharnier ein kleiner Hammer verbunden, welcher an der Drehung theilnimmt und bei jeder Umdrehung einmal gegen einen im Gehäuse der Flügelwelle angebrachten, ungeglühten Eisendraht schlägt. Der hierdurch entstehende Ton wird durch einen zweiten, mit dem ersten mittelst einer Klemme verbundenen Draht nach dem Standorte des Beobachters geleitet und hier durch einen kleinen Resonanzkasten bedeutend verstärkt, so daß derselbe selbst bei größeren Entfernungen dem Ohre deutlich wahrnehmbar ist. Durch jedesmalige Registrirung der kurz auf einander in gleichen Zeiträumen folgenden Schläge erhält man unmittelbar die Zahl der Flügelumdrehungen während einer gewissen Versuchszeit, und kann aus dieser dann wieder die betreffende Wassergeschwindigkeit in der bekannten Weise ermitteln. — Störungen sind beim Gebrauche des Instruments kaum zu befürchten, doch hat man die Vorsicht anzuwenden, weiche Körper nicht mit dem Leitungsdraht in Berührung zu bringen, da sonst der Ton erheblich abgeschwächt wird.

Herr Hofmechanikus Schmidt in Braunschweig hat der technischen Hochschule in Hannover einen Woltmann'schen Flügel mit v. Wagner-scher akustischer Signalvorrichtung für den Preis von 200 ℳ geliefert.

VII. Middendorf's Formeln zur Berechnung des Schiffswiderstandes und der Arbeitsleistung der Schiffsdampfmaschine. [1]

Zu §. 188, Seite 630.

Die Unzuverlässigkeit der bislang bekannten Formeln zur Berechnung des Schiffswiderstandes und der Arbeitsleistung der Schiffsmaschinen gab nach den Experimenten von Froude Veranlassung, den Reibungswiderstand der benetzten Oberfläche bei der Bestimmung des Gesammtwiderstandes besonders zu berücksichtigen.

Gewöhnlich zerlegt man den Widerstand, den ein Schiff bei der Fortbewegung im Wasser erfährt, in folgende Einzelwiderstände: Formwiderstand, Reibungswiderstand, Widerstand durch Wellenbildung und Luftwiderstand. Bei ruhigem Wetter und ruhigem, tiefen und seitlich unbegrenztem Wasser sind die beiden erstgenannten die bedeutendsten. Die Widerstände der Wellenbildung und der Luft können unter gewöhnlichen Verhältnissen mit dem Formwiderstand combinirt werden; für ungewöhnliche Formen des Schiffes und bei Schiffen mit großen Aufbauten sind jedoch diese Widerstände besonders zu berücksichtigen.

---

[1]) Der Verfasser verdankt diesen Nachtrag Herrn Oberingenieur Middendorf, Dirigenten der Schiffsbauabtheilung, Maschinenfabrik Actiengesellschaft „Weser“ in Bremen. Herr Middendorf machte seine theoretischen Studien von 1859 bis 1863 an der technischen Hochschule in Hannover.

Wenn es nun auch wirklich gelingen sollte, mathematisch zuverlässige Formeln für den Formwiderstand und für den Widerstand, der durch Wellenbildung entsteht, aufzustellen, so ist doch mit Sicherheit anzunehmen, daß derartige Formeln nicht die für die Praxis erforderliche Einfachheit besitzen können. Die genaue Bestimmung des Reibungswiderstandes bei dem jetzt vorherrschenden Baumaterial — Eisen, Holz, Metallbeschlag — ist aber unmöglich, weil sich die Beschaffenheit der Oberfläche fortwährend durch Oxydation, Anwachsen etc. ändert und sogar von der Qualität des Anstrichs abhängig ist.

Man kann daher den Gesammtwiderstand eines Schiffes nicht theoretisch genau bestimmen und muß zu empirischen Formeln seine Zuflucht nehmen.

In den nachstehenden Formeln ist der Form- und Wellenbildungswiderstand im Allgemeinen nach der Nystrom'schen Methode[1]), unter Veränderung der Coefficienten, ermittelt und der Reibungswiderstand besonders bestimmt, bei welchem letzteren aber nicht eine vollständig reine und glatte Oberfläche vorausgesetzt ist, sondern eine mittelmäßig gut erhaltene, wie sie in Wirklichkeit bei Schiffen vorkommt. Man wird daher bei sorgfältig gereinigten und neu gestrichenen Oberflächen, wie sie meistens bei Probefahrten vorhanden sind, und bei ganz vorzüglich construirten Propellern eine etwas größere Geschwindigkeit erwarten dürfen.

Es bezeichne:

L die Länge des Schiffes in der Wasserlinie über Steven in Metern,
B die größte Breite des Hauptspanten in Metern,
O das Areal des Hauptspanten in Quadratmetern,
F die eingetauchte Oberfläche " "
a die Fläche des Propellers " "
(die Kreisfläche der Schraube, die Fläche zweier Radschaufeln, der Querschnitt der Ausströmungsröhren bei hydraulischen Propellern),
v die Geschwindigkeit des Schiffes in Metern pro Secunde,
W den Gesammtwiderstand des Schiffes in Kilogramm,
W_1 " Formwiderstand " " " "
W_2 " Reibungswiderstand " " " "
N_i die indicirten Pferdestärken der Maschine,
N_e " effectiven " " "
k, m, ε und η constante Werthe.

Dann ist:

$$\text{I.} \quad W_1 = 11 \cdot \frac{O \cdot B}{\sqrt{B^2 + mL^2}} \cdot v^{2,5}.$$

---

[1]) S. 628.

Deplacement $O.L$	m	Deplacement $O.L$	m
0,7		0,80	1,62
und darunter	2,00	0,81	1,50
0,71	1,99	0,82	1,42
0,72	1,98	0,83	1,32
0,73	1,96	0,84	1,18
0,74	1,93	0,85	1,06
0,75	1,89	0,86	0,90
0,76	1,85	0,87	0,74
0,77	1,81	0,88	0,55
0,78	1,75	0,89	0,31
0,79	1,69	0,90	0,02

Der Reibungswiderstand wird dargestellt durch die Formel:

$$\text{II.} \quad W_2 = 0{,}17 \, . \, F \, . \, v^2.$$

(Für sehr gute Oberflächen, z. B. Kupferbeschlag, ist $W_2 = 0{,}17 \, . \, F \, . \, v^{1,85}$.)
Der Gesammtwiderstand demnach:

$$\text{III.} \quad W = W_1 + W_2 = 11 \frac{O \, . \, B}{\sqrt{B^2 + mL^2}} \, . \, v^{2,5} + 0{,}17 \, . \, F \, . \, v^2.$$

Für Schleppdampfer ist, wenn Z den Zug in der Schlepptrosse bezeichnet:

$$W = W_1 + W_2 + Z.$$

Bezeichnet u die Geschwindigkeit des Propellers, so ist der von dem Propeller auf das Wasser ausgeübte Druck $= W = \varepsilon \, . \, a \, . \, (u - v)^2$, also

$$u = v + \sqrt{\frac{W}{\varepsilon a}},$$

mithin ist die erforderliche Leistung der Schiffsmaschine $= W \, . \, u = 75 N_e$, demnach:

$$N_e = \frac{W \, . \, u}{75}.$$

Für $\varepsilon = 160$ angenommen, giebt:

$$\text{IV.} \quad N_e = \frac{W}{75}\left(v + \sqrt{\frac{W}{160 \, . \, a}}\right)$$

die effectiven Pferdekräfte der Maschine.

Die oben mit u bezeichnete Geschwindigkeit des Propellers kann zur Construction des letzteren nicht ohne Weiteres benutzt werden, weil der Propeller eines Schiffes aus practischen Gründen sehr nahe am Schiff angebracht werden muß und die Wassertheile in unmittelbarer Nähe des Fahrzeuges mit diesem fortgezogen werden. Beim Schraubenpropeller, der nicht allein nahe am Schiff, sondern auch im Bereich des Kielwassers arbeitet, kommt es sogar oft vor, daß die Geschwindigkeit (Vorrückung) der Schraube gleich und mitunter kleiner wird als die Geschwindigkeit des Schiffes, daß also der Rücklauf (Slip) $= 0$

oder negativ wird. Bei der Construction des Propellers muß daher ganz besonders auf diese Erscheinung Rücksicht genommen werden.

Für gewöhnliche Hoch- und Niederdruckmaschinen mit zwei Cylindern ist, wenn $N_e = \eta N_i$, also $N_i = \frac{N_e}{\eta}$ gesetzt wird, der Werth von η aus nachstehender Tabelle zu finden:

N_i	η	N_i	η
30— 40	0,61	800— 900	0,76
40— 60	0,62	900—1000	0,77
60— 80	0,63	1000—1200	0,78
80—100	0,64	1200 - 1400	0,79
100—150	0,65	1400—1600	0,80
150—200	0,66	1600—2000	0,81
200—250	0,67	2000—2500	0,82
250—300	0,68	2500—3000	0,83
300—350	0,69	3000 - 3500	0,84
350—400	0,70	3500—4000	0,85
400—450	0,71	4000—5000	0,86
450—500	0,72	5000—6000	0,87
500—600	0,73	6000—7000	0,88
600—700	0,74	7000—8000	0,89
700—800	0,75	8000 und darüber	0,90

Noch vor Vollendung des Satzes gegenwärtigen Bogens macht mir Herr Middendorf nachstehende wichtige Mittheilungen:

1) Erklärt derselbe, daß Nystrom.'s Formel für kurze Schiffe zu hohe Widerstandswerthe giebt. Für flachgehende Schiffe, d. h. Schiffe, die auf sehr flachem Wasser fahren, es aber überhaupt keine Formel existirt, die nur annähernd mit der Wirklichkeit stimmt.[1])

2) Macht mich derselbe Freund auf eine Arbeit des Herrn Marine-Ingenieurs Rauchfuß in Kiel aufmerksam, welche zuerst im Beihefte Nr. 28 zum Marineverordnungsblatte erschien, dann aber als besonderer Abdruck, im Verlag von Siegfried Mittler & Sohn in Berlin (1880), Jedermann zugänglich gemacht wurde.

Diese Arbeit ist jedenfalls beachtenswerth und werthvoll, auch Herr Middendorf bezeichnet sie als sehr interessant, bemerkt jedoch auch, daß die Handhabung der betreffenden Formel etwas umständlich ist.

Fast ganz im Sinne Froude's (S. 620) hält Rauchfuß es für entsprechend, den Gesammtwiderstand $= R_t$ eines Schiffes in vier verschiedene Theile (statt Froude in drei Theile) zu zerlegen, nämlich in den Reibungswiderstand $= R_f$, den Luftwiderstand $= R_a$, den Wirbel und Wellen bildenden Widerstand $= R_w$ und in den Stauwasserwiderstand $= R_b$, so daß sich für den Gesammtwiderstand die

---

[1]) Eine practische Aushülfe dürfte Redtenbacher's Formel (S. 612 und S. 616) bieten.

Gleichung ergiebt:

$$R_t = R_f + R_a + R_w + R_b.$$

Der von **Rauchfuß** noch zu den Froude'schen Werthen gefügte Widerstand R_b ist der Widerstand des Stauwassers vorn am Bug des Schiffes, welcher Widerstand eigentlich zum Form und Wellenbildungswiderstand gerechnet werden kann.

Für metrisches Maaß und Kilogramme, v die Geschwindigkeit in Knoten, gelangt **Rauchfuß** schließlich zu folgenden Formeln:

$$\text{I.}\quad R_t = \overset{(R_f)}{0{,}0471\,Fv^{1,83}} + \overset{(R_a)}{0{,}0215Av^2} + \overset{(R_w)}{1{,}842v^2\int ds \sin^3\alpha} + \overset{(R_b)}{0{,}00481\,v^6\int dl \sin^7\alpha}.$$

In Pferdekräften $= N$ (zu 75 Secunden Meterkilogramm):

$$\text{II.}\quad N = \frac{323Fv^{2,83}}{1\,000\,000} + \frac{147Av^3}{1\,000\,000} + 0{,}0126v^3\int ds \sin^3\alpha + \frac{33{,}0\,.\,v^7\int dl \sin^7\alpha}{1\,000\,000}.$$

Hierin bedeutet F die benetzte Schiffsschale, A die Fläche des Luftwiderstandes (der über Wasser liegenden Schiffstheile), ds ein Element der Fläche des eingetauchten Schiffskörpers und α den kleinsten Winkel, welchen dies Flächenelement mit der Bewegungsrichtung bildet[1]) und endlich dl ein Curvenelement der oberen Wasserlinie.

Für die Zwecke practischer Rechnungen liefert **Rauchfuß** Tabellen der Integrale $\int ds\,.\,\sin^3\alpha$ und $\int dl \sin^7\alpha$ und zeigt deren Anwendung für verschiedene Schiffe der englischen und deutschen Kriegsmarine.

Letzterer Schiffsgattung entlehnen wir **zwei** Beispiele, woraus zu erkennen ist, wie sich die gesammte in **Pferdekräften** ausgedrückte widerstehende Arbeit $= N_w$ auf die vier verschiedenen Widerstände vertheilt.

1) Bei der deutschen Dampf-Panzerfregatte „**König Wilhelm**“:

Reibungsarbeit . .	1580,2	Die indicirte Pferdekraft war $N_i = 8345$ bei $v = 14{,}723$ (Knoten).
Luftwiderstand . .	171,1	
Wirbel und Wellen .	902,2	
Stauwasser	922,3	
$N_w =$	3575,8	

Daher der Wirkungsgrad[2]) $= \mathfrak{g} = \frac{N_w}{N_i} = 0{,}428.$

2) Bei dem deutschen Kanonenboote „**Cyklop**“:

Reibungswiderstand .	57,6	Die indicirte Pferdekraft war $N_i = 245$ bei $v = 8{,}831$ (Knoten).
Luftwiderstand . . .	4,0	
Wirbel und Wellen .	23,5	
Stauwasser	2,3	
$N_w =$	87,4	

Daher der Wirkungsgrad $= \mathfrak{g} = \frac{N_w}{N_i} = 0{,}357.$

Schließlich sei noch erwähnt, daß **Rauchfuß** auf ein Werk **Bertin's** „Notice sur la marine à vapeur“ aufmerksam macht und solches als eine compendiöse, aber geistvolle Arbeit bezeichnet. Dem Verfasser war dies Werk seither unbekannt.

---

[1]) In unserer Fig. 227 (S. 709) ist dieser Winkel mit φ bezeichnet.

[2]) Mit Bezug auf Propeller, Rücklauf und die Dampfmaschine.

VIII. Froude's Formel[1]) zur Berechnung des Winddruckes gegen die Segelfläche eines Schiffes.

Zu §. 203, S. 693, Nr. 3.

Nach Versuchen Froude's kann man den Druck $= P$ in engl. Pfunden auf die Segelfläche von F engl. Quadratfußen nach folgender Formel berechnen, wenn die secundliche Windgeschwindigkeit mit V bezeichnet wird:

$$P = 0{,}0017\, F V^2.$$

Ist also beispielsweise $F = 24500$ Quadratfuß[2]) und beträgt die durch ein Anemometer gemessene Windgeschwindigkeit 10 Knoten pro Stunde, so ist $V = \frac{6086{,}4 \,.\, 10}{3600} = 16{,}90$ Fuß und daher

$$P = 0{,}0017 \,.\, 24500\, (16{,}9)^2 = 11895 \text{ Pfund.}$$

Die pro Secunde verrichtete Arbeit $= \mathfrak{A}$ des Windes würde sonach betragen

$$\mathfrak{A} = PV = 11895 \,.\, 16{,}9 = 201036 \text{ Fußpfund oder}$$

$$N = \frac{\mathfrak{A}}{550} = \frac{201036}{550} = 366 \text{ Maschinenpferdekräfte.}$$

---

[1]) White, Manual of Nav. Arch. Deutsch von Schlick und v. Hüllen unter dem Titel „Handbuch für Schiffbau", Abschnitt XII, S. 515 und 516.

[2]) Hierbei sind 7 Quadratfuß Segelfläche für jede engl. Tonne des Schiffsdeplacements (Gewicht des vom Schiffe verdrängten Wassers) gerechnet, also ein Schiff von 3500 Tonnen vorausgesetzt.

Berichtigungen.

S. 2, Z. 11 und Z. 13 von unten ist Pictet statt Pietet zu schreiben.
S. 2, Z. 16 von unten muß es heißen: „Nachdem man am Anfange dieses Jahrhunderts dahin gelangt war, verschiedene Gase tropfbar zu machen etc.“
S. 3, im Haupttexte Z. 4 von unten lies: auf Böden und Wände der Gefäße drücken.
S. 4, Note Z. 5 von unten lies: regelt statt reget.
S. 6, Z. 6 von unten ist Wüllner statt Wülbern zu setzen.
S. 8, im Haupttexte Z. 10 von unten lies: einen Kolben R (in einem Rohre NQ) vom Querschnitte $= na$.
S. 10, Z. 14 von oben lies: als, statt also.
S. 10, Z. 3 von unten lies: $\frac{4x}{d^2\pi} D\pi H$ statt $\frac{4x}{d^2\pi} D\pi h$.
S. 12, im Haupttexte Z. 7 von unten lies: $\frac{wa}{b} \cdot \frac{d^2\pi}{4}$ statt $\frac{wa}{a} \cdot \frac{d^2\pi}{4}$.
S. 12, im Haupttexte Z. 5 von unten lies: $\frac{wa}{b} \frac{d^2\pi}{4}$ statt $\frac{wa}{b} \frac{d^2\pi}{4}$.
S. 15, Z. 4 von unten ist das Wort „nur“ zu streichen.
S. 16, Z. 9 von oben lies: $\left[p + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz\right]$ statt $\left[p + \left(\frac{dp}{dy}\right) dz\right]$.
S. 21, Z. 21 von oben lies: ME statt MB.
S. 26, Z. 4 von unten lies: $\frac{m}{3} . 1 . e^2$ statt $\frac{m}{8} . 1 . e^2$.
S. 26, Z. 4 von unten ist R statt N zu setzen.
S. 27, Z. 4 von oben lies: $e = 1^m,34$ statt $1^m,4$.
S. 32, im Haupttexte Z. 6 von unten, ist statische statt statistische zu schreiben.
S. 85, Note 2 ist die Angabe von neueren Werken, welche die Stabilität der Schiffe behandeln, noch durch Lutschaunings „Theorie des Schiffes“ (S. 627) und White's „Handbuch des Schiffsbaues“ (S. 629) zu ergänzen.
S. 108, Note 1 muß es μανός statt μανὸϱ heißen.
S. 108, Note 2 muß es βάϱυς statt βάϱοϱ heißen.
S. 110. In der Auflösung des Beispieles ist zu setzen:

$$p = \frac{P}{4} + 1 = 21,2785 \text{ Kil.}$$

S. 111, Z. 10 von unten ist zu schreiben:

$$v_1 = v_0 (1 + \delta t_1) \text{ und } v_2 = v_0 (1 + \delta t_2).$$

S. 111, im Haupttexte Z. 9 von unten lies: Volumina statt Voluminas.
S. 111, im Haupttexte Z. 1 von unten lies: $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ statt $\begin{matrix}\Delta_1 \\ \Delta_2\end{matrix}$.
S. 111, Note 1 statt geschichtlichen ist geschichtliche zu setzen.
S. 112, Z. 21 von oben schreibe man 7990 statt 7992,655.

S. 115, Z. 20 von oben lies:

$$x = \frac{a+b+h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b+h}{2}\right)^2 - ah}.$$

S. 118, Zusatz 1 muß überall π' statt π_1 stehen.
S. 118. In Gleichung (1) und den zugehörenden Werthen muß es analog der Fig. 61 heißen $\overline{HK}$ statt $\overline{GK}$.
S. 119 fehlt in der Gleichung I beim Factor $\lambda - x_{n-1}$ die hintere Klammer.
S. 120, Z. 11 von oben lies:

$$x_2 = x_1 \left(\frac{V}{V+v}\right) = b\left(\frac{V}{V+b}\right)^2 \text{ statt } = b\left(\frac{V}{V+v}\right).$$

S. 120, Z. 16 von oben lies: $x_n = \left(\frac{V+nv}{V}\right) . b$ statt $x_n = \left(\frac{V+nv}{V}\right)$.
S. 121, Z. 14 von oben setze man UF statt AF.
S. 122, Z. 19 von unten muß es heißen: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_c + \mathfrak{A}_f + \mathfrak{A}_a$.
S. 125, Z. 3 von oben ist zu schreiben:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^n, \text{ also } \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

S. 125, Note 3 lies: Bravais und Martins statt Bravais und Martius.
S. 128. Bei Auflösung des Beispiels 1 muß es heißen: Gleichung II und bei Beispiel 2 analog Gleichung III.
S. 129, Z. 10 von oben ist 425 Calorien durch 425 Meterkilogramm zu ersetzen.
S. 130. In der Tabelle muß der der Temperatur 0^0 C entsprechende Werth für Platin 0,032386 und nicht 0,03286 sein.
S. 135, Z. 11 von oben ist zu schreiben: $\frac{R}{n-1} = Ec_v$.
S. 158 und 159. In §. 68 bezeichnen x_2 und x_1 die Dampfgewichte beziehungsweise am Anfange und am Ende der Expansion, folglich ist S. 159 $x_2 = 1$ Kil. und $x_1 = 0{,}921$ Kil. und daher auch $q_2 + x_2\varrho_2 = 606{,}806$ und $q_1 + x_1\varrho_1 = 557{,}592$, wonach die betreffenden Berichtigungen leicht vorzunehmen sind.
S. 203, Z. 26 von oben ist 1500 statt 15000 Quadratmeter zu setzen.
S. 209, Z. 19 von oben lies: $A = 0\square^m{,}20$ statt $A = 0^m{,}20$.
S. 209, Z. 27 von oben lies: $= 8^m{,}592$ statt $= 8^m{,}502$.
S. 212, Z. 14 von oben lies: $z = h\,\frac{a^2}{O^2}$ statt $z = h\,\frac{a^2}{O^2}$.
S. 212, Z. 17 von oben lies: $z < h\,\frac{a^2}{O^2}$ statt $z > h\,\frac{a^2}{O^2}$.
S. 213, Z. 8 von oben ist Pfropfen statt Propfen zu schreiben.
S. 222 lies in der zweiten Tabelle: Mündungsdurchmesser $= d$ in Linien.
S. 223, Z. 15 von unten lies:

$$\frac{\Pi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + z - \left(\frac{\alpha^2 a^2}{O^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right)\frac{v^2}{2g} \text{ statt } \frac{\Pi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + z - \left(\frac{\alpha^2 a^2}{O^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right).$$

S. 224, Z. 6 von unten lies rechter Hand: $= \frac{mv^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha_1 a_1} - \frac{1}{A_1}\right)^2 \alpha^2 a^2$.
S. 226, Z. 1 von oben ist $\eta = \left(\frac{A}{\alpha a_1} - 1\right)^2$ statt $\left(\frac{A}{\alpha a_1} - 1\right)^2 \frac{V^2}{2g} = \eta$ zu setzen.
S. 226, Z. 12 von unten lies rechter Hand:

$$= \tfrac{1}{2} m V^2 \left(\frac{A}{A_1} - 1\right)^2 \text{ statt } = \tfrac{1}{2} m V^2 \left(\frac{A}{A_2} - 1\right)^2.$$

S. 226, Z. 2 von unten lies: BR statt RR.
S. 228, Note 1 muß Gleichung (1) heißen:

$$my\omega^2 \sin\varphi = gm \cos\varphi \text{ statt } my\omega \sin\varphi = gm\cos\varphi.$$

S. 230, Z. 18 von oben lies in Gleichung (3) rechter Hand:

$$g\,(M-m) - \tfrac{1}{2}\frac{dm}{dt}V \text{ statt } g\,(M-m) + \tfrac{1}{2}\frac{dm}{dt}V.$$

S. 230, Z. 1 von unten lies: $v = \sqrt{\dfrac{2gz}{\left(1-\dfrac{a^2}{A^2}\right)}}$ statt $v = \sqrt{2gz}$.

S. 231, Z. 1 von unten lies: $t_2 = \dfrac{A\sqrt{h}}{\mu a\sqrt{2g}}$ statt $= \dfrac{A\sqrt{h}}{\mu a\sqrt{2g}}$.

S. 235, Z. 17 und 27 von oben lies: §. 87 statt §. 88.

S. 236, Z. 11 von oben lies: $k = \dfrac{A}{\mu a\sqrt{2gx}}$ statt $= \dfrac{by}{\mu a\sqrt{2gx}}$.

S. 236, Z. 13 von oben lies: $k = \dfrac{by}{\mu a\sqrt{2gx}}$ statt $= \dfrac{A}{\mu a\sqrt{2gx}}$.

S. 244, Z. 3 von oben lies rechter Hand:

$$= \frac{1}{2g}\left\{\frac{Q}{ab\,(H-h)}\right\}^2 \text{ statt } = \frac{1}{2g}\left\{\frac{Q}{ab\,(H+h)}\right\}^2.$$

S. 255, Z. 4 von oben lies: $Q = 0{,}625 \,.\, 0{,}02 \,.\, 0{,}60\, \sqrt{2g \,.\, 1{,}55} =$

S. 257. In der mittleren Columne der Tabelle muß es heißen:

$$Q = \tfrac{2}{3}b\,\sqrt{2g}\,(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}).$$

S. 374, Z. 12 von oben muß es heißen: bei der Baumgarten'schen statt der Bornemann'schen Anordnung.

S. 386, Z. 6 von unten ist $\varphi = 0{,}880$ und nicht 0,889.

S. 312, Z. 5 von oben fehlt nach Cubikmeter das Wort „gefunden“.

S. 435, Z. 2 von oben fehlt beim Namen Eytelwein die correspondirende Marke (1) der untenstehenden Note 1.

S. 523 ist überall δ statt δ_1 zu setzen und ferner zu schreiben (mit Bezug auf Fig. 184[1]): $\sin\tfrac{1}{2}\delta = \dfrac{\overline{ap}}{\overline{mp}} = \dfrac{\frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}d_1} = \dfrac{d}{d_1}$.

S. 565. Wie in den Nachträgen S. 751 berichtet wird, hat man später den Innenkegel D ganz entfernt.

S. 602, Z. 14 und 15 von oben ist in beiden Gleichungen $l - x$ durch $x - e$ zu ersetzen.

S. 630. Der an dieser Stelle (Note 1) versprochene Nachtrag ist S. 752 ff. geliefert.

S. 681. Wie sehr bedauert werden muß, daß vielen practischen Ingenieuren Grashof's Formel X, S. 682, zur Berechnung der Druckverluste bei der Bewegung stark comprimirter Luft in langen Rohrleitungen, noch unbekannt ist, erhellt u. A. aus einer Abhandlung des Ingenieurs Stockalper in der Züricher Eisenbahnzeitung, Nr. 18, S. 103, vom 1. Mai 1880. Dasselbe findet statt in Bezug auf die Ermittlung der Druckverluste in Dampfleitungen. Grashof's desfallsige Formel §. 201 will man entweder nicht kennen, oder kennt sie nicht. Man sehe u. A. Dingler's polytechn. Journal, Bd. 236 (1880), S. 353.

S. 697, Note 1. In den Verhandlungen der vom brittischen Handelsamte eingesetzten Commission, betreffend die Ursachen des Taybrücken-Einsturzes, wurde allgemein die Annahme eines Winddruckmaximums von 244 Kilogramm pro Quadratmeter empfohlen. Ausführliches hierüber berichtet die (Berliner) Deutsche Bauzeitung vom 26. Juni 1880, S. 272.